Piano Lauree Scientifiche "Matematica e Statistica" 2010-12

La Matematica c'è: modelli matematici e realtà

Seminario introduttivo 5 marzo 2012

R. Vermiglio[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica - Università degli Studi di Udine

.... ma a cosa serve la matematica?

La matematica è uno strumento **indipensabile** per risolvere problemi e per la conoscenza del mondo reale.

La matematica c'è

Ogni giorno usiamo inconsapevolmente la matematica:

- la fotografia digitale
- la musica digitale: CD, mp3, ipod
- film e tv digitali: alta definizione, dvd, digitale terrestre, digitale satellitare
- internet (ricerca di informazioni)
- social networks
- TAC, RNM
- modelli di epidemia
- indagini statistiche, exit poll
- modelli economici e finanziari
- ....

La matematica è una costruzione della mente dell'uomo.

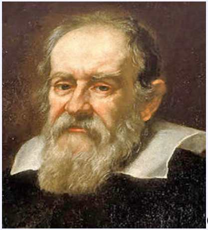
Perchè è diventata strumento privilegiato e potente per la conoscenza del mondo reale?

Perchè il linguaggio della scienza?

Dalla realtà al modello matematico

*"...La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'***universo***), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.* ***Egli è scritto in lingua matematica****, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola..."*

[Galileo, "Il saggiatore", 1623]


Galileo Galilei (1564-1642)

La matematica di Galileo è piuttosto elementare ma egli, legando lo studio della natura al linguaggio matematico, segna il passaggio da una concezione della conoscenza fondata su principi metafisico-religiosi ad una conoscenza della **realtà naturale** su base **scientifica**.

Galileo introdusse **formalmente** il metodo scientifico basato sulla sperimentazione empirica e sulla formulazione di teorie

NASCE LA SCIENZA MODERNA!

Oss: Il metodo scientifico ha un suo sviluppo storico e i suoi principi si possono ritrovare già nelle pratiche mediche degli antichi egizi.
Anche Leonardo da Vinci (1452 - 1519) aveva sottolineato l'importanza della sperimentazione empirica e della dimostrazione matematica.

Metodo scientifico

Il metodo scientifico indica i passi che la scienza deve compiere per arrivare alla conoscenza dei fenomeni della natura.

- **Osservazione**

  L'osservazione serve a inquadrare il fenomeno che si vuole studiare e a raccogliere informazioni al suo riguardo.

- **Misurazione**

  La misurazione rende le osservazioni più precise e utili alle ricerche. Vengono utilizzati strumenti e metodi esattamente riproducibili.

- **Raccolta dei dati**

  I dati delle misurazioni vengono ordinati in tabelle ed eventualmente rappresentati utilizzando dei grafici.

  Tabelle e grafici sono importanti perchè permettono un più agevole confronto con altri dati ottenuti in precedenza dallo stesso ricercatore o da altri. I dati possono anche essere messi in correlazione per evidenziare alcune informazioni.

Metodo scientifico, continua

- **Formulazione di un'ipotesi**

  Sulla base delle osservazioni e dei dati raccolti è possibile farsi un'idea del fenomeno studiato e cercare di darne una spiegazione, cioè **formulare un'ipotesi**.

- **Verifica sperimentale**

  L'esperimento costituisce la parte più importante del metodo sperimentale. Per verificare la fondatezza dell'ipotesi occorre progettarne uno.

  Se il risultato non conferma l'ipotesi, è necessario formulare un'ipotesi diversa dalla precedente, riprendendo il percorso.

  Rappresenta il punto più alto di astrazione.

Metodo scientifico, continua

- **Formulazione di una teoria**

  Sulla base dei risultati positivi della sperimentazione, si giunge a formulare una **teoria**. La teoria rimane valida fino a quando non viene messa in discussione dai risultati di altri esperimenti.

Questo percorso è chiamato metodo scientifico INDUTTIVO perchè parte dall'osservazione del fenomeno e ben si adatta alla descrizione delle **scienze della natura**.

La teoria eliocentrica

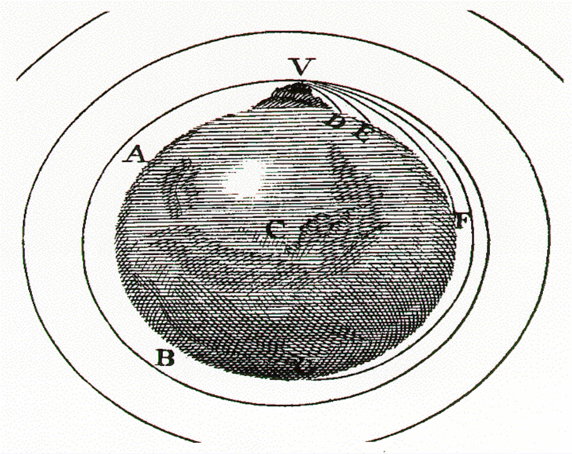
La teoria di Niccolò Copernico (1473-1543) mette il Sole al centro del sistema celeste e riprende un'idea già presente al tempo dei Greci. Con il sostegno di procedimenti matematici, egli però ne fornì una dimostrazione rigorosa, anche se con qualche imprecisione (orbite circolari).

Galileo studiò le fasi del pianeta Venere e, sulla base dei dati raccolti, diede supporto scientifico alla teoria copernicana.

Giovanni Keplero (1571-1630) giunse alla conclusione che le orbite dei pianeti sono ellissi con il sole in uno dei due fuochi, sulla base anche dei dati sul moto dei pianeti raccolti dall'astronomo danese Tycho Brahe. Egli formulò tre leggi sul moto dei pianeti.

Fu Isaac Newton (1643-1727) a dare la dimostrazione matematica delle leggi di Keplero e a fromulare le leggi della gravitazione universale.

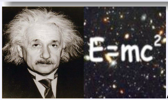
La montagna di Newton



Il metodo scientifico deduttivo

"Nessuna quantità di esperimenti potrà dimostrare che ho ragione; un unico esperimento potrà dimostrare che ho sbagliato"

[Einstein, lettera a Max Born, 1926]



Albert Einstein (1879-1955) elaborò la teoria della relatività partendo da **ragionamenti matematici** e non da dati sperimentali. Secondo la sua osservazione ogni teoria scientifica rimane sempre allo stato di **congettura**.

Diversi pensatori tra cui Bertrand Russel (1872-1970), Karl Popper (1902-1994) criticarono il metodo induttivo basato sulla **verificabilità** e proposero il metodo DEDUTTIVO fondato sul concetto di **falsificabiltà**.

Il metodo scientifico deduttivo

I passi del metodo deduttivo sono

- **Formulazione di un'ipotesi**
- **Deduzione dall'ipotesi iniziale di alcuni eventi o conseguenze**
- **Osservazione se l'evento si produce**
- **Se l'evento si produce la teoria non è stata smentita e possiamo accettarla, ma solo provvisoriamente**

Se un'ipotesi resiste ai tentativi di confutarla per via deduttiva, possiamo ritenerla più valida di un'altra che non ha retto alla verifica.

La sperimentazione non potrà rilevare se una teoria è vera, può solo dire se è falsa.

La matematica è il linguaggio della scienza

La questione è profonda ed ancora dibattuta. Ci limitiamo a proporre alcune considerazioni.

Quando si parla di misurazioni e quindi di numeri è naturale guardare alla matematica, che sa manipolare e trovare correlazioni tra i numeri, sa proporre delle leggi che ne descrivano l'andamento.

Ma c'è di più.

Nel celebre articolo "L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze della natura" (1959) Eugene P. Wigner così riflette:

> *" Il miracolo dell'adeguatezza del linguaggio matematico per la formulazione della fisica rappresenta uno splendido dono che non ci siamo meritati e che non siamo in grado di comprendere. Dovremmo [...] sperare che ciò rimanga valido anche per il futuro, e che si estenda a sempre nuovi campi del sapere"*

Il ruolo che la matematica ha svolto e svolge nella fisica non è comparabile con quello nelle altre discipline delle scienze della natura. La fisica e la matematica si sono sviluppate assieme ed i metodi matematici sono intervenuti fin dal principio come strumenti costitutivi della disciplina.

Nonostante il legame tra matematica e fisica risulti privilegiato e più naturale, molte delle leggi della natura possono essere espresse in forma matematica e la matematica stessa si rivela incredibilmente efficace nella comprensione dei fenomeni che descrive e nella risoluzione di problemi.

Dalla varietà confusa dei diversi fenomeni, essa ne cerca la **struttura**, costruisce un **oggetto ideale=modello**, le cui leggi di funzionamento possono fornire una spiegazione della realtà e predire altri eventi.

La matematica ci offre un linguaggio per interrogare la natura e la chiave per interpretarne le risposte

[E. Boncinelli, U. Bottazzini "La serva padrona", 2000]

La caratteristica distintiva della matematica rispetto alle altre scienze empiriche è la **certezza** dei suoi risultati. È l'arte del ragionamento deduttivo.

Permette di stabilire delle correlazioni tra i diversi parametri che descrivono un fenomeno reale. La sua forza sta nella

- capacità di astrazione
- capacità di sintesi
- potere predittivo: conseguenza di proprietà generali espresse in forma di teoremi

I metodi della matematica sono stati estesi anche allo studio delle discipline delle scienze sociali, dove possono fornire un contributo alla comprensione di alcune dinamiche.

Scienze della natura

Le scienze della natura si occupano dello studio degli aspetti fisici della Terra e dell'Universo e delle forme di vita che si sono prodotte sul pianeta Terra, uomo incluso.

Ecco alcuni esempi di scienze della natura e dei loro campi di indagine.

- **Fisica**: scienza del mondo inanimato 

  Studia le forze, l'energia, il suono, la luce, l'elettricità, gli atomi, la struttura della materia inanimata.

- **Chimica**: scienza delle trasformazioni delle sostanze 

  Studia i vari modi in cui le sostanze si combinano per dar origine a nuove sostanze.

Scienze della natura, continua

- **Biologia**: scienza della vita 

  Studia le caratteristiche di tutti gli esseri viventi: piante, animali, funghi, microrganismi.

- **Astronomia**: scienza degli astri 

  Studia tutti i corpi celesti: stelle, pianeti, satelliti, comete, galassie. Cerca di spiegare l'origine e l'evoluzione dell'universo.

- **Geologia**: scienza della terra 

  Studia la struttura e le trasformazioni nel nostro pianeta: le rocce, le acque, latmosfera, i vulcani, i terremoti, linterno della terra.

Scienze sociali o scienze umane

Le scienze sociali si occupano della comprensione dei comportamenti dell'uomo quali le relazioni interpersonali, la costruzione di legami affettivi, la produzione di codici culturali e nella formazione di usi, costumi e tradizioni.

Ecco alcuni esempi di scienze sociali e dei loro campi di indagine.

- **Demografia**: scienza dei popoli 

  Studia quantitativamente i fenomeni che concernono lo stato e il movimento della popolazione.

- **Sociologia** 

  Studia le strutture sociali, le norme ed i processi che uniscono (e separano) le persone, non solo come individui, ma come componenti di associazioni, gruppi ed istituzioni.

Scienze sociali, continua

- **Economia** 

  Studia sia l'utilizzo delle risorse necessarie a soddisfare al meglio i bisogni individuali e collettivi contenendo la spesa, sia il sistema di organizzazione delle attività di tale natura poste in essere da un insieme di persone, organizzazioni e istituzioni (sistema economico).

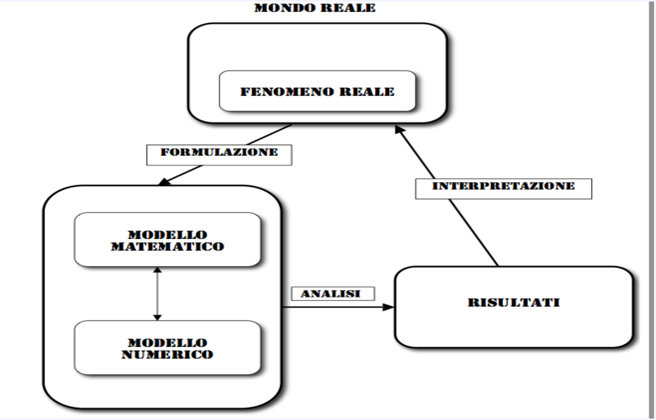
- **Scienze politiche**

  Studia i meccanismi della vita politica della società.

- **Scienza della politica** o **Politologia**

  Studia "*...i diversi aspetti della realtà politica al fine di spiegarla il più compiutamente possibile adottando la metodologia propria delle scienze empiriche*" [Norberto Bobbio]

Mondo reale, modello matematico e modello numerico



Mondo reale = mondo delle scienze della natura e delle scienze sociali.
Fenomeno reale = un aspetto del mondo reale che vogliamo descrivere ed analizzare.

I passi fondamentali del processo di modelizzazione sono:

- **formulazione del modello matematico**

  rappresentazione semplificata di un aspetto della realtà in linguaggio matematico

- **analisi del modello matematico**

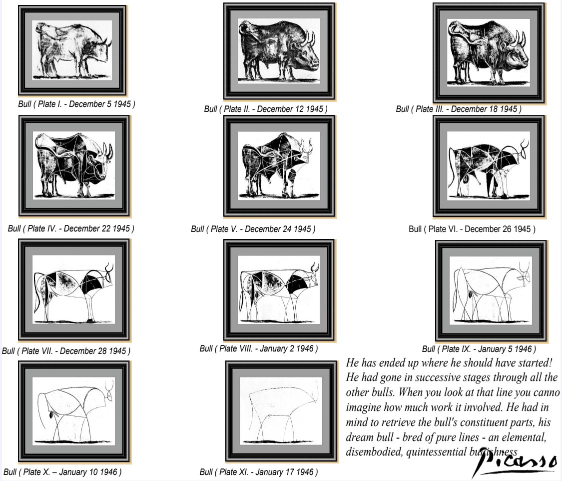
  studio delle proprietà del modello, quali esistenza di soluzioni, loro comportamento e proprietà con gli strumenti dell'analisi matematica e dell'analisi numerica.

  Lo sviluppo di un **modello numerico** per la risoluzione mediante il computer del modello matematico è estremamente importante per trattare problemi difficili.

- **interpretazione**

  i risultati ottenuti anche dalle **simulazioni numeriche** devono essere interpretati nel contesto del problema originario.

Formulazione di un modello matematico: cogliere l'essenza



Come si può procedere dalla descrizione verbale di un fenomeno alla sua descrizione in linguaggio matematico? Come semplificare la complessità del fenomeno studiato?

Il primo passo consiste nell'identificare una o più VARIABILI che descrivono lo STATO del fenomeno.

Le VARIABILI DI STATO devono descrivere, se non in maniera completa, gli aspetti **fondamentali** del fenomeno che stiamo osservando o gli aspetti che abbiamo deciso di analizzare.

Poichè vogliamo descrivere la **dinamica** del fenomeno, ovvero la sua evoluzione, la/le variabili di stato saranno FUNZIONI della variabile tempo t, che qui consideriamo **continuo**.

Variabili di stato, continua

Chimica

Nello studio delle reazioni chimiche, le variabili di stato saranno le funzioni che descrivono le concentrazione dei reagenti e dei prodotti al tempo t.

Fisica

Se vogliamo studiare il moto di un corpo nel tempo, le variabili di stato saranno la funzione $s(t)$ che descrive lo spostamento al tempo t e la funzione $v(t)$ che descrive la velocità al tempo t.

Dinamica di popolazioni

Se vogliamo descrivere la crescita nel tempo di una popolazione di animali o uomini, la variabile di stato sarà data dalla funzione $u(t)$ che fornisce la numerosità della popolazione all'istante t.

Nella formulazione del modello si usano delle IPOTESI per SEMPLIFICARE la complessità del fenomeno, ma cogliendone l'essenza. Tali ipotesi semplificatrici definiscono l'ATTENDIBILITÀ del modello.

Fisica

In fisica un **punto materiale** è un corpo di dimensioni trascurabili rispetto al fenomeno in studio e contemporaneamente dotato di massa.

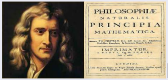
Un pianeta può essere considerato un punto materiale quando si studia il moto dei pianeti, dei satelliti e delle comete (meccanica celeste).
Un atomo può essere considerato un punto materiale quando si studia il moto delle particelle (meccanica statistica).

Dinamica di popolazioni

La popolazione ha risorse illimitate di cibo e l'ambiente non oppone nessun ostacolo alla crescita.

Per descrivere in termini generali la variazione nel tempo del fenomeno, dobbiamo enunciare una LEGGE di evoluzione.

Fisica



Isaac Newton (1643-1727)

L'accelerazione di un corpo è determinata dalla forza che agisce su di esso. L'accelerazione ha la stessa direzione e lo stesso verso della forza, il suo modulo è proporzionale alla forza e inversamente proporzionale alla massa m del corpo.

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1}$$

Dinamica di popolazioni

Ogni popolazione di esseri viventi o animali cresce proporzionalmente al suo numero.

La legge di evoluzione esprime in linguaggio matematico il cambiamento nel tempo delle variabili di stato che descrivono il fenomeno.

Poichè le variabili di stato sono funzioni del tempo, la variazione nel tempo sarà espressa attraverso le loro derivate.

Le EQUAZIONI DIFFERENZIALI sono delle relazioni tra le funzioni incognite e le loro derivate.

I sistemi di equazioni differenziali rappresentano uno degli strumenti matematici più importanti nella descrizione della dinamica di fenomeni reali.

Seguiremo il percorso dal fenomeno reale al modello matematico:

- i casi di studio saranno suggeriti dalla **chimica**, dalla **fisica** e dalla **dinamica di popolazioni**,
- le **equazioni differenziali** ci forniranno il modello matematico,
- il **metodo di Eulero** e alcuni algoritmi del MATLAB ci forniranno il modello numerico per poter simulare la dinamica con il calcolatore.

Nell'attività di laboratorio, interpretando i risultati delle **simulazioni numeriche**, analizzeremo il modello e forniremo una descrizione della sua dinamica.

Chimica

Decadimento radioattivo

Il decadimento radioattivo è la transizione di alcuni nuclei atomici instabili verso uno stato avente energia minore, attraverso l'emissione di una o più particelle. L'atomo radioattivo si trasforma quindi in un altro atomo, che può essere a sua volta radioattivo oppure stabile.

Il momento di decadimento è casuale, ma si è osservato che il numero di decadimenti di un dato isotopo rispetta una precisa legge statistica ed è **proporzionale al numero di atomi presenti**.

Vogliamo descrivere la legge che regola il decadimento radioattivo usando il "linguaggio matematico" ovvero vogliamo scrivere il **modello matematico** di tale fenomeno reale

Decadimento radioattivo: costruiamo il modello matematico

Indichiamo con

- $N(t)$ il numero di atomi presenti al tempo t (**variabile di stato**)
- $\lambda > 0$ la costante di decadimento dell'isotopo, che descrive la probabilità che un atomo decada in un secondo

Il numero di atomi decaduti in un intervallo di tempo Δt risulta

$$\lambda \Delta t N(t)$$

e quindi

$$N(t + \Delta t) = N(t) - \lambda \Delta t N(t),$$

da cui si ottiene

$$N(t + \Delta t) - N(t) = -\lambda \Delta t N(t) \tag{2}$$

Decadimento radioattivo, continua

Dividendo (**??**) per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t),$$

si ottiene l'equazione differenziale ordinaria che rappresenta il (**modello matematico**) per il decadimento radioattivo

Modello decadimento radioattivo

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Decadimento radioattivo: troviamo la soluzione

Dato il numero N_0 di atomi presenti nel campione all'istante iniziale $t = 0$, vogliamo risolvere

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t), & t > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Dividiamo l'equazione differenziale per $N(t) \neq 0$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

ed integriamo tra 0 e t

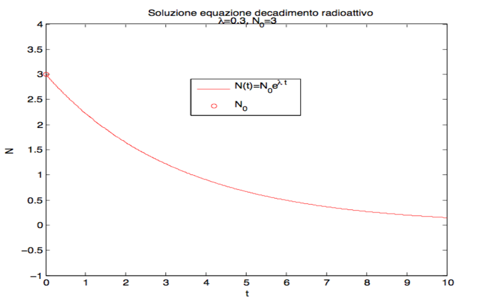
$$\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)} ds = -\int_0^t \lambda ds$$

$$\log(N(t)) - \log(N_0) = -\lambda t$$

Decadimento radioattivo: la soluzione

Soluzione

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad t > 0$$



- Calcolo del tempo di dimezzamento: $T = \frac{\log(2)}{\lambda}$
- Datazione di reperti di origine organica con il metodo del ${}^{14}C$:

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \log \frac{N_0}{N(t)}$$

Fu proposto dal chimico statunitense Willard Frank Libby, che vinse il premio Nobel nel 1960.

Willard Frank Libby (1908-1980)

Presentazione Elisa Ellero PLS 2010-2011

Reazioni chimiche

Consideriamo le seguenti reazioni chimiche

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow^{k_1} & B \\ B + B & \longrightarrow^{k_2} & C + B \\ B + C & \longrightarrow^{k_3} & A + C \end{array}$$

dove A, B, C sono tre reagenti e $k_1 = 0.04, k_2 = 3 \cdot 10^7, k_3 = 10^4$ sono dei parametri noti sperimentalmente che misurano la velocità delle reazioni.

Reazioni chimiche: il modello matematico

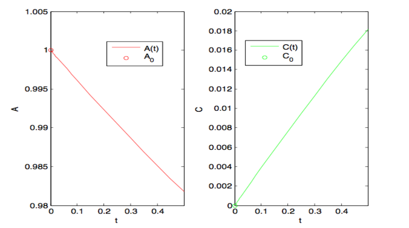
Indicando con $A(t), B(t), C(t)$ le concentrazioni dei reagenti A, B, C al tempo t (**variabili di stato**), le reazioni chimiche sono descritte dal sistema di equazioni differenziali (**modello matematico** di H.H. Robertson)

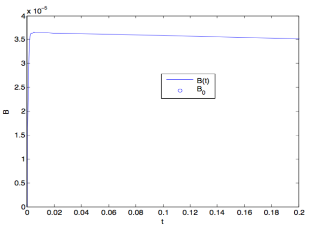
$$\begin{cases} A'(t) = -k_1 A(t) + k_3 B(t) C(t) \\ B'(t) = k_1 A(t) - k_2 B(t)^2 - k_3 B(t) C(t) \\ C'(t) = k_2 B(t)^2 \end{cases}$$

Assegnate le concentrazioni A_0, B_0, C_0 all'istante iniziale $t = 0$, vogliamo trovare le soluzioni $A(t), B(t), C(t)$ del sistema.

