Piano Lauree Scientifiche "Matematica e Statistica" 2011-12

Modelli matematici e realtà:
Laboratorio computazionale sulle equazioni differenziali seconda parte

R. Vermiglio[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica - Università degli Studi di Udine

26 aprile 2012

1. Modello matematico
   - Le equazioni differenziali
2. Modello numerico
   - Il metodo di Eulero
3. Laboratorio computazionale-Fisica
   - Moto
   - MATLAB
     - Scrivo il mio codice
     - Uso un codice MATLAB per equazioni differenziali
   - Circuiti
   - Conclusioni

Le equazioni differenziali

Le equazioni differenziali ordinarie sono relazioni tra delle funzioni incognite e le loro derivate.

Se indichiamo con $u(t)$ la funzione incognita, allora un'**equazione differenziale ordinaria** è

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_f \tag{1}$$

Sotto opportune ipotesi sulla funzione f, che descrive la **legge di evoluzione**, **esiste** ed è **unica** la soluzione di (1) che soddisfa alle condizioni iniziali

$$u(t_0) = u_0 \tag{2}$$

Quando ci sono più equazioni si parla di **sistema** di equazioni differenziali ordinarie.

I sistemi di equazioni differenziali ordinarie rappresentano un'importante classe di **modelli matematici** per la descrizione della dinamica di fenomeni

Modello numerico

In generale è difficile ottenere una formula esplicita per la soluzione del problema a valori iniziali (1)-(2).

Abbiamo bisogno di **modelli numerici,** cioè di metodi per l'approssimazione delle soluzioni che possono essere implementati sul calcolatore.

L'introduzione e il largo impiego dei calcolatori nel campo scientifico ha consentito di trattare problemi di dimensioni sempre maggiori e sempre più complessi.

Allo stesso tempo ha reso necessario lo sviluppo e l'analisi di metodi di risoluzione computazionalmente più efficienti.

Il metodo di Eulero

Suddividiamo $[t_0, t_f]$ in N sottointervalli $[t_n, t_{n+1}]$ di ampiezza $h = \frac{t_f - t_0}{N}$:

$$t_0 < t_1 < ... < t_N = t_f, \quad t_{n+1} = t_n + h, \ \ n = 0, 1, ..., N.$$

Da

$$u'(t_0) = f(t_0, u_0) \approx \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}$$

abbiamo che

$$u(t_0 + h) \approx u_1 = u_0 + hu'(t_0) = u_0 + hf(t_0, u_0).$$

Applicando ricorsivamente tale formula, otteniamo

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n \geq 0, \tag{3}$$

dove

$$u_n \approx u(t_n), n = 1, 2, .., , N.$$

Tale tecnica di approssimazione è nota come metodo di Eulero.


Leonhard Euler [1707-1783]

È stato un importante matematico e fisico. In Italia è noto come Eulero.

Altri algoritmi più accurati ed efficienti sono stati sviluppati e studiati per approssimare le soluzioni di equazioni differenziali ordinarie.

Nell'attività di laboratorio computazionale, analizzeremo il comportamento delle soluzioni di alcuni semplici modelli matematici (**simulazione numerica**)

Impareremo a disegnare i grafici delle funzioni e useremo dei programmi che fanno uso delle funzioni (**function**) che il MATLAB mette a disposizione per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Impareremo a scrivere una **function** per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie con il metodo di Eulero.


Isaac Newton [1642-1727]

È stato un grande matematico, fisico, filosofo naturale, teologo inglese.

Moto dei corpi

Supponiamo che un punto materiale di massa m si muova lungo una retta e che una forza di intensità F venga applicata ad esso nella stessa direzione. Le **variabili di stato** al tempo t sono

- $s(t)$ la posizione del punto sulla retta rispetto ad un punto fissato,
- $v(t)$ la sua velocità.

Dalla **seconda legge di Newton** $F = ma$, abbiamo che il moto è descritto dal sistema di equazioni di due equazioni differenziali ordinarie (**modello matematico**)

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ v'(t) = \frac{1}{m} F(t, s(t), v(t)) \end{cases}$$

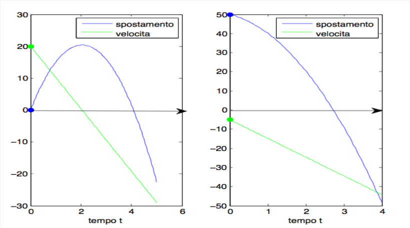
Se la forza F **non** dipende dal tempo, le equazioni si dicono **autonome**, altrimenti **non autonome**.

