

dai modelli ai dati e ritorno sulla ali di una farfalla (o era un gabbiano?)

Dimitri Breda



CDLab – Computational Dynamics Laboratory

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche – Università di Udine

Paolo Giangrandi, Chiara Milan

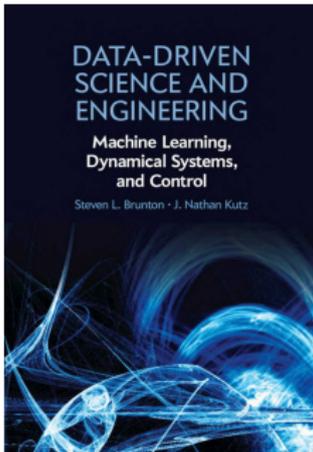
I.S.I.S. “A. Malignani” – Udine

30 marzo 2023 @ Udine

premesse

- programma:
 - seminario per insegnanti (B.)
 - possibili percorsi per studenti e discussione (Giangrandi, Milan, B.)
- motivazioni:
 - futuro laboratorio PLS
 - sistemi dinamici, intelligenza artificiale
- strumenti:
 - viaggio tra modelli e dati
 - attraverso equazioni differenziali, polinomi, autovalori, numeri complessi, metodi numerici, computer, errori, ottimizzazione. . .
- obiettivi:
 - ragionare sulle sfide poste da nuovi paradigmi
 - ruolo della matematica (e dei matematici)

dai modelli ai dati e ritorno sulla ali di una farfalla
(o era un gabbiano?)



Modern dynamical systems began with the seminal work of Poincaré on the chaotic motion of planets. It is rooted in classical mechanics, and may be viewed as the culmination of hundreds of years of mathematical modeling, beginning with Newton and Leibniz. The full history of dynamical systems is too rich for these few pages, having captured the interest and attention of the greatest minds for centuries, and having been applied to countless fields and challenging problems. Dynamical systems provides one of the most complete and well-connected fields of mathematics, bridging diverse topics from linear algebra and differential equations, to topology, numerical analysis, and geometry. Dynamical systems has become central in the modeling and analysis of systems in nearly every field of the engineering, physical, and life sciences.

Modern dynamical systems is currently undergoing a renaissance, with analytical derivations and first principles models giving way to data-driven approaches. The confluence of big data and machine learning is driving a paradigm shift in the analysis and understanding of dynamical systems in science and engineering.

modelli

- rappresentazione astratta di una realtà concreta:
 - statici vs **dinamici**
 - discreti vs **continui**
 - **deterministici** vs probabilistici
 - lineari vs **nonlineari**

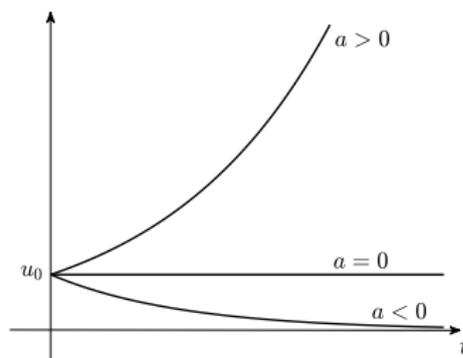
crescita Malthusiana

- una popolazione varia proporzionalmente a sé stessa:

$$u' = au$$

- $a \in \mathbb{R}$ parametro Malthusiano
- $u(t) = e^{at}u_0$ è l'unica soluzione del *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = au(t), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$



[3] Engel, Nagel – Springer 1999 [cap. VII]

[4] Euler – Lausannae 1748

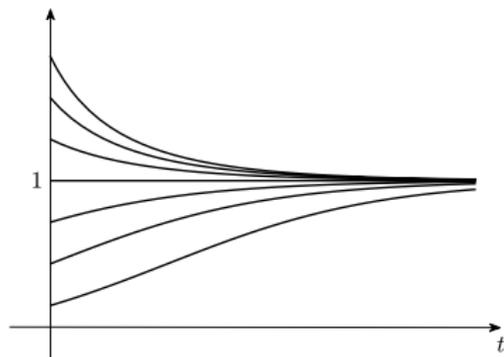
[14] Malthus – Johnson 1798

crescita logistica

- competizione interna:

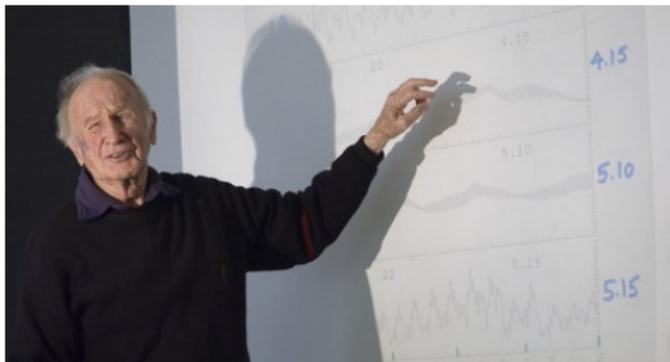
$$u' = au(1 - u)$$

- $a > 0$



- Lotka-Volterra, Kermack-McKendrick, SIR...
- ... Navier-Stokes:
 - PDE
 - conservazione massa e momento per fluidi newtoniani
 - alla base della fluidodinamica
 - dal sistema cardio-circolatorio alla [meteorologia](#)

Edward Lorenz (1917-2008)



- appassionato fin da bambino di astronomia, matematica e meteorologia
- MSc in matematica Harvard, 1940 (G. Birkhoff)
- MSc in meteorologia MIT, 1943 (C.G. Rossby)
- PhD in meteorologia MIT, 1948 (J. Austin)
 - statistica vs numerica
 - regressione lineare vs sistemi nonlineari
 - Navier-Stokes

[7] Kerry – Biographical Memoirs of National Academy of Sciences 2011

[17] Palmer – Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 2009

12 variabili

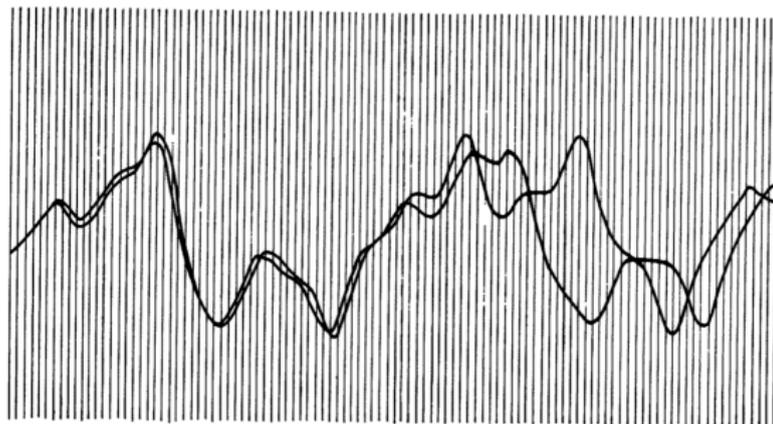
- atmosfera reale: **aperiodica**
- modello semplificato di Navier-Stokes troncando serie di Fourier
- 1958: Lorenz acquista un “desk computer” Royal McBee LGP-30



- i metodi statistici danno risultati mediocri rispetto alle simulazioni

alba del caos

- scorciatoie, caffè e arrotondamenti: *



(figura da [6], originale di Lorenz del 1961)

- Lorenz intuisce
 - il ruolo dell'aperiodicità rispetto alla predicibilità
 - la relazione tra la mancanza di periodicità e la crescita di piccole differenze
- dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

* da .506127 (processore) a .506 (stampante)

[6] Gleick – Chaos: Making a New Science 1987

Margaret Hamilton



- 1959-1961 lavora nel gruppo di Lorenz al MIT
- apollo 11, Skylab
- *software engineering*
- formazione

[21] Sokol – Quanta Magazine 2019

3 variabili

- nello spazio degli stati il tempo atmosferico occupa particolari **superfici**
- per verificarlo serve un modello semplice
- semplificazione ulteriore (da 7 a 3 variabili) di un modello di convezione [20]

Deterministic Nonperiodic Flow¹

EDWARD N. LORENZ

Massachusetts Institute of Technology

(Manuscript received 18 November 1962, in revised form 7 January 1963)

$$X' = -\sigma X + \sigma Y,$$

$$Y' = -XZ + rX - Y,$$

$$Z' = XY - bZ.$$

[9] Lorenz – J. Atmos. Sci. 1963

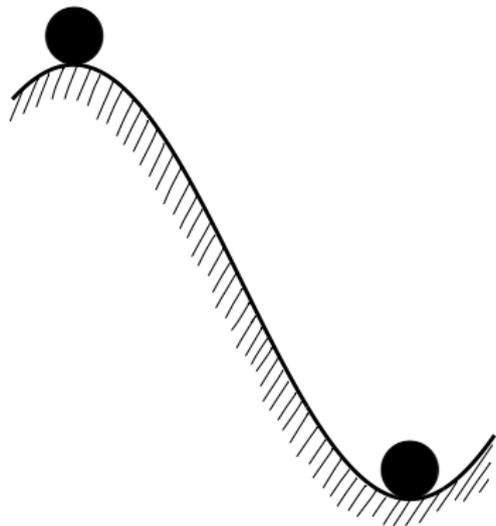
il modello di Lorenz

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

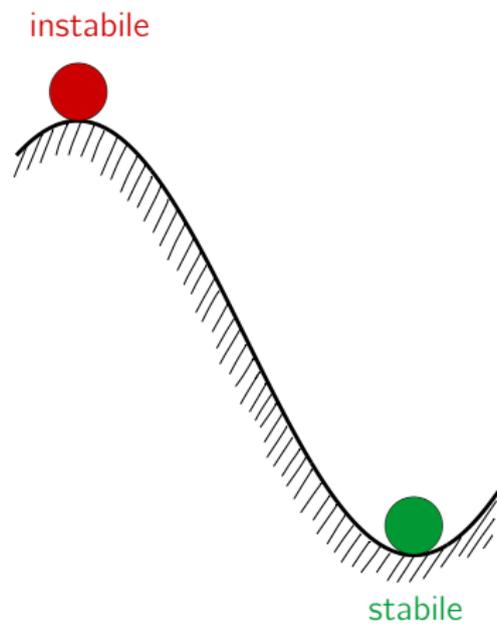
- variabili:
 - $x \in \mathbb{R}$: intensità del moto convettivo
 - $y \in \mathbb{R}$: differenza di temperatura tra correnti ascendente e discendente
 - $z \in [0, +\infty)$: deviazione dal profilo lineare di temperatura verticale
- parametri r , σ , b positivi
- studio della dinamica al crescere di $r > 0$ per $\sigma = 10$, $b = 8/3$ [9]

breve excursus: Malthus e la logistica

equilibri e stabilità



equilibri e stabilità



equilibri

- soluzioni \bar{u} costanti nel tempo di

$$\mathbf{u}' = f(\mathbf{u})$$

$$\bar{\mathbf{u}}' = 0 \Leftrightarrow f(\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

- esempi:

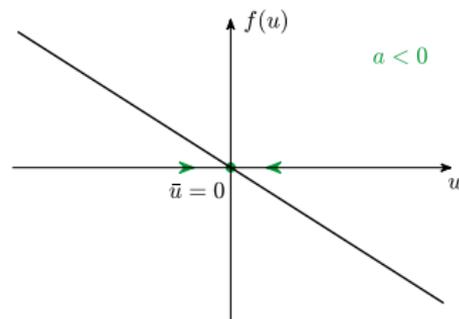
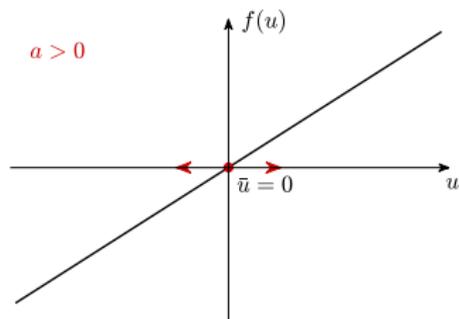
– Malthus $f(\mathbf{u}) = \mathbf{a}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (\mathbf{a} \in \mathbb{R})$

– logistica $f(\mathbf{u}) = \mathbf{a}\mathbf{u}(1 - \mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{u}}_0 = 0, \bar{\mathbf{u}}_+ = 1 \quad (\mathbf{a} > 0)$

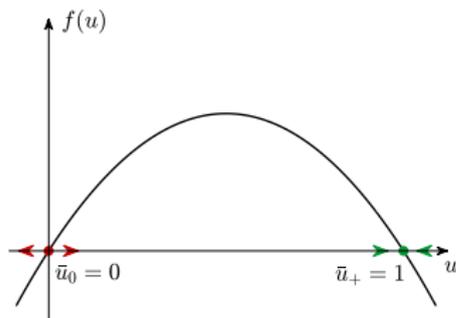
stabilità

- per $u' = f(u) \in \mathbb{R}$ basta il grafico di f : intersezioni e pendenza

– Malthus $f(u) = au$:



– logistica $f(u) = au(1 - u)$:



linearizzazione

- la stabilità è conseguenza della pendenza **locale**:

- $f'(\bar{u}) < 0 \Rightarrow$ **stabile**

- $f'(\bar{u}) > 0 \Rightarrow$ **instabile**

- in generale, studiamo una soluzione

$$u(t) = \bar{u} + U(t)$$

data da una **piccola** perturbazione U di un equilibrio \bar{u}

- poichè $U' = u'$ otteniamo

$$U' = f(u) = f(\bar{u} + U) \simeq f(\bar{u}) + f'(\bar{u})U = f'(\bar{u})U$$

- corrisponde al modello di Malthus con $a = f'(\bar{u})$:

- $f'(\bar{u}) < 0 \Rightarrow |U(t)| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty \Rightarrow$ **stabile**

- $f'(\bar{u}) > 0 \Rightarrow |U(t)| \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty \Rightarrow$ **instabile**

ritorno a Lorenz

equilibri

- soluzioni $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^T$ costanti nel tempo:

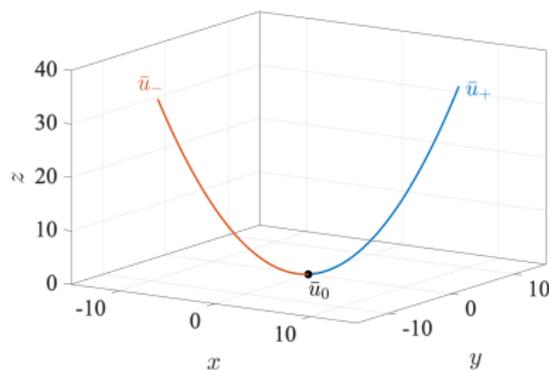
$$x' = y' = z' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

- equilibrio banale (per ogni $r > 0$):

$$\bar{\mathbf{u}}_0 := (0, 0, 0)^T$$

- equilibri nonbanali (solo per $r > 1$):

$$\bar{\mathbf{u}}_{\pm} := \left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right)$$



linearizzazione

- studiamo una soluzione

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{U}(t)$$

data da una piccola perturbazione \mathbf{U} di un equilibrio $\bar{\mathbf{u}}$

- poichè $\mathbf{U}' = \mathbf{u}'$ otteniamo

$$\begin{cases} X' = x' = -\sigma(\bar{x} + X) + \sigma(\bar{y} + Y) \\ Y' = y' = r(\bar{x} + X) - (\bar{y} + Y) - (\bar{x} + X)(\bar{z} + Z) \\ Z' = z' = (\bar{x} + X)(\bar{y} + Y) - b(\bar{z} + Z) \end{cases}$$

- poichè $\bar{\mathbf{u}}$ è equilibrio e \mathbf{U} è piccola si giunge a

$$\begin{cases} X' = -\sigma X + \sigma Y \\ Y' = (r - \bar{z})X - Y - \bar{x}Z \\ Z' = \bar{y}X + \bar{x}Y - bZ \end{cases}$$

modello linearizzato

- abbiamo ottenuto

$$\mathbf{U}' = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad (\text{in } \mathbb{R}^3)$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - \bar{z} & -1 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & -b \end{pmatrix}$$

- ricorda il modello di Malthus

$$\mathbf{U}' = a\mathbf{U} \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

con soluzione esponenziale $\mathbf{U}(t) = e^{at}\mathbf{U}_0$:

- $a < 0 \Rightarrow |\mathbf{U}(t)| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty \Rightarrow$ stabile

- $a > 0 \Rightarrow |\mathbf{U}(t)| \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty \Rightarrow$ instabile

esponenziale e autovalori

- sostituendo $e^{\lambda t} \mathbf{v}$ per $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ in $\mathbf{U}' = \mathbf{A}\mathbf{U}$ otteniamo

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (\text{in } \mathbb{R}^3)$$

- quindi le soluzioni sono esponenziali e gli esponenti sono gli **autovalori** λ della matrice \mathbf{A} (volte t)
- gli autovalori sono gli zeri del **polinomio caratteristico**

$$p(\lambda) := \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

- p ha grado 3 e risulta *

$$p(\lambda) = (\lambda + \sigma)(\lambda + 1)(\lambda + \mathbf{b}) + \sigma \bar{x} \bar{y} + (\lambda + \sigma) \bar{x}^2 + \sigma(\bar{z} - \mathbf{r})(\lambda + \mathbf{b})$$

* grazie ad es. alla **regola di Sarrus**

numeri complessi

- gli zeri di un polinomio possono essere **numeri complessi**
- se

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

la **formula di Eulero** restituisce

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$$

- l'andamento nel tempo lungo dipende dalla **parte reale α** :
 - $\alpha < 0 \Rightarrow |e^{\lambda t}| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$
 - $\alpha > 0 \Rightarrow |e^{\lambda t}| \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$
 - $\alpha = 0 \Rightarrow |e^{\lambda t}| = 1$ **oscillazioni** (di periodo $2\pi/\beta$)

principio di stabilità linearizzata

- siano $\lambda = \alpha \pm i\beta$ gli autovalori di A (eventualmente $\beta = 0$)
- per l'equilibrio \bar{u} attorno al quale si è linearizzato risulta:
 - $\alpha < 0$ per ogni autovalore \Rightarrow stabile
 - $\alpha > 0$ per almeno un autovalore \Rightarrow instabile

stabilità dell'equilibrio banale

- per $\bar{u} = \bar{u}_0$ il polinomio caratteristico diventa

$$p(\lambda) = [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)](\lambda + b)$$