Per risolverlo abbiamo bisogno di un metodo numerico e del calcolatore (**modello numerico**).

Reazioni chimiche: le soluzioni numeriche





Soluzioni numeriche del modello di Robertson con $A(0) = 1$, $B(0) = C(0) = 0$ (codice ode15s di Matlab)

Fisica

Moto dei corpi

Supponiamo che un punto materiale di massa m si muova lungo una retta e che una forza di intensità F venga applicata ad esso nella stessa direzione. Le **variabili di stato** al tempo t sono

- $s(t)$ la posizione del punto sulla retta rispetto ad un punto fissato,
- $v(t)$ la sua velocità.

Dalla seconda legge di Newton $F = ma = mv'(t)$, abbiamo che il moto è descritto dal sistema di equazioni di equazioni differenziali ordinarie (**modello matematico**)

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ v'(t) = \frac{1}{m} F(t, s(t), v(t)) \end{cases}$$

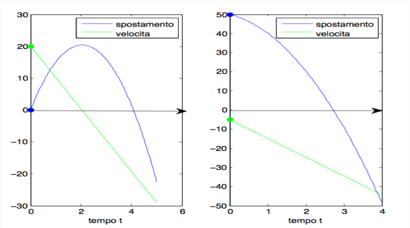
Se la forza F **non** dipende dal tempo, le equazioni si dicono **autonome**, altrimenti **non autonome**.

Forza di gravità

Consideriamo il moto di un punto materiale nelle vicinanze della superficie terrestre, soggetto alla forza di gravità $\vec{F} = mg\vec{z}$, con $g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$ accelerazione di gravità e $\vec{z}$ versore lungo la verticale. Le soluzioni del sistema di equazioni differenziali risultano

$$\begin{cases} s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \\ v(t) = -gt + v_0 \end{cases}, \quad t \geq 0$$

con s_0, v_0 costanti da determinare assegnando la posizione e la velocità iniziali $s(0) = s_0, v(0) = v_0$.



Vibrazioni

Supponiamo ora che il punto materiale di massa m sia soggetto ad una forza di richiamo elastica, proporzionale allo spostamento, e ad una resistenza viscosa, proporzionale alla velocità. Indicando con

- $s(t)$ lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio,
- $v(t)$ la velocità,

dalla legge di Newton otteniamo le equazioni autonome

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{k}{m}s(t) - \frac{\ell}{m}v(t) \end{cases}$$

dove $k > 0$ e $\ell > 0$ sono rispettivamente la **costante elastica** e la **costante di smorzamento**.

Vogliamo analizzare il comportamento qualitativo delle soluzioni al variare dello stato iniziale, $s(0) = s_0$, $v(0) = v_0$ e dei parametri ℓ, k.

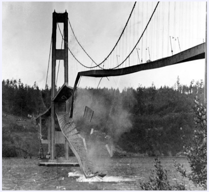
Come cambia il moto in presenza o meno di resistenza? E se si introduce una forza esterna che varia nel tempo?

Troveremo le risposte nell'attività di laboratorio attraverso delle **simulazioni numeriche**.

Vibrazioni: la marcia dei soldati e il Tacoma Bridge

Nel 1831 una compagnia di soldati stava attraversando un ponte sospeso marciando. Il ponte è crollato.

Nel 1940 sulla costa occidentale degli Stati Uniti, il Ponte di Tacoma, dopo aver oscillato per più di tre ore, è crollato.



In entrambi i casi, il crollo è stato causato dalla **risonanza**. Lo studio dei modelli matematici che descrivono tale fenomeno ha permesso di capirlo e trovare una soluzione.

I soldati devono attraversare i ponti a passo sciolto!!

Modelli di crescita

Modello di Malthus

Malthus era uno studioso inglese di economia politica e demografia.


Thomas Robert Malthus (1766 -1834)

Egli propose un semplice modello per lo studio della dinamica di una popolazione in un ambiente con risorse illimitate.

Indicata con $u(t)$ la popolazione all'istante t, supponendo che le nascite e le morti siano proporzionali alla popolazione, otteniamo l'equazione differenziale

$$u'(t) = nu(t) - mu(t) = ru(t), \quad t \geq 0$$

dove n è il tasso di natalità, m è il tasso di mortalità (nell'unità di tempo nascono n individui e ne muoiono m) e $r = n - m$ è tasso di **riproduzione** della popolazione studiata.

Adattibilità del modello

Abbiamo già incontrato questo modello matematico !!

Uno stesso modello matematico può essere proposto per descrivere fenomeni in diversi contesti applicativi, cambiando significato alle variabili di stato e ai suoi parametri. Questo aspetto è molto importante viene definito come

ADATTABILITÀ del modello

Modello di Malthus, continua

La generica soluzione risulta

$$u(t) = ce^{rt}, \quad t \geq 0,$$

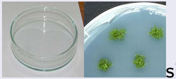
con c costante. Assegnando un valore iniziale $u(0) = u_0$, si ottiene $c = u_0$ e la soluzione risulta univocamente determinata.

Se $r < 0$ la popolazione continua a decrescere ed è destinata all'estinzione in un tempo infinito, mentre se $r > 0$ la popolazione continua a crescere.

Questo semplice modello può essere appropriato in una fase iniziale di sviluppo, quando la popolazione non ha vincoli di spazio e risorse.

