

Piano Lauree Scientifiche "Matematica e Statistica" 2010-11

Modelli matematici e realtà:
Laboratorio sulle equazioni differenziali - seconda parte

R. Vermiglio¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica - Università degli Studi di Udine

- 1 **Modello matematico**
 - Le equazioni differenziali
- 2 **Modello numerico**
 - Il metodo di Eulero
- 3 **Laboratorio - Dinamica di Popolazioni**
 - Dinamica di coppia
 - Modello di Lotka-Volterra
 - Modello di Leslie-Gower
 - Modelli di epidemia
 - Scrivo il mio codice in MATLAB

Le equazioni differenziali

Le **Equazioni Differenziali Ordinarie** (EDO) sono relazioni tra delle funzioni incognite e le loro derivate.

Se indichiamo con $u(t)$ la funzione incognita, allora un'**equazione differenziale ordinaria** è

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (1)$$

Sotto opportune ipotesi sulla funzione f , che descrive la legge di variazione, **esiste ed è unica** la soluzione di (1) che soddisfa alle condizioni iniziali

$$u(t_0) = u_0 \quad (2)$$

Quando ci sono più equazioni si parla di **sistema** di EDO.

I sistemi di EDO rappresentano uno dei **modelli matematici** più importanti nella descrizione della dinamica di fenomeni reali.

Modello numerico

In generale è difