Caccia al Tesoro Matematica

Pi Day 2024 - Università di Udine

Biennio Scuola Secondaria di Secondo Grado

OA Combinazione scacchistica

Un re si trova su una scacchiera 4x4, si trova sulla casella a1 (in basso a sinistra), può muoversi ogni volta di una casella, a destra, in alto, sulla diagonale $\nearrow$. In quanti modi possibili può raggiungere la casella d4 in alto a destra?

A) 63

B) 69

C) 42

D) 57

Soluzione: Risolviamo il problema nel modo seguente. Assegniamo ad ogni casella della scacchiera un numero, iniziando con la casella $a1$ a cui assegniamo il numero 1. Vogliamo ora che ad ogni altra casella c venga assegnato il numero dei percorsi possibili che il re può fare partendo dalla casella $a1$ e raggiungendo la casella c. Iniziamo con la casella $a2$. Siccome il re può muoversi ogni volta solo di una casella, a destra, in alto o sulla diagonale $\nearrow$, il re può arrivare in $a2$ partendo da $a1$ in un solo modo, muovendosi di un passo a destra. Similmente, il re può arrivare in $a3$ o in $a4$ in un solo modo, muovendosi sempre a destra partendo da a_1. Assegniamo quindi a queste caselle il numero 1. Lo stesso ragionamento si può fare per le caselle $b1, c1, d1$: possono essere raggiunte in un solo modo partendo dalla casella $a1$ (vedi figura). Consideriamo ora la casella $b2$: questa casella può essere raggiunta dal re, con le limitazioni che abbiamo detto, solo se proviene dalla casella $b1$ oppure dalla casella $a1$ oppure dalla casella $a2$. Poichè ognuna di queste caselle veniva raggiunta dal re in un solo modo, il re potrà raggiungere $b2$ in 3 modi. Ci accorgiamo anche che questa è una regola generale per le restanti caselle. Per assegnare il numero richiesto ad una data casella, basterà sommare i numeri già assegnati alla casella a sinistra, a quella in diagonale $\swarrow$ e a quella in basso (le caselle dalle quali il re può raggiungere la casella in esame in un passo). Assegnando i numeri alle caselle come mostrato nella figura sottostante, ci accorgiamo che il numero che viene assegnato alla casella $d4$ è il numero 63.

	1	2	3	4
d				
c				
b				
a	1			

	1	2	3	4
d	1			
c	1			
b	1			
a	1	1	1	1

	1	2	3	4
d	1			
c	1			
b	1	3		
a	1	1	1	1

	1	2	3	4
d	1			
c	1	5		
b	1	3	5	
a	1	1	1	1

	1	2	3	4
d	1			
c	1	5	13	
b	1	3	5	
a	1	1	1	1

	1	2	3	4
d	1	7		
c	1	5	13	
b	1	3	5	7
a	1	1	1	1

	1	2	3	4
d	1	7	25	
c	1	5	13	25
b	1	3	5	7
a	1	1	1	1

	1	2	3	4
d	1	7	25	63
c	1	5	13	25
b	1	3	5	7
a	1	1	1	1

OB Il campionato di basket

In una partita di basket, quattro amici hanno fatto dei canestri. Camilla ne ha fatti meno di tutti. Gli altri tre hanno segnato in tutto 20 volte. Qual è il massimo numero di canestri che può aver fatto Camilla?

A) 3

B) 4

~~C~~) 5

D) 6

Soluzione: Avendo fatto Camilla meno canestri di tutti, perché abbia segnato il più possibile vogliamo che i suoi tre amici si siano divisi i loro 20 canestri in modo da massimizzare il numero di canestri dell'amico che ne ha fatti di meno. Questo numero non può essere 7 perchè altrimenti i tre amici avrebbero fatto più di 21 canestri, ma può essere 6, nel caso i tre amici abbiano fatto 7, 7 e 6 canestri, rispettivamente. Dunque Camilla ne ha fatti al massimo 5.

OC L'ottagono

A, B, C, D sono quattro vertici consecutivi di un ottagono regolare. Quanto misura l'angolo $\widehat{ACD}$?