Forza di gravità

Consideriamo il moto di un punto materiale nelle vicinanze della superficie terrestre, soggetto alla forza di gravità $\vec{F} = mg\vec{z}$, con $g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$ accelerazione di gravità e $\vec{z}$ versore lungo la verticale. Le soluzioni del sistema di equazioni differenziali risultano

$$\begin{cases} s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \\ v(t) = -gt + v_0 \end{cases}, \quad t \geq 0$$

con s_0, v_0 costanti da determinare assegnando la posizione e la velocità iniziali $s(0) = s_0, v(0) = v_0$.



Vibrazioni

Supponiamo ora che il punto materiale di massa m sia soggetto ad una forza di richiamo elastica, proporzionale allo spostamento, e ad una resistenza viscosa, proporzionale alla velocità. Indicando con

- $s(t)$ lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio,
- $v(t)$ la velocità,

dalla **seconda legge di Newton** otteniamo le equazioni differenziali autonome

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{k}{m}s(t) - \frac{\ell}{m}v(t) \end{cases}$$

dove $k > 0$ e $\ell > 0$ sono rispettivamente la **costante elastica** e la **costante di smorzamento**.

Vogliamo analizzare il comportamento qualitativo delle soluzioni al variare dello stato iniziale, $s(0) = s_0, v(0) = v_0$ e dei parametri ℓ, k. Come cambia il moto in presenza o meno di resistenza? E se si introduce una forza esterna che varia nel tempo?

Simulazione numerica delle vibrazioni di un sistema

La **function**

$$[t, u] = solvibrazioni(tspan, [s_0 v_0], \ell, k)$$

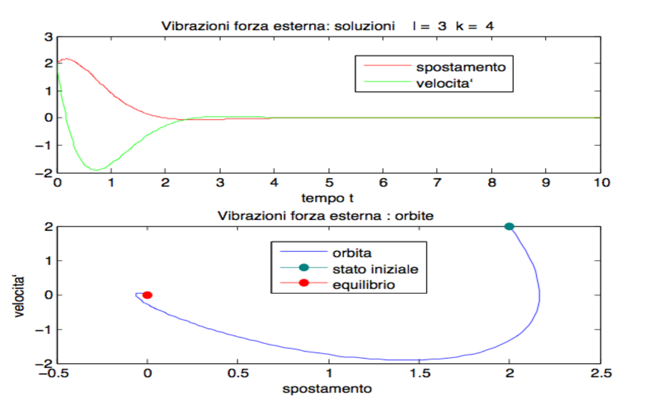
risolve le equazioni

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{\ell}{m} v(t) - \frac{k}{m} s(t) \end{cases}$$

nell' intervallo $tspan = [t_0 \;\; t_f]$, assegnati i valori iniziali $[s_0 \;\; v_0]$, la costante di smorzamento $\ell > 0$ e la costante elastica $k > 0$ e massa $m = 1$. Disegna inoltre il grafico delle soluzioni $s(t), v(t)$ e le relative orbite. Tali equazioni sono **autonome**.

Esempio simulazione numerica delle vibrazioni di un sistema

>>[t,u] = solvibrazioni([0 10],[2 2],3,4)



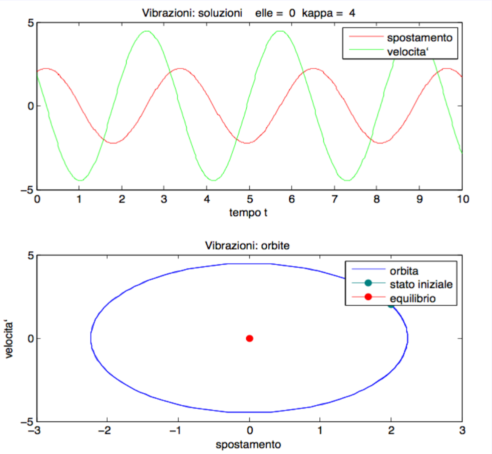
Vibrazioni, continua

Analizza il comportamento delle soluzioni e descrivi qualitativamente le orbite al variare dei valori iniziali $[s_0 v_0]$ nei seguenti casi

- $\ell = 0$ (non c'è resistenza viscosa)
- $0 < \ell < 2\sqrt{mk}$
- $\ell = 2\sqrt{mk}$
- $\ell > 2\sqrt{mk}$