- l'autovalore $\lambda = -b$ è sempre negativo
- i rimanenti due sono reali e, per la [regola dei segni di Cartesio](#),
 - entrambi negativi se $r < 1$ $\Rightarrow \bar{u}_0$ stabile
 - uno negativo e uno positivo se $r > 1$ $\Rightarrow \bar{u}_0$ instabile

stabilità degli equilibri non banali ($r > 1$)

- per $\bar{u} = \bar{u}_{\pm}$ il polinomio caratteristico diventa

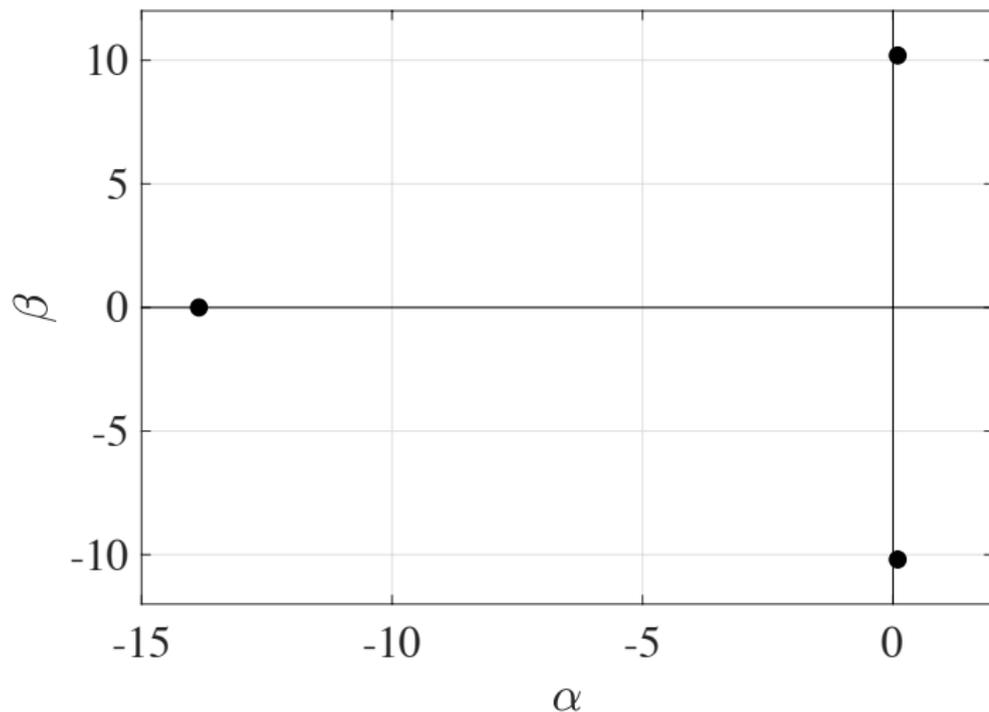
$$p(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1)$$

- sempre per la regola dei segni di Cartesio vi è un autovalore reale negativo
- per r sufficientemente grande gli altri due formano una coppia complessa-coniugata
- tale coppia attraversa l'asse immaginario da sinistra a destra quando r supera

$$r_H := \sigma \cdot \frac{\sigma + b + 3}{\sigma - b - 1} \quad (\text{hp } \sigma > b + 1)$$

- $r < r_H \Rightarrow \bar{u}_{\pm}$ stabile
- $r > r_H \Rightarrow \bar{u}_{\pm}$ instabile

autovalori



nota: calcolati con MATLAB per $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$ ($r_H \approx 24.7368$)

The presence of complex roots of (34) shows that if unstable steady convection is disturbed, the motion will oscillate in intensity. What happens when the disturbances become large is not revealed by linear theory. To investigate finite-amplitude convection, and to study the subspace to which trajectories are ultimately confined, we turn to numerical integration.

il metodo di Eulero (esplicito)

- vogliamo approssimare la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)), & t \in [0, T], \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

- poniamo $t_n := nh$ per $h = T/N$ e $N \in \mathbb{N}$
- costruiamo un'approssimazione \mathbf{u}_n di $\mathbf{u}(t_n)$ attraverso l'iterazione

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + hf(\mathbf{u}_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N$$

- significato:

$$\frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{h} = f(\mathbf{u}_{n-1}) \simeq f(\mathbf{u}(t_{n-1})) = \mathbf{u}'(t_{n-1})$$

- Lorenz [9] in realtà usa un metodo appena più elaborato (circa 1 secondo per iterazione sul Royal McBee LGP-30)

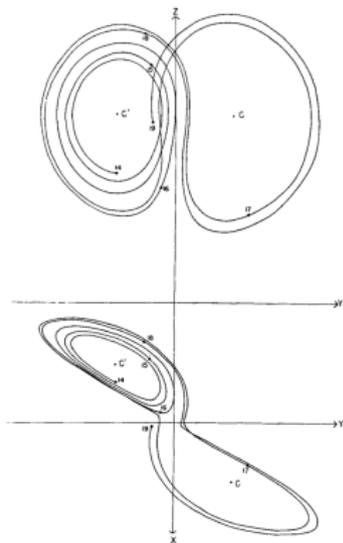
[9] Lorenz – J. Atmos. Sci. 1963

Ellen Fetter

Acknowledgments. The writer is indebted to Dr. Barry Saltzman for bringing to his attention the existence of nonperiodic solutions of the convection equations. Special thanks are due to Miss Ellen Fetter for handling the many numerical computations and preparing the graphical presentations of the numerical material.