Esempio

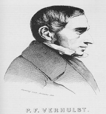
Una popolazione di batteri in disco di Petri piuttosto grande



sinistra: disco di Petri; destra: Physcomitrella

Modello di Verhulst

Dopo aver letto del modello di crescita di una popolazione di Malthus,



Pierre F. Verhulst (1804-1849)

il matematico Verhulst ne propose nel 1838 un miglioramento per descrivere le auto-limitazioni alla crescita dovute a risorse limitate (competizione interna alla popolazione)

$$u'(t) = ru(t)(1 - \frac{u(t)}{k}) = ru(t) - \mathbf{c}u(t)^2, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

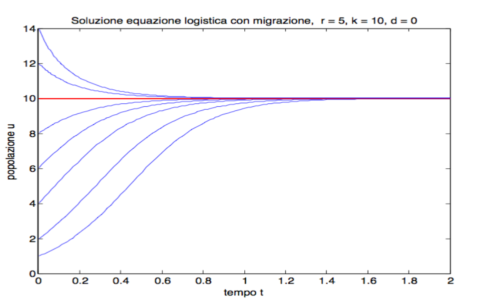
dove $r > 0$ rappresenta il tasso di crescita e $k > 0$ la capacità. Il parametro $\mathbf{c} = \frac{r}{k} > 0$ descrive la competizione interna.

L'equazione viene chiamata anche **equazione logistica**.

Assegnato un valore iniziale $u(0) = u_0 > 0$, la soluzione risulta

$$u(t) = \frac{k u_0 e^{rt}}{k - u_0(e^{rt} - 1)} = \frac{k}{1 + k_0 e^{-rt}}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

dove $k_0 = \frac{k - u_0}{u_0}$. Tale funzione si chiama **funzione sigmoidea**.



Soluzioni equazione logistica $r = 5$, $k = 10$.

Si osserva che

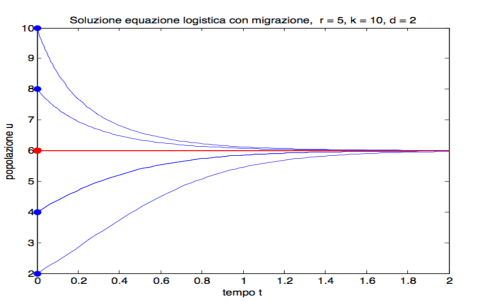
- ci sono due soluzioni costanti $u_1 = 0$ e $u_2 = k$.

  Tali soluzioni si chiamano **soluzioni stazionarie** o **equilibri**.
- per valori iniziali u_0 tali che $0 < u_0 < k$, $u(t)$ cresce con t e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = k$;
- per valori iniziali u_0 tali che $u_0 > k$, $u(t)$ decresce con t e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = k$;

Equazione logistica con migrazione

Volendo tener conto di una migrazione di una frazione $d > 0$ della popolazione per unità di tempo, si ottiene il modello

$$u'(t) = r u(t)\left(1 - \frac{u(t)}{k}\right) - d u, \quad t \geq 0. \tag{5}$$



Soluzioni equazione logistica con migrazione $r = 5$, $k = 10$, $d = 2$.

Equazione logistica con migrazione, continua

Se $0 < d < r$, si osserva che

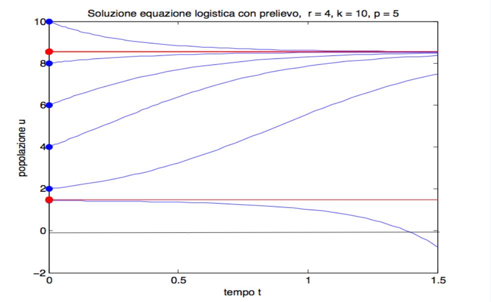
- ci sono due equilibri $u_1 = 0$ e $u_2 = k(1 - \frac{d}{r})$;
- per valori iniziali u_0 tali che $0 < u_0 < u_2$, $u(t)$ cresce con t e $\lim_{t \to +\infty} u(t) = u_2$;
- per valori iniziali u_0 tali che $u_0 > u_2$, $u(t)$ decresce con t e $\lim_{t \to +\infty} u(t) = u_2$.

La presenza della migrazione non ha modificato il comportamento qualitativo delle soluzioni, ma ha abbassato il valore dell'equilibrio non nullo, che è positivo solo se $0 < d < r$.

Equazione logistica con prelievo

Volendo tener conto di una riduzione dovuta a un prelievo p costante nel tempo (es. pesca o caccia), si ottiene il modello

$$u'(t) = r\,u(t)\left(1 - \frac{u(t)}{k}\right) - \mathbf{p}, \quad t \geq 0. \tag{6}$$



Soluzioni equazione logistica con prelievo $r = 4$, $k = 10$, $\mathbf{p} = 5$.

Equazione logistica con prelievo, continua

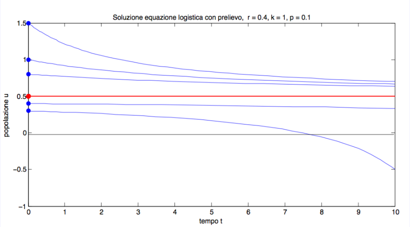
Nel caso $4\mathbf{p} < rk$, si osserva che

- ci sono due equilibri $0 < u_1 < u_2 < k$
- per valori iniziali inferiori al valore critico u_1, la popolazione si può estinguere in tempo finito;
- per valori iniziali u_0 tali che $u_1 < u_0 < u_2$, la popolazione $u(t)$ cresce con t e $\lim_{t \to +\infty} u(t) = u_2$;
- per valori iniziali u_0 tali che $u_0 > u_2$, la popolazione $u(t)$ decresce con t e $\lim_{t \to +\infty} u(t) = u_2$;