Simulazione numerica $\ell = 0$: soluzione periodica

$t_0 = 0, t_f = 10, s_0 = 2, v_0 = 2, \ell = 0, k = 4$



Soluzione senza resistenza viscosa

Verifica che la soluzione è

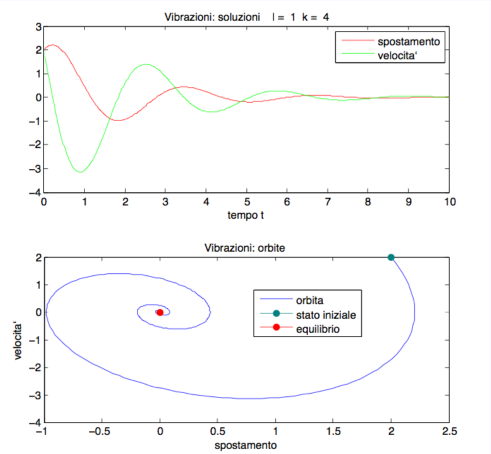
$$\left.\begin{aligned} s(t) &= s_0 cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} sen(\omega_0 t) \\ &= Rsin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}\right. \quad , \quad t \geq 0$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, calcola l'ampiezza R e il periodo.

Il periodo dipende dalle condizioni iniziali?

Simulazione numerica $0 < \ell < 2\sqrt{mk}$: oscillazioni smorzate

$t_0 = 0, t_f = 10, s_0 = 2, v_0 = 2, \ell = 1, k = 4$



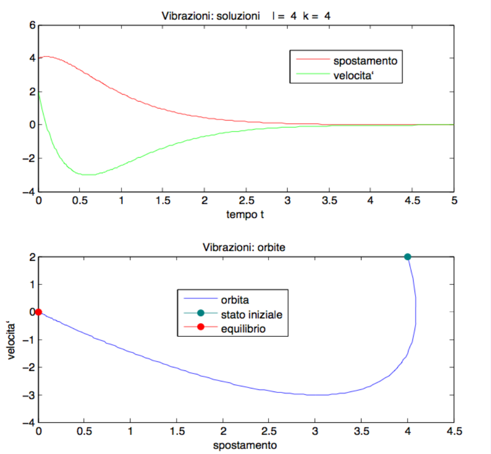
Soluzione nel caso $0 < \ell < 2\sqrt{mk}$

In questo caso il moto della particella è oscillatorio ma l'ampiezza delle oscillazioni si riduce e tende a zero al crescere di t :

OSCILLAZIONI SMORZATE

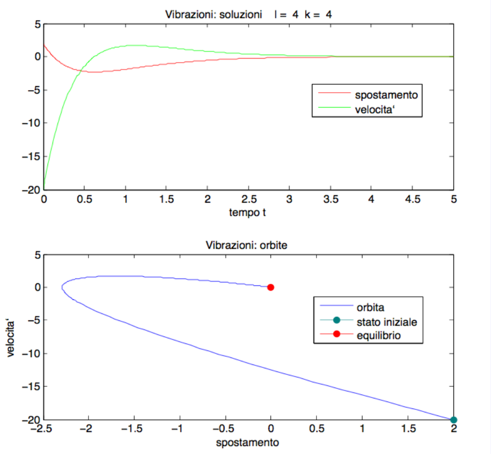
Simulazione numerica $\ell = 2\sqrt{mk}$: smorzamento critico

$t_0 = 0, t_f = 5, s_0 = 4, v_0 = 2, \ell = 4, k = 4$



Simulazione numerica $\ell = 2\sqrt{mk}$: smorzamento critico

$t_0 = 0, t_f = 5, s_0 = 2, v_0 = -20, \ell = 4, k = 4$



Soluzione $\ell = 2\sqrt{mk}$

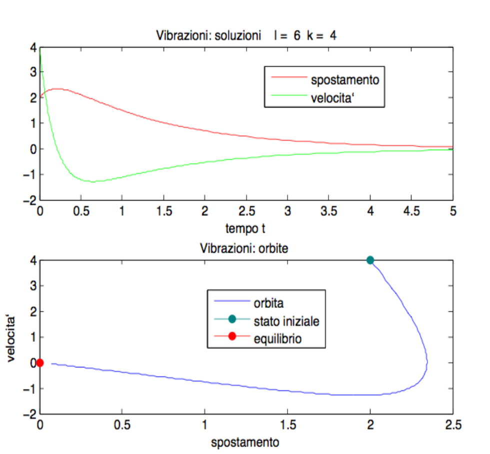
In questo caso il moto della particella NON è oscillatorio, ma tende a zero al crescere di t.

La particella può attraversare la posizione di equilibrio al più una volta e dipende dalle condizioni iniziali.

SMORZAMENTO CRITICO

Simulazione numerica $\ell > 2\sqrt{mk}$: smorzamento supercritico

$$t_0 = 0, t_f = 5, s_0 = 2, v_0 = 4, \ell = 6, k = 4$$



Soluzione $\ell > 2\sqrt{mk}$

Anche in questo caso il moto della particella NON è oscillatorio ma tende a zero al crescere di t.