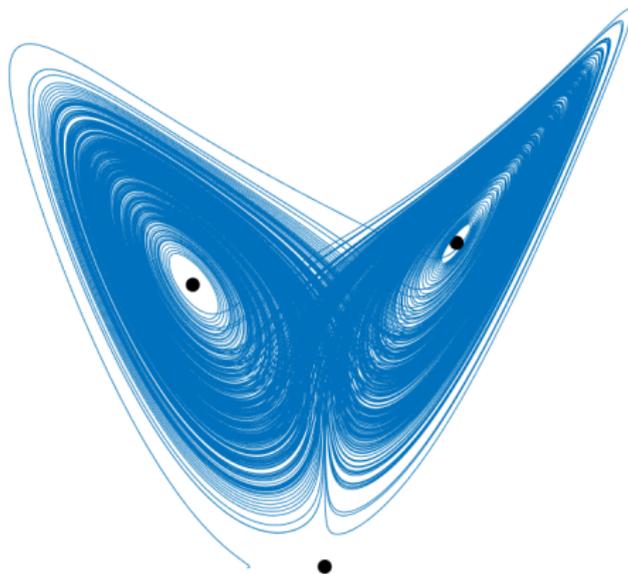


- subentra ad Hamilton nel 1961
- programma il metodo numerico
- trova le “superfici”, ovvero la famosa “farfalla”

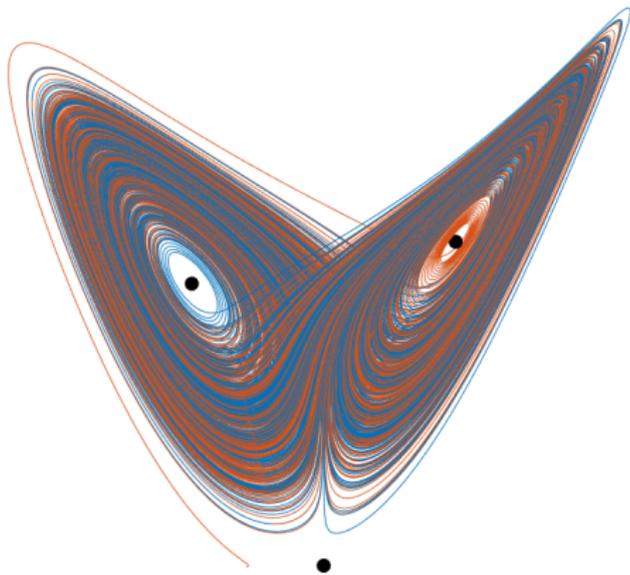


[9] Lorenz – J. Atmos. Sci. 1963

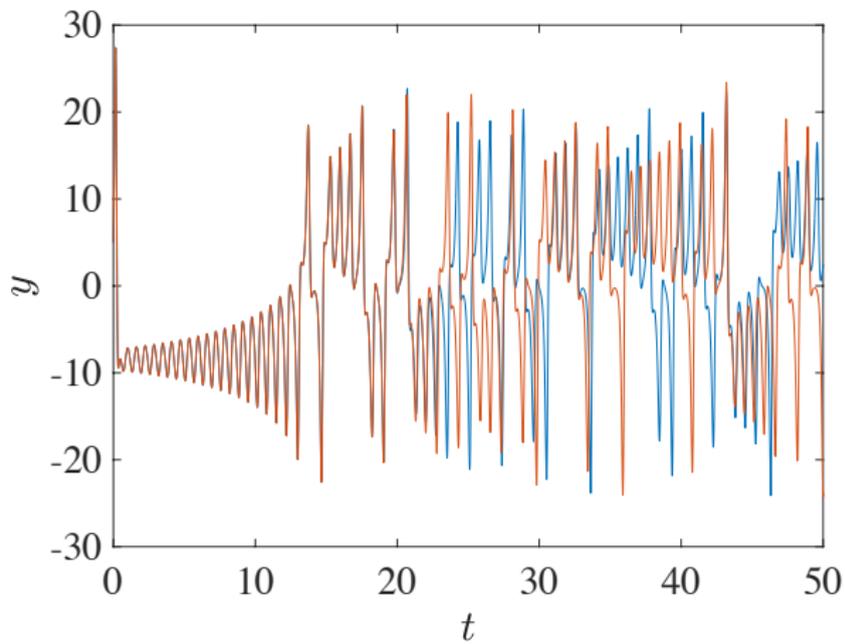
[21] Sokol – Quanta Magazine 2019



nota: simulazione con MATLAB per $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $\mathbf{u}_0 = (5, 5, 1)^T$



blu: $\mathbf{u}_0 = (5, 5, 1)^T$
rosso: $\mathbf{u}_0 = (5, 5, 1+10^{-5})^T$



blu: $u_0 = (5, 5, 1)^T$
rosso: $u_0 = (5, 5, 1+10^{-5})^T$

due contributi fondamentali

- dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali (“...a piece of very bad news” [6])
 - nota a Poincaré
 - aperiodicità \Rightarrow imprevedibilità
 - determinismo \nrightarrow prevedibilità
- farfalla: geometria “strana”

we finally conclude that there is **an infinite complex of surfaces**, each extremely close to one or the other of two merging surfaces.