A) 111°

B) 111°30'

C) 112°

~~D~~) 112°30'

Soluzione: Prima di tutto, ricordiamo la formula per calcolare la misura di un angolo di un poligono regolare. Questa è

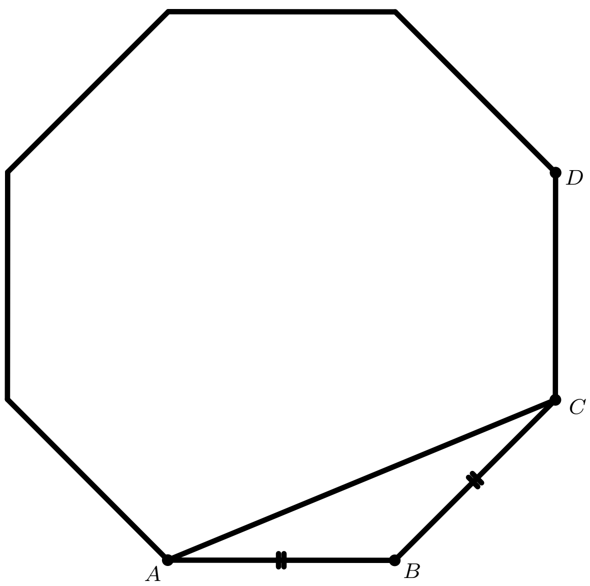
$$\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$$

dove n è il numero dei lati; questo è valido poiché possiamo vedere un poligono regolare (in questo caso un ottagono) come otto triangoli che hanno per base uno dei lati e hanno il terzo vertice in comune nel centro del poligono. Ricordando che un triangolo ha somma degli angoli interni pari a 180°, la formula segue in modo abbastanza evidente.
Per l'ottagono abbiamo dunque che gli angoli interni valgono ognuno 135°. Consideriamo ora il triangolo ABC: è isoscele di base AC poiché i lati AB e BC sono lati di uno stesso poligono regolare. Possiamo quindi calcolare la misura dell'angolo $\widehat{BCA}$ come

$$\frac{180° - 135°}{2} = 22°30'$$

e di conseguenza, l'angolo $\widehat{ACD}$ misura

$$135° - 22°30' = 112°30'.$$



1A Il tesoro perduto

Un pirata ha ritrovato quattro pergamene che danno le seguenti informazioni su dove è nascosto il tesoro di Gol D. Roger.
La prima pergamena dice: ”Il tesoro non è nascosto sull'isola Dorata”
La seconda pergamena dice: ”Il tesoro è nascosto sull'isola Argentea”.
La terza pergamena dice: ”Il tesoro è nascosto sull'isola Ramata”.
La quarta pergamena dice: ”Il tesoro è nascosto sull'isola Bronzea oppure sull'isola Dorata”.
Solo una pergamena dice la verità. Dove si trova il tesoro?

A) Isola Bronzea

B) Isola Argentea

C) Isola Ramata

~~D~~) Isola Dorata

Soluzione: Verifichiamo i singoli casi. Se fosse la prima pergamena a dire la verità, il tesoro NON si troverebbe sull'isola Dorata; la seconda e la terza pergamena mentono dunque l'unica isola su cui troveremmo il tesoro è l'isola Bronzea, ma ciò vorrebbe dire che anche la quarta pergamena sta dicendo la verità e questo è impossibile per le regole del gioco.
Se la seconda (o con lo stesso ragionamento, la terza) pergamena dice la verità, avremmo che il tesoro si trova sull'isola Argentea (o Ramata), ma dato che la prima pergamena in questo caso starebbe mentendo, il tesoro si troverebbe anche sull'isola Dorata, ma non può trovarsi in due posti contemporaneamente.
L'unico caso possibile è dunque che sia la quarta pergamena a dire la verità. Se è vero che ”Il tesoro è nascosto sull'isola Bronzea oppure sull'isola Dorata”, la prima pergamena starebbe mentendo e questo ci conferma che il tesoro si trova sull'isola Dorata.

1B Problema di interi

Vogliamo trovare il più piccolo numero intero positivo n tale che la somma delle sue cifre sia 2026. Qual è la prima cifra significativa (ovvero la cifra più a sinistra) di n?

~~A~~) 1

B) 3

C) 6

D) 9

Soluzione: Per avere il numero positivo più piccolo possibile che soddisfa la condizione bisogna:
1. usare il minor numero possibile di cifre;
2. rendere la cifra più a sinistra più piccola possibile.
Ogni cifra può valere al massimo 9, quindi il numero minimo di cifre necessarie si ottiene come quoziente della divisione con resto di 2026 per 9, mentre il resto indica l'ultima cifra che dovremo mettere a sinistra di tutte le altre. Poiché $2026 = 225 \cdot 9 + 1$, la cifra più a sinistra sarà 1.

1C Parco giochi

Apettando il suo turno alle giostre, Paola nota che ci sono esattamente 25 persone in fila e 16 di questi sono davanti a lei. Sapendo che lei è proprio davanti al suo amico Carlo, quante persone sono in fila dietro a Carlo?

A) 6

~~B~~) 7

C) 8

D) 9

Soluzione: Dato che Carlo è una posizione dietro Paola vede davanti a sé lo stesso numero di persone di Paola più Paola stessa, per un totale di 17 persone. Le persone dietro Carlo sono quindi $25 - 17 - 1 = 7$ (dove il -1 serve a togliere dal conto Carlo).

1D La cassaforte

Martina deve aprire la sua cassaforte ma si è dimenticata qual è il codice, ricorda solo che è un numero di tre cifre che soddisfa le seguenti: diviso per 3 ha resto 1, diviso per 7 ha resto 4 e diviso per 11 ha resto 6. Quale tra questi numeri deve inserire Martina per aprire la cassaforte?

A) 743

B) 188

C) 683

~~D~~) 424

Soluzione: Ricordando che un numero ha lo stesso resto nella divisione per tre della somma delle sue cifre e lo stesso resto modulo 11 della somma alternata delle sue cifre, possiamo scartare facilmente 743 (stesso resto di $7 + 4 + 3 = 14$ nella divisione per 3, quindi ha resto 2), 188 (stesso resto di $1 - 8 + 8 = 1$ quindi ha resto 1 nella divisione per 11) e 683 (stesso resto di $6 - 8 + 3 = 1$ nella divisione per 11). Rimane quindi solo 424 (si vede facilmente che verifica le proprietà richieste).

1E Giuria e televoto

Al festival dell'equazione italiana sono arrivati in finale Ghaliois e Achille Eulero. Il vincitore sarà decretato dai voti espressi dalla giuria e dal televoto, che pesano rispettivamente per il 30% e per il 70%. Achille Eulero ha ricevuto l'80% dei voti della giuria, tuttavia il vincitore è risultato Ghaliois. Che percentuale deve aver preso quest'ultimo al televoto, al minimo (arrotondando eventualmente all'unità)?

A) 80%

~~B~~) 63%

C) 62%

D) 58%

Soluzione: Con questo regolamento, la percentuale finale che un artista ottiene è:

$$z = 0,3x + 0,7y,$$

dove x è la percentuale ricevuta dalla giuria e y è la percentuale ottenuta con il televoto (esprimendo le percentuali come numero decimale). Poiché il vincitore è risultato Ghaliois, vuol dire che (indicando a pedice le iniziali degli artisti) $z_G \geq z_{AE}$, cioè

$$0,3x_G + 0,7y_G \geq 0,3x_{AE} + 0,7y_{AE}. \tag{1}$$

Ciò che sappiamo è che i voti che non sono presi da un artista sono presi dall'altro, cioè

$$\begin{array}{lcl} x_G = 1 - x_{AE} & \text{o, equivalentemente} & x_{AE} = 1 - x_G \\ y_G = 1 - y_{AE} & \text{o, equivalentemente} & y_{AE} = 1 - y_G \end{array}$$

e che Achille Eulero ha ricevuto l'80% dalla giuria, ovvero

$$x_{AE} = 0,8 \Longrightarrow x_G = 0,2$$

Quello che vogliamo trovare è il minimo valore di y_G per cui valga (1), che possiamo riscrivere come

$$0,3 \times 0,2 + 0,7y_G \geq 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times (1 - y_G)$$

Portando a sinistra tutti i termini con y_G e a destra tutti quelli senza, otteniamo

$$0,7y_G + 0,7y_G \geq 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 1 - 0,3 \times 0,2$$

e quindi, sviluppando i conti,

$$y_G \geq \frac{0,24 + 0,7 - 0,06}{1,4} = \frac{0,88}{1,4} = 0,62857...$$

Dunque Ghaliois deve avere ottenuto dal televoto almeno il $62,857...\%$ dei voti, che quindi arrotondando all'unità diventa il 63%.