La particella può attraversare la posizione di equilibrio al più una volta e dipende dalle condizioni iniziali.

SMORZAMENTO SUPERCRITICO

Forza esterna

Supponiamo che la particella sia anche soggetta a una forza esterna che dipende dal tempo: $f(t) = Mcos(\omega t)$. Le equazioni diventano

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{\ell}{m} v(t) - \frac{k}{m} s(t) + Mcos(\omega t) \end{cases} \tag{4}$$

Tali equazioni sono dette **non autonome**.

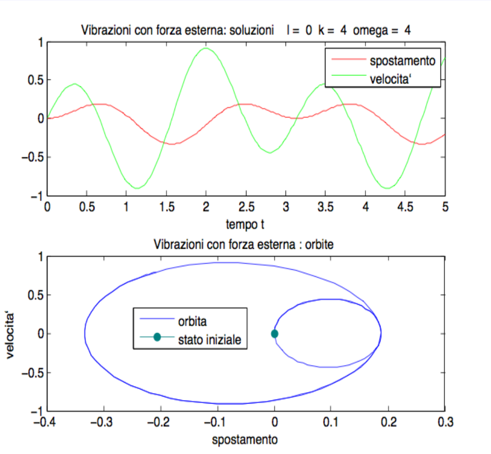
Dopo aver modificato il codice, calcola le soluzioni nei casi

- $\ell = 0, \omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (attenzione problemi numerici)
- $\ell = 0, \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

con valori iniziali $s_0 = 0$, $v_0 = 0$.

Simulazione numerica $\ell = 0$ $\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$t_0 = 0, t_f = 5, s_0 = 0, v_0 = 0, \ell = 0, k = 4, \omega = 4$$



Soluzione nel caso $\ell = 0$ $\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Verifica che le funzioni

$$\left.\begin{array}{l} s(t) = \frac{2M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(cos(\omega t) - cos(\omega_0 t)) \\ \\ v(t) = \frac{2M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(-\omega sin(\omega t) + \omega_0 sin(\omega_0 t)) \end{array}\right. , t \geq 0$$

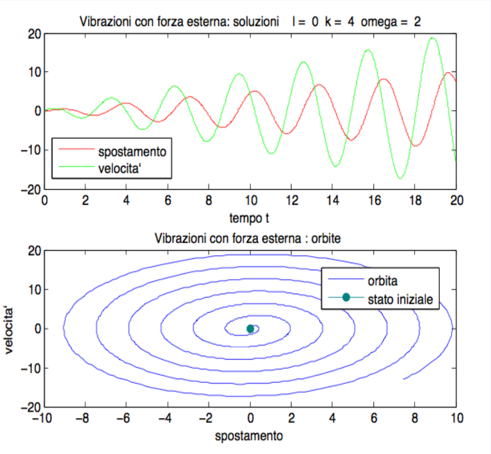
sono le soluzioni delle equazioni (4) con $s_0 = 0, v_0 = 0.$

Usa le formule della trigonometria per riscrivere la funzione $s(t)$ come prodotto di due funzioni periodiche di cui una oscilla più rapidamente dell'altra. Tale fenomeno è noto con il nome di

BATTIMENTI

Simulazione numerica $\ell = 0$ $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$t_0 = 0, t_f = 20, s_0 = 0, v_0 = 0, \ell = 0, k = 4, \omega = 2$



Il fenomeno della risonanza

Il comportamento descritto dall'ultima simulazione viene definito

RISONANZA

La risonanza si verifica quando un sistema oscillante forzato viene sottoposto a sollecitazione periodica di frequenza pari all'oscillazione propria del sistema stesso. Può avere effetti catastrofici su costruzioni civili.

A questo fenomeno è collegato il crollo del Tacoma Narrows Bridge avvenuta il 7 novembre 1940.

Approfondimento

Un semplice codice

Risolve (1)-(2) con il metodo di Eulero (3) in $tspan = [t_0 \;\; t_f]$.

```
function [tout,uout]=EE(f,tspan,u0,N)
t0=tspan(1);
tf=tspan(end);
h=(tf-t0)/N;
tout=[t0:h:tf];
uout(1)=u0;
n=1;
while n < (N+1)
   u=uout(n);
   t=tout(n);
   uder = f(t,u);
   uout(n+1) = u + h*uder;
   n= n + 1;
end
```