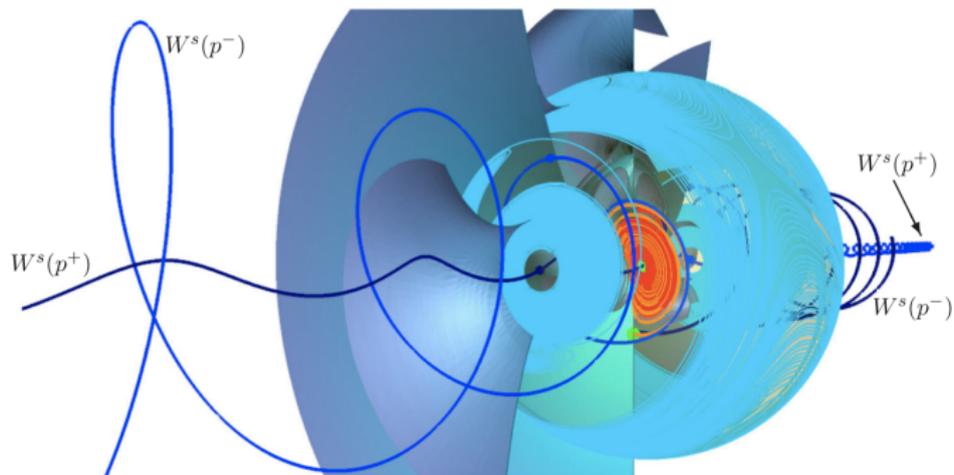
- nasce il “caos deterministico”:
 - prima di Lorenz: fenomeni complessi solo da sistemi complessi
 - dopo Lorenz: sistemi semplici possono generare fenomeni complessi
- terza rivoluzione scientifica [6]:

as to say that twentieth-century science will be remembered for just three things: **relativity, quantum mechanics, and chaos.**

[6] Gleick – Chaos: Making a New Science 1987

[17] Palmer – Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 2009

varietà di Lorenz



interdisciplinarietà

- per 10 anni [9] ha avuto solo 3 citazioni: *Journal of the Atmospheric Sciences*

cronostoria

- 1963: Lorenz usa la metafora del **battito delle ali di un gabbiano** per spiegare la dipendenza sensibile [10]
- 1969: Lorenz lavora sulla predicibilità dell'atmosfera [11, 12, 13]
- 1971: si introduce il termine **"attrattore strano"** [19]
- 1972: conferenza sulla predicibilità, Washington, DC

Subject.....Predictability; Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?

Author.....Edward N. Lorenz, Sc.D.
Professor of Meteorology

- 1975: si introducono i termini **"caos"** [8] e **"frattale"** [15]
- 1987: si introduce il termine **"effetto farfalla"** [6]

[6] Gleick – Chaos: Making a New Science 1987

[8] Li, Yorke – Am. Math. Monthly 1975

[10] Lorenz – Trans. N.Y. Acad. Sci. 1963

[11, 12, 13] Lorenz – 1969

[15] Mandelbrot – Les Objets Fractals 1975

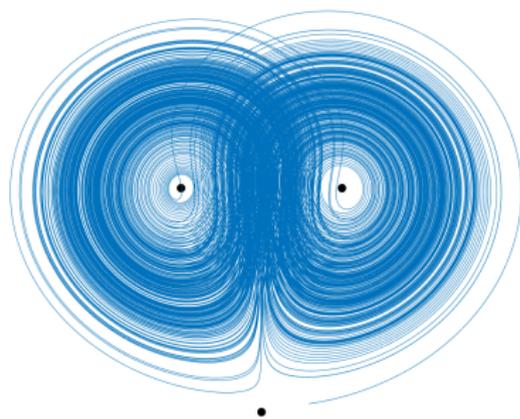
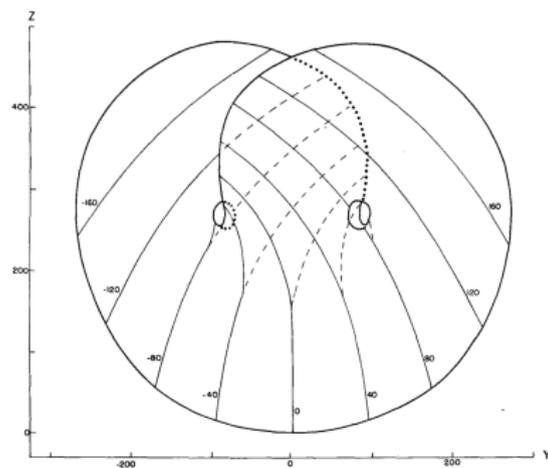
[19] Ruelle, Takens – Commun. Math. Phys. 1971

eredità di Lorenz in meteorologia

- previsioni “ensemble” :
 - singole traiettorie non predicibili, distribuzioni probabilistiche predicibili
 - usate tutt’oggi
- circolazione atmosferica dal punto di vista energetico
- MIT Lorenz Center fondato nel 2011: cambiamenti climatici

riconoscimenti

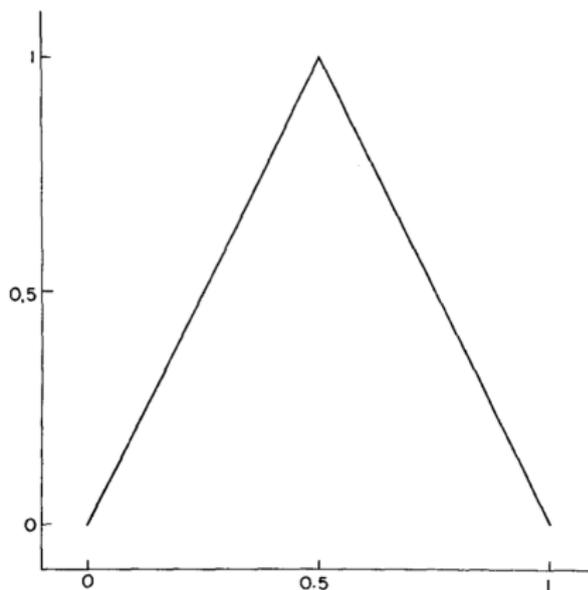
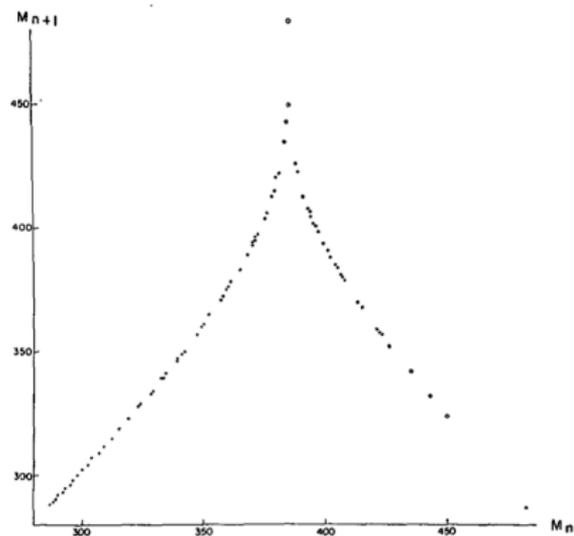
- 1983 Crafoord prize (geosciences; Royal Swedish Academy of Sciences):
 - *“...a deeper understanding of the large-scale motions of the atmosphere...”*
- 1991 Kyoto prize (earth and planetary sciences; Inamori foundation):
 - *“...brought about one of the most dramatic changes in mankind’s view of nature since Sir Isaac Newton”*



It follows that an investigator, unaware of the nature of the governing equations, could formulate an empirical prediction scheme from the “data” pictured in Figs. 2 and 4.