Aud. Le monete di Drenchia

Drenchia è un paese abitato da 24 persone e da 16 gatti. Nella via principale sono state messe in fila un numero infinito di pile di monete, di altezze 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, ... A turno, ogni cittadino (umano) prenderà un numero crescente di monete, partendo dalla prima pila disponibile: il primo prenderà una moneta, il secondo due, fino all'ultimo che ne prenderà 24. Al termine, ogni gatto ne prende una. Quanto era alta la pila da cui l'ultimo gatto ha preso la sua moneta?

~~A~~) 1

B) 2

C) 3

D) 4

Soluzione: Le pile di monete si ripetono a blocchi di

$$1, 2, 3, 4, 3, 2$$

monete per un totale 15 monete. Il numero totale di monete prese da umani e gatti è

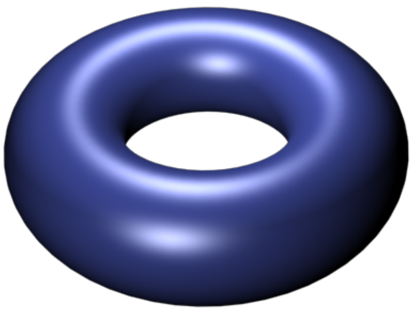
$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + 24}_{\text{umani}} + \underbrace{16}_{\text{gatti}} = \frac{24 \cdot 25}{2} + 16 = 316$$

Nella divisione con resto di 316 per le 15 monete contenute in ogni blocco, il quoziente determinerà quanti blocchi hanno "consumato" umani e gatti, mentre il resto determinerà l'altezza dell'ultima pila da cui viene presa una moneta. Poiché $316 = 21 \cdot 15 + 1$, questo significa che dopo aver preso 315 monete sono state svuotate esattamente 21 ripetizioni complete del blocco, mentre la moneta numero 316, cioè quella presa dall'ultimo gatto, viene dalla pila successiva, che è la prima del nuovo blocco; ma la prima pila del blocco ha altezza 1.

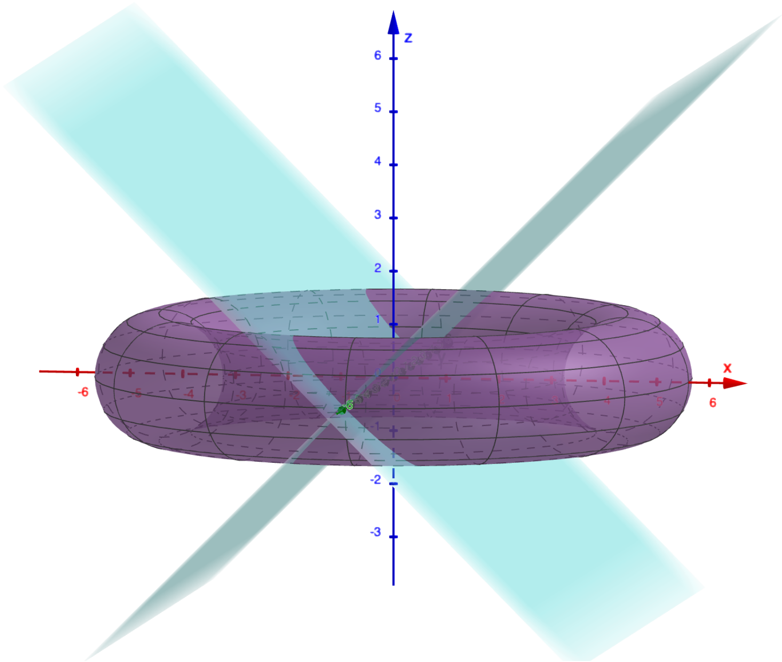
DOMANDA JOLLY

Il problema del taglio della ciambella

Con 2 tagli rettilinei, qual è il massimo numero di pezzi in cui puoi dividere una ciambella (toro)?



Soluzione: 6 parti. Nella figura sottostante si dovrebbe riuscire a capire come si ottengono le 6 parti con due piani (ma non dimostriamo formalmente che non si riesca a fare di meglio...)


z
6
5
4
3
2
1
-2
-3
x
-6
6