L'approssimazione della soluzione dell'equazione logistica

$$u'(t) = ru(t)(1 - \frac{u(t)}{k}) = ru(t) - \mathbf{c}u(t)^2, \quad t \geq 0$$

con $r = 5$ e $k = 10$ con valore iniziale $u0 = 2$ in $[0, 10]$ con il metodo di Eulero, si ottiene con le istruzioni

```
>>r=5;
>>k=10;
>>fode=@(t,u)r*u*(1-u/k);
>>[t,u]=EE(fode,[0 10],2,100);
```

- Disegna il grafico della soluzione numerica ed il grafico della soluzione esatta

$$u(t) = \frac{k u_0 e^{rt}}{k - u_0(e^{rt} - 1)} = \frac{k}{1 + k_0 e^{-rt}}, \quad t_0 = 0 \leq t \leq t_f.$$

- Come puoi calcolare l'errore dell'approssimazione?
- Come si comporta l'errore aumentando N e riducendo quindi h?

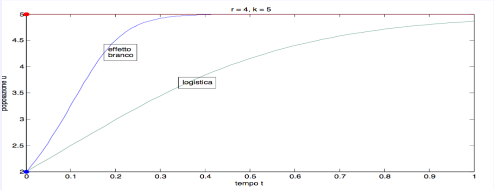
Simulazione numerica equazione con effetto branco

Per simulare numericamente la soluzione dell'equazione logistica con effetto branco

$$u'(t) = ru^2(t)(1 - \frac{u(t)}{k}) \quad t \geq 0,$$

modifica la definizione di *fode* e usa il codice **ode 45** di MATLAB come segue

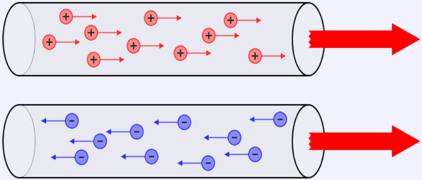
```
>> [tout,uout]=ode45(fode,[0 20],[2 0]);
>> plot(tout,uout);
```



Soluzione equazione logistica senza e con effetto branco $r = 4$, $k = 5$ (ode45)

Circuiti

Un **circuito elettrico** è un sistema di elementi elettrici collegati in un percorso chiuso, che rendono possibile il passaggio di una **corrente elettrica**.



L'**intensità di corrente** i è una grandezza fisica scalare che misura la quantità di carica elettrica q che attraversa la sezione di un conduttore entro un'unità di tempo. L'unità di misura è l'ampere A.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Le leggi fisiche

Per descrivere ed analizzare il comportamento della corrente elettrica nei circuiti useremo le equazioni differenziali (modello matematico) e la loro simulazione numerica (modello numerico).

Le equazioni differenziali si basano sulle definizioni di resistenza, capacità, induttanza e sulle leggi fisiche che regolano questi fenomeni: leggi di Ohm, legge di Lenz, leggi di Kirchhoff.


George Simon Ohm [1789 -1854]

Legge di Ohm e resistenza

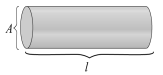
Lo scienziato tedesco George Simon Ohm mise in relazione la differenza di potenziale e la corrente elettrica e formulò la legge

$$\Delta V = Ri.$$

R è chiamata **resistenza** e si misura in Ohm Ω.

La resistenza dipende dal dispositivo, dalle sue caratteristiche fisiche

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$



dove ρ è la resistività, e dalla temperatura

$$\Delta\rho = \rho_0 \alpha \Delta T$$

dove ρ_0 è la resistività alla temperatura di riferimento e il coefficiente termico α dipende dal materiale. Per i superconduttori, la resistività si azzera in corrispondenza alla temperatura critica T_c.

Legge di Ohm generalizzata

L'intensità di corrente che attraversa un circuito è uguale al rapporto tra la forza elettromotrice del generatore f e la resistenza totale del circuito stesso.

$$f = (R + r)i.$$

dove r è la resistenza interna del generatore.

Esempio Conduttori in serie ed in parallelo

Capacità e condensatori

Il potenziale elettrico di un conduttore aumenta quando viene fornito di carica elettrica. La **capacità** di un conduttore isolato è la grandezza fisica definita da

$$C = \frac{Q}{V}$$

dove Q è la carica accumulata e V è il potenziale elettrico.

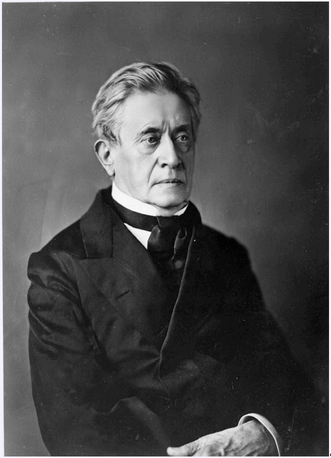
Misura la predisposizione all'accumulo di carica e dipende dalle caratteristiche fisiche e geometriche del corpo considerato e dal mezzo in cui è immerso.