- $M_n = n$ -esimo massimo relativo di z

mappa tenda



$$M_{n+1} = \begin{cases} 2M_n & \text{se } M_n < \frac{1}{2} \\ 2(1 - M_n) & \text{se } M_n \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- “stretching and folding”

[9] Lorenz – J. Atmos. Sci. 1963

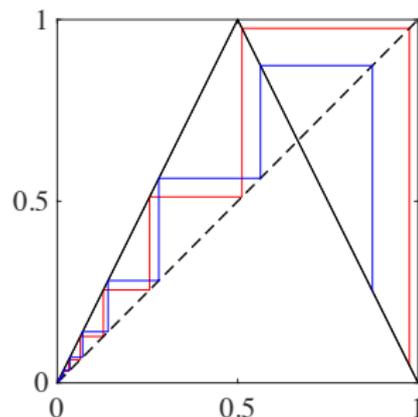
predicibilità

- se M_0 ed \tilde{M}_0 sono due valori iniziali tali che

$$|M_0 - \tilde{M}_0| = \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo allora dopo k passi

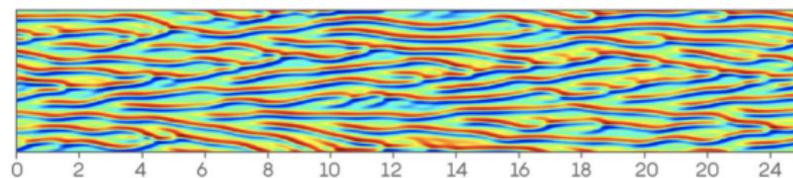
$$|M_k - \tilde{M}_k| = 2^k \varepsilon$$



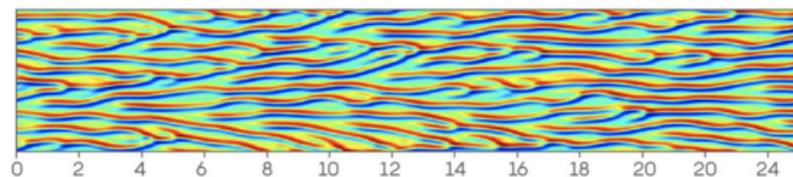
- concetto analogo in tempo continuo, dove si definisce [tempo di Lyapunov](#) quello necessario per amplificare di un fattore e la distanza tra due stati iniziali:
 - indica la [predicibilità](#) di un sistema

machine learning

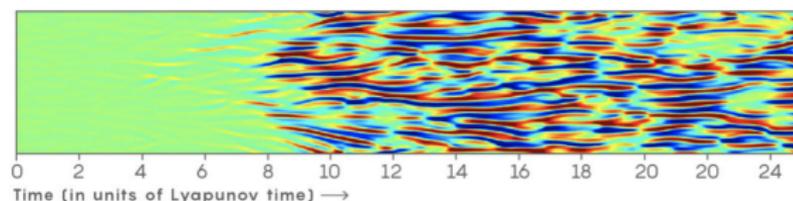
- estensione della predicibilità
- equazione di Kuramoto–Sivashinsky per la propagazione di un fronte di fiamma



modello



dati



modello – dati

(figure da [23], riprodotte da [18])

[18] Pathak, Hunt, Girvan, Lu, Ott – Phys. Rev. Lett. 2018

[23] Wolchover – Quanta Magazine 2018

ritorno: dai dati ai modelli

identificazione sparsa di dinamiche nonlineari – SINDy

- introdotta in [2] (vedi anche [1])
- vogliamo ricavare il membro destro f di

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \quad (\text{in } \mathbb{R}^n)$$

conoscendo solo m dati $\mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_m)$

- per molti sistemi f è una combinazione lineare di **poche** funzioni base \Rightarrow **sparsità**

[1] Brunton, Kutz – Cambridge University Press 2019

[2] Brunton, Proctor, Kutz – PNAS 2016

dati

- costruiamo

$$X := \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_2(t_1) & \cdots & x_n(t_1) \\ x_1(t_2) & x_2(t_2) & \cdots & x_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t_m) & x_2(t_m) & \cdots & x_n(t_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- costruiamo (eventualmente approssimando)

$$X' \approx \begin{pmatrix} x'_1(t_1) & x'_2(t_1) & \cdots & x'_n(t_1) \\ x'_1(t_2) & x'_2(t_2) & \cdots & x'_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_1(t_m) & x'_2(t_m) & \cdots & x'_n(t_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

funzioni base

- scegliamo le funzioni base, ad es.
 - polinomi fino al grado d
 - funzioni trigonometriche
 - ...
- generiamo la libreria

$$F(X) := (1, X, X^2, \dots, X^d, \sin X, \dots) \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

dove ad es., detta X_k la k -esima colonna di X ,

- $X^2 := (X_1^2, X_1 X_2, X_2^2, \dots, X_n^2)$
- $\sin X := (\sin X_1, \dots, \sin X_n)$

ottimizzazione

- per ogni $k = 1, \dots, n$ cerchiamo $C_k \in \mathbb{R}^p$ tale che

$$X'_k = F(X)C_k$$

ovvero

$$X' = F(X)C$$

per $C := (C_1, \dots, C_n)$

- otteniamo C_k risolvendo indipendentemente

$$C_k = \arg \min_{\tilde{C}_k \in \mathbb{R}^p} \|X'_k - F(X)\tilde{C}_k\|_2 + \lambda \|\tilde{C}_k\|_1$$