Equazione logistica con prelievo, continua

Se $4\mathbf{p} = rk$, si osserva che

- c'è un unico equilibrio, i.e. $u_1 = u_2 = \frac{k}{2}$;
- per valori iniziali inferiori al valore critico $\frac{k}{2}$, la popolazione si estingue in tempo finito;
- per valori iniziali $u_0 > \frac{k}{2}$, la popolazione $u(t)$ decresce con t e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \frac{k}{2}$;

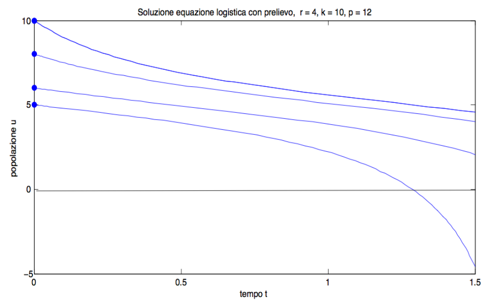


Soluzioni equazione logistica con prelievo $r = 0.4$, $k = 1$, $\mathbf{p} = 0.1$.

Equazione logistica con prelievo, continua

Se $4\mathbf{p} > rk$, si osserva che

- non ci sono equilibri;
- per ogni valore iniziale $u_0 > 0$, la popolazione si estingue in tempo finito.

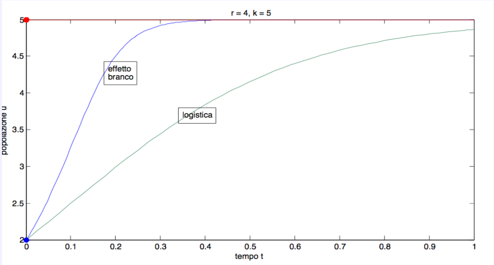


Soluzioni equazione logistica con prelievo costante $r = 4$, $k = 10$, $\mathbf{p} = 5$.

Effetto branco

Per descrivere una crescita che risulta difficile quando gli individui sono pochi, è più rapida quando gli individui aumentano (**effetto branco**) e rallenta quando si supera una soglia, si può considerare il modello

$$u'(t) = r u^2(t)(1 - \frac{u(t)}{k}) \quad t \geq 0.$$



Soluzioni equazione logistica e con effetto branco $r = 4$, $k = 5$.

Modelli di competizione

Modello predatore-preda

Una popolazione non vive in isolamento e può incontrare degli antagonisti.

I modelli **predatore-preda** furono proposti ed analizzati dal matematico italiano Vito Volterra (1860- 1940) e dallo statistico americano Alfred Lotka (1880-1949) per descrivere l'**interazione** tra due popolazioni. Sono anche chiamati modelli di **Lotka-Volterra**.


Volterra


Lotka

Modello predatore-preda, continua

Indicati con $u_1(t)$ e $u_2(t)$ rispettivamente le prede e i predatori all'istante t, il più semplice modello per descrivere l'**interazione** tra le due specie o **competizione esterna** è

$$\begin{cases} u_1'(t) = r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) \\ u_2'(t) = r_2 u_2(t) - c_{21} u_1(t) u_2(t), \end{cases} \tag{7}$$

dove

- r_1 è il fattore di crescita della preda in assenza del predatore,
- r_2 è il fattore di crescita della predatore in assenza del preda,
- c_{12} descrive l'effetto sulla preda della cattura da parte del predatore,
- c_{21} descrive l'effetto della cattura della preda sul predatore.

Modello predatore-preda, continua

Se $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$ assumiamo che la preda in assenza del predatore trovi il suo sostentamento e possa svilupparsi e che il predatore in assenza della preda sia destinato all'estinzione.

Inoltre l'effetto dell'interazione predatore-preda porterà ad una decrescita della preda con $c_{12} > 0$, mentre $c_{21} < 0$ descrive il beneficio del predatore che deve la sua soppravvivenza alla presenza della preda.

Volendo tener conto anche di un prelievo costante, si ottiene il modello

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1'(t) & = r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) - d u_1(t) \\ u_2'(t) & = r_2 u_2(t) - c_{21} u_1(t) u_2(t) - d u_2(t), \end{array} \right. \tag{8}$$

con $d > 0$.

Modello predatore-preda, continua

Negli anni Venti, il matematico Vito Volterra propone i modelli (**??**) e (**??**) per risolvere un problema "pratico" che il genero Umberto D'Ancona, biologo all'Università di Siena, gli aveva sottoposto.

Le statistiche relative alla pesca nell'Adriatico settentrionale indicavano che, durante il periodo 1905-1923, la percentuale dei pesci grandi (= predatori) nel pesce pescato era aumentata negli anni della guerra e in quelli immediatamente successivi, dove c'era stata una riduzione dell'attività di pesca (=prelievo).

Perchè l'incremento riguardava solo i predatori e non le prede?

Analizzando i modelli, Volterra riuscì a spiegare in maniera esauriente questo fatto empirico.

Modello predatore-preda, continua

Volendo introdurre anche gli effetti della competizione all'interno dei due gruppi prede e predatori a causa di limitate risorse, si ottiene il modello di predatore-preda con **competizione interna**

$$\left\{\begin{aligned} u_1'(t) &= r_1 u_1(t)\left(1-\frac{u_1(t)}{k_1}\right) - c_{12} u_1(t) u_2(t) \\ &= r_1 u_1(t) - c_{11} u_1^2(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) \\ \\ u_2'(t) &= r_2 u_2(t)\left(1-\frac{u_2(t)}{k_2}\right) - c_{21} u_1(t) u_2(t), \\ &= r_2 u_2(t) - c_{21} u_1(t) u_2(t) - c_{22} u_2^2(t) \end{aligned}\right. \tag{9}$$

con k_1, k_2 costanti positive che descrivono la capacità limitata delle risorse per prede e predatori. La competizione all'interno del gruppo può essere descritta anche con i parametri $c_{ii} = \frac{r_i}{k_i}, i = 1, 2$.

Se $c_{12} k_1 / r_1 = c_{21} k_2 / r_2$ l'interazione tra i due gruppi sarà simmetrica, mentre la scelta $c_{12} k_1 / r_1 \neq c_{21} k_2 / r_2$ favorirà un gruppo rispetto all'altro.

Modello predatore-preda, continua

La "fortuna" dei modelli predatore-preda nasce dal fatto che si **adattano** bene alla descrizione di dinamiche di competizione tra popolazioni in diversi contesti applicativi - in agricoltura l'uso dei pesticidi, in politica le tensioni fra classi sociali, in ecologia i rapporti tra risorse e consumatori, etc ...

Adattabilità del modello

Modelli di epidemia

Modello di epidemia di Kermack-McKendrick

Consideriamo una popolazione isolata e vogliamo studiare la propagazione in essa di una malattia infettiva. Presentiamo il modello base proposto nel 1927 dai biomatematici Kermack e McKendrick. Nonostante la sua semplicità si è rivelato utile per descrivere la diffusione di epidemie (peste di Bombay nel 1905).

Suddividiamo la popolazione in

- **suscettibili** $S(t)$ individui che possono contrarre la malattia,
- **infetti** $I(t)$ individui cha hanno la malattia in pieno sviluppo o incubazione non isolati,
- **rimossi** $R(t)$ individui in isolamento, morti o immunizzati.

Il passaggio da una classe all'altra descrive l'evolversi della malattia: il passaggio dalla classe dei suscettibili agli infetti descrive lo sviluppo della malattia, mentre il passaggio dalla classe degli infetti ai rimossi descrive la guarigione ma anche la letalità della malattia. Si suppone che chi ha contratto la malattia non possa ritornare suscettibile.

Modello di epidemia di Kermack-McKendrick

Le equazioni sono

$$\begin{cases} S'(t) &= -cS(t)I(t) \\ I'(t) &= -rI(t) + cS(t)I(t), \\ R'(t) &= rI(t) \end{cases}$$

dove $c > 0$ è il tasso di infezione e misura la rapidità del contagio e $r > 0$ è il tasso di rimozione (guarigione, morte etc).

La popolazione totale con cambia nel tempo e la terza equazione può essere rimossa.

Sono di equilibrio tutte le configurazioni prive di malati.

Dall'analisi del modello risulta che un'epidemia inizia se il numero di suscettibili supera la soglia $\frac{r}{c}$. Alzando r diminuisce il tempo durante il quale un malato può contagiare altre persone. Diminuendo c diminuisce l'effetto dei possibili incontri.

Le EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE sono relazioni tra delle funzioni incognite e le loro derivate.

Se indichiamo con $u(t)$ la funzione incognita, allora un'**equazione differenziale ordinaria** è

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_f \tag{10}$$

Sotto opportune ipotesi sulla funzione f, che descrive la legge di variazione, esiste ed è unica la soluzione di (**??**) che soddisfa alle condizioni iniziali

$$u(t_0) = u_0 \tag{11}$$

Quando ci sono più equazioni si parla di **sistema** di equazioni.

I sistemi di EDO rappresentano uno degli strumenti matematici più importanti nella descrizione della dinamica di fenomeni reali.

Modello numerico

In generale è difficile ottenere una formula esplicita per la soluzione del problema a valori iniziali (**??**)-(**??**).

Abbiamo bisogno dei metodi per l'approssimazione delle soluzioni che possono essere implementati sul calcolatore $\rightsquigarrow$ **modello numerico**.

L'introduzione e il largo impiego dei calcolatori nel campo scientifico, ha consentito di trattare problemi di dimensioni sempre maggiori e sempre più complessi.

Allo stesso tempo ha reso necessario lo sviluppo e l'analisi di metodi di risoluzione computazionalmente più efficienti.

Il metodo di Eulero

Suddividiamo l'intervallo $[t_0, t_f]$ in tanti sottointervalli $[t_n, t_{n+1}]$ di ampiezza $h = \frac{t_f - t_0}{N}$, i.e.

$$t_0 < t_1 < ... < t_N = t_f, \quad t_{n+1} = t_n + h, n = 0, 1, ..., N.$$

Da

$$u'(t_0) = f(t_0, u_0) \approx \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}$$

otteniamo che

$$u(t_0 + h) \approx u_1 = u_0 + hu'(t_0) = u_0 + hf(t_0, u_0).$$

Applicando ricorsivamente tale formula, otteniamo

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n \geq 0,$$

dove

$$u_n \approx u(t_n), n = 1, 2, .., , N.$$

Tale tecnica di approssimazione è il metodo di Eulero [1707-1783]

Conclusioni

- La matematica ha visto probabilmente la sua nascita e la sua evoluzione attraverso una continua interazione col mondo reale in un processo di **astrazione** e **applicazione**.

Conclusioni

- La matematica ha visto probabilmente la sua nascita e la sua evoluzione attraverso una continua interazione col mondo reale in un processo di **astrazione** e **applicazione**.

- Nuovi problemi del mondo reale richiedono le sviluppo di nuove idee matematiche ed algoritmiche e nuove idee matematiche ed algoritmiche forniscono strumenti potenti per la comprensione di fenomeni reali.

Conclusioni

- La matematica ha visto probabilmente la sua nascita e la sua evoluzione attraverso una continua interazione col mondo reale in un processo di **astrazione** e **applicazione**.

- Nuovi problemi del mondo reale richiedono le sviluppo di nuove idee matematiche ed algoritmiche e nuove idee matematiche ed algoritmiche forniscono strumenti potenti per la comprensione di fenomeni reali.