L'unità di misura della capacità è il **farad**, equivalente ad un coulomb su volt.

Il **condensatore** è un dispositivo finalizzato all'accumulo di carica. Possono acquistare una notevole quantità di elettricità senza raggiungere un potenziale troppo elevato.

Michael Faraday [1791-1867]

Diede importanti contributi nell' elettromagnetismo e nell'elettrochimica. In particolare scoprì che un campo magnetico variabile produce un campo elettrico.

Joseph Henry [1797-1878] scoprì insieme a Faraday il fenomeno dell'autoinduzione.


Heinrich Friedrich Emil Lenz [1804-1865]

Scoprì che la forza elettromotrice risultante dall'induzione elettromagnetica è sempre tale da generare un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso del campo magnetico concatenato con il circuito.

Autoinduzione e induttori

La corrente che scorre in un circuito genera un campo magnetico. Il flusso del campo magnetico Φ abbracciato dal circuito è proporzionale alla corrente passante i

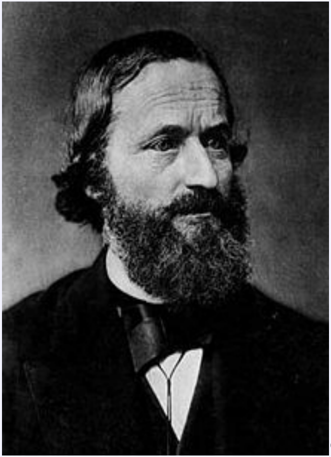
$$\Phi = Li$$

dove L è il **coefficiente di autoinduzione** del circuito. L'unità di misura di L è **henry** ed è il coefficiente di autoinduzione di un circuito che, percorso da una corrente di un ampere abbraccia un flusso di un weber.

Se l'intensità di corrente varia nel tempo, il flusso magnetico risulta variabile. Per **la legge di Lenz**, si determina entro il circuito una f.e.m. indotta f che si oppone alla variazione del flusso data da

$$f = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Un **induttore** è un componente passivo in cui l'aspetto induttivo prevale su quello capacitivo e su quello resistivo.

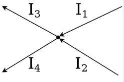

Gustav Robert Georg Kirchhoff [1824-1887]

È stato un fisico e matematico tedesco. Si occupò principalmente di elettrotecnica e termodinamica.

Leggi di Kirchhoff

Per determinare la corrente che attraversa ogni elemento del circuito abbiamo a disposizione **le leggi di Kirchhoff**

La **prima legge di Kirchhoff** afferma che la somma algebrica delle intensità di corrente che attraversa un nodo del circuito (con segno diverso se entranti o uscenti) è nulla.



$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

La **seconda legge di Kirchhoff** afferma che la somma algebrica delle f.e.m. di una maglia è uguale alla somma algebrica delle intensità di corrente per le resistenza di ogni maglia.

Circuiti RC

Un **circuito RC** è un circuito elettrico con una resistenza ed un condensatore

Consideriamo un circuito RC in cui sono collegati in serie una resistenza R, un condensatore di capacità C e un generatore di forza elettromotrice costante f di resistenza interna trascurabile. Applicando le leggi di Kirchhoff otteniamo

$$f = \frac{q}{C} + Ri$$

da cui otteniamo l'equazione differenziale

$$q'(t) + \frac{q(t)}{RC} = \frac{f}{R} \tag{5}$$

La generica soluzione è

$$q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{RC}} + fC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad t \geq 0.$$

La quantità di carica presente sulle armature del condensatore varia nel tempo e all'infinito tende al valore fC.

Circuiti RC: processo di carica del condensatore

Inizialmente l'interruttore è aperto, nel circuito non circola corrente ed il condensatore è scarico. Al tempo $t = 0$ viene chiuso l'interruttore e la corrente inizia a circolare. La soluzione di (5) risulta

$$q(t) = fC(1 - e^{-\frac{t}{RC}}),$$

da cui

$$i(t) = \frac{f}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Al prodotto **RC** viene dato il nome di **costante di tempo del circuito**.

A processo di carica ultimato, fra le armature del condensatore c'è la stessa differenza di potenziale f presente fra i poli del generatore.

Teoricamente il processo di carica richiede in tempo infinito, ma dopo un tempo pari a RC è carico al $(1 - \frac{1}{e}) \approx 63\%$ e si può considerare concluso dopo un tempo pari a 3 o 4 RC (carico rispettivamente al 92% o 98%).

Circuiti RC: processo di scarica del condensatore

Un circuito RC che non ha sorgenti esterne di f.e.m o di corrente si chiama **circuito RC in evoluzione libera**: la corrente circolante è dovuta solo al movimento di cariche dovute alla carica immagazzinata nel condensatore.

Se una volta caricato il condensatore, escludiamo il generatore l'equazione differenziale diventa

$$q'(t) + \frac{q(t)}{RC} = 0$$

Posto $q(0) = q_0 > 0$ otteniamo la soluzione

$$q(t) = q_0 e^{\frac{-t}{RC}},$$

da cui

$$i(t) = -q'(t) = \frac{q_0}{RC} e^{\frac{-t}{RC}}.$$

Circuiti RL

Un **circuito RL** è un circuito elettrico con una resistenza R e con un elemento dinamico: l'induttore con induttanza L in serie. Supponiamo che sia alimentato da un generatore di f.e.m. costante f. Considerando la f.e.m di autoinduzione, dalla legge di Ohm generalizzata abbiamo

$$iR - L\frac{di}{dt} = f,$$

da cui otteniamo l'equazione differenziale

$$i'(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{f}{L}. \tag{6}$$

La generica soluzione è

$$i(t) = i(0)e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{f}{L}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}), \quad t \geq 0.$$

Circuiti RL: chiusura e apertura

Al tempo $t = 0$ chiudiamo l'interruttore, ponendo $i(0) = 0$ abbiamo che la soluzione risulta

$$i(t) = \frac{f}{L}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) = \frac{f}{L} - \frac{f}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t \geq 0.$$

ed è composta dalla corrente a regime $\frac{f}{L}$ e la dalla risposta transitoria (**extracorrente di chiusura**), che si annulla per $t \to \infty$.

La costante di tempo $\frac{R}{L}$ regola il raggiungimento della corrente di regime.

Aprendo l'interruttore escludiamo il generatore ed abbiamo un circuito RL in evoluzione libera.Supponendo che all'istante di apertura $t = 0$, si abbia $i(0) = \frac{f}{L}$, otteniamo

$$i(t) = \frac{f}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}, \quad t \geq 0.$$

Questa corrente detta **extracorrente di apertura** si riduce a zero per $t \to \infty$

Simulazione numerica di circuiti RL con f.e.m. sinusoidale

Vediamo come si comporta il circuito RL applicando un generatore di f.e.m. alternata $f \sin(\omega t)$. Applicando la legge di Ohm, otteniamo l' equazione differenziale

$$i'(t) + \frac{Ri(t)}{L} = \frac{f \sin(\omega t)}{L}$$

- Integra con i codici MATLAB l'equazione e studia il comportamento per diversi valori dei parametri R, L
- Calcola la soluzione esatta e confronta i valori ottenuti.

Circuiti RLC

Un **circuito RLC** è un circuito elettronico contenente resistenze, induttori e condensatori. Consideriamo un circuito con una resistenza R, un induttore di induttanza L e un condensatore di capacità C in serie. Supponiamo che all'istante $t = 0$ in cui il circuito viene chiuso, sulle armature del condensatore ci sia una carica $q(0) = q_0 > 0$ e che $i(0) = 0$. Per la legge di Ohm abbiamo che

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = Ri.$$

Ricordando $i = -\frac{dq}{dt}$ otteniamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$q''(t) + \frac{Rq'(t)}{L} + \frac{q(t)}{C} = 0, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

o equivalentemente il sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} q'(t) = -i(t) \\ i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{q(t)}{LC} \end{cases} \qquad t \geq 0. \tag{8}$$

Simulazione numerica dei circuiti RLC, LC e analogie elettromeccaniche

- Studia il comportamento delle funzioni q e i al variare dei parametri L, R, C. In particolare valuta il comportamento delle soluzioni al variare del segno di $\Delta = R^2C - 4L$.
- Poni $R = 0$ e studia come varia il comportamento delle soluzioni, rispetto al caso $R > 0$. Perchè secondo te, il **circuito LC** si chiama anche **circuito oscillante**?
- Nel circuito LC, mettendo formalmente in corrispondenza q con lo spostamento s, L con massa m, la capacità C con $\frac{1}{k}$, con k costante elastica, le equazioni differenziale sono identiche a quella di una massa m soggetta ad una forza elastica $-ks$. Che ruolo svolge la resistenza R nelle equazioni (7)? Secondo te a cosa corrisponde in meccanica?

Circuiti RLC con f.e.m. sinusoidale

Per mantenere un'oscillazione elettrica nel circuito RLC occorre fornire con continuità la potenza che viene dissipata con il resistore. Consideriamo un circuito RLC in serie con un generatore di f.e.m. $f(t) = fcos(\omega t)$

$$f(t) + \frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = Ri.$$

Ricordando $i = -\frac{dq}{dt}$ otteniamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$q''(t) + \frac{Rq'(t)}{L} + \frac{q(t)}{C} + \frac{f(t)}{L} = 0, \quad t \geq 0.$$

o **equivalentemente** il sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} q'(t) = -i(t) \\ i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{q(t)}{LC} + \frac{f(t)}{L} \end{cases} \qquad t \geq 0. \tag{9}$$

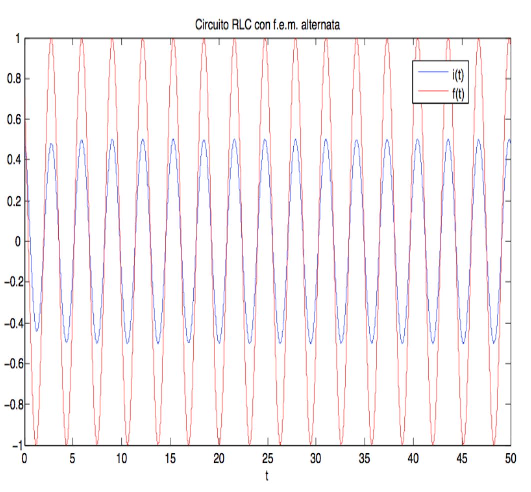
Simulazione numerica dei circuiti RLC con f.e.m. sinusoidale

- Studia il comportamento delle soluzioni al variare dei parametri, aiutandoti con l'analogia con la meccanica.
- Si può presentare in fenomeno della **risonanza**?
- Sia

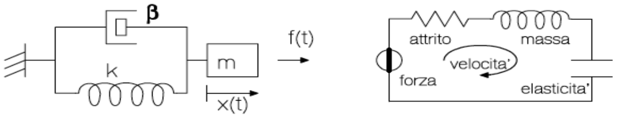
$$\begin{aligned} \mathrm{tang}(\theta) &= \tfrac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR} \\ f(t) &= f\cos(\omega t + \theta) \\ i_0 &= \tfrac{f}{R} \end{aligned} \tag{10}$$

Disegna il grafico della soluzione $i(t)$ e di $f(t)$. Cosa accade?

Simulazione numerica dei circuiti RLC con f.e.m. sinusoidale (9) con $R = 2$, $L = 1$, $C = 1/4$, $\omega = 2$ e f, θ, i_0 in (10) (ode45)



Metodo delle analogie



Abbiamo visto che sistemi di diversa natura fisica sono governati dalle stesse equazioni. Confrontando tra loro le equazioni abbiamo costruito la seguente tabella di corrispondenze

forza	tensione	induttanza	massa
velocità	corrente elettrica	attrito	resistenza elettrica
spostamento	carica elettrica	capacità elettrica	elasticità

che permette di studiare un sistema meccanico in termini di un **circuito elettrico equivalente**. Nel caso dell'oscillatore armonico il circuito equivalente è Il circuito RLC in serie.

Metodo delle analogie, continua

Il metodo delle analogie è usato anche per studiare **i sistemi termici** in termini di circuiti equivalenti. Si tratta, naturalmente, di sistemi termici schematizzati in termini di elementi concentrati e quindi descritti da equazioni differenziali ordinarie. In questo caso l'analogia usata più spesso è descritta nella tabella seguente, dove si nota l'assenza di elementi induttivi, in accordo con la forma delle equazioni che descrivono i fenomeni termici.

temperatura	tensione	resistenza termica	resistenza elettrica
potenza termica dQ/dt	corrente elettrica	capacità termica	capacità elettrica
quantità di calore Q	carica elettrica		

Trova impieghi importanti anche nello studio dei **sistemi elettromeccanici**, che comprendono una parte costituita da elementi elettrici e una costituita da elementi meccanici, che sono accoppiate fra loro in modo trasferimento di segnali dall'una parte all'altra. Questo è il caso, per esempio, dei microfoni, altoparlanti, sensori di vibrazioni, ecc.

Conclusioni

La **simulazione numerica** è oggi particolare importante grazie alla enorme capacità di calcolo che in questi anni i calcolatori digitali, dai calcolatori personali ai supercalcolatori, hanno messo a nostra disposizione.

La soluzione numerica su calcolatore delle equazioni dei sistemi fisici rientra, più in generale, nella problematica della simulazione dei sistemi.

L' analisi numerica ha assunto una grande importanza concettuale oltre che pratica e la simulazione con il calcolatore è il modo attuale di affrontare la ricerca in diversi settori scientifici.