- si usano algoritmi di **regressione sparsa** e $\lambda \geq 0$ promuove la sparsità

test (tratto da [1])

- $m = 5000$ dati simulando numericamente ($t_i = ih$, $i = 1, \dots, m$, $h = 0.01$) il modello di Lorenz

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

con $r = 28$, $\sigma = 10$ e $b = 8/3$

- con $\lambda = 0.025$ e libreria polinomiale fino al grado 3 SINDy restituisce

F(X)	x'	y'	z'
1	0	0	0
x	-10.0000	28.0000	0
y	10.0000	-1.0000	0
z	0	0	-2.6667
xx	0	0	0
xy	0	0	1.0000
xz	0	-1.0000	0
yy	0	0	0
yz	0	0	0
zz	0	0	0
xxx	0	0	0
xyy	0	0	0
xxz	0	0	0
xyy	0	0	0
xyz	0	0	0
xzz	0	0	0
yyy	0	0	0
yyz	0	0	0
yzz	0	0	0
zzz	0	0	0

conclusioni

- relatività, quanti, caos...internet...data science/AI/learning
- modelli vs dati \Rightarrow modelli e dati
- interdisciplinarietà e interazione con applicazioni e calcolatori:
 - fruttuosa per la matematica e viceversa
 - meteorologia e caos...uomo sulla luna...spiegare l'AI



DOBBIACO SUMMER SCHOOL

Data-driven Methods for the Computational Sciences

[DOBBIACO \(BOLZANO - ITALY\), JUNE 18 - JUNE 23, 2023](#)

[Home](#)

[Registration](#)

[Participants](#)

[Programme](#)

[Aims & Contents](#)

[Previous Editions](#)

In line with the previous editions, the aim of the school is to introduce young researchers to recent developments of Numerical Analysis and Applied Mathematics.

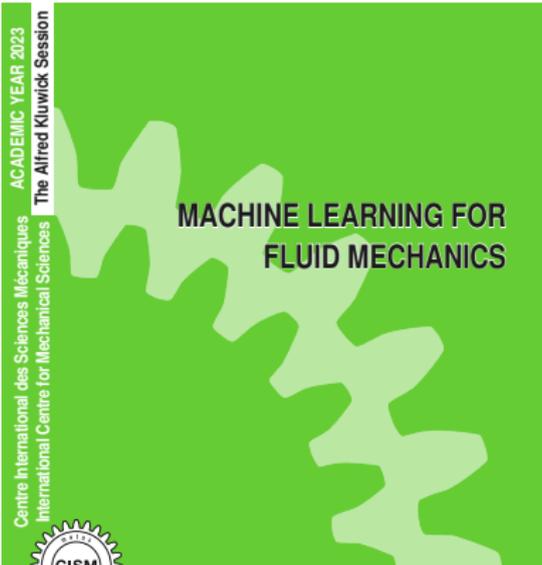
LECTURERS

Nathan Kutz

University of Washington, Seattle (Usa)

Karsten Urban

Ulm University (Germany)



Centre International des Sciences Mécaniques
International Centre for Mechanical Sciences

ACADEMIC YEAR 2023
The Alfred Klauwick Session

**MACHINE LEARNING FOR
FLUID MECHANICS**



Advanced School
coordinated by

Bernd R. Noack
Harbin Institute of Technology
Shenzhen, People's Republic of China

Steven L. Brunton
University of Washington
Seattle, USA

grazie per l'attenzione

references I

- [1] S. L. Brunton and J. N. Kutz, *Data-Driven Science and Engineering – Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*, Cambridge University Press, Cambridge, 2019.
- [2] S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz, Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems, *PNAS*, 113(15):3932–3937, 2016.
- [3] K. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Number 194 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [4] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum...*; tomus primus, 1748.
- [5] C. L. Fefferman, Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation, *Clay Mathematics Institute*, 2017.
- [6] J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Viking Books, London, 1987.
- [7] E. Kerry, Edward norton lorenz, *Biographical Memoirs of National Academy of Sciences*, pages 1–28, 2011.

references II

- [8] T.-I. Li and J. A. Yorke, Period three implies chaos, *Am. Math. Monthly*, 82(10):985–992, 1975.
- [9] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- [10] E. N. Lorenz, The predictability of hydrodynamic flow, *J. Atmos. Sci.*, 25(4):409–432, 1963.
- [11] E. N. Lorenz, Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues, *Trans. N.Y. Acad. Sci.*, 26(4):636–646, 1969.
- [12] E. N. Lorenz, The predictability of a flow which possesses many scales of motion, *Tellus*, 21(3):289–307, 1969.
- [13] E. N. Lorenz, Three approaches to atmospheric predictability, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 50(5):345–349, 1969.
- [14] T. R. Malthus, *An essay on the principle of population*, J. Johnson, London, 1798.

references III

- [15] B. Mandelbrot, *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*, Flammarion, Paris, 1975.
- [16] H. Osinga, Understanding the geometry of dynamics: the stable manifold of the lorenz system, *J. R. Soc. N. Z.*, 48(2-3):203–214, 2018.
- [17] T. N. Palmer, Edward norton lorenz, *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, 55:139–155, 2009.
- [18] J. Pathak, B. Hunt, M. Girvan, Z. Lu, and E. Ott, Model-free prediction of large spatiotemporally chaotic systems from data: A reservoir computing approach, *Phys. Rev. Lett.*, 120:024102, 2018.
- [19] D. Ruelle and F. Takens, On the nature of turbulence, *Commun. Math. Phys.*, 20:167–192, 1971.
- [20] B. Saltzman, Finite amplitude free convection an an initial value problem, *J. Atmos. Sci.*, 19:329–341, 1962.
- [21] J. Sokol, The hidden heroines of chaos, *Quanta Magazine*, 2019.

references IV

- [22] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Number 10 in *Correspondence Mathématique et Physique*. A. Quetelet, Bruxelles, 1838.
- [23] N. Wolchover, Machine learning's 'amazing' ability to predict chaos, *Quanta Magazine*, 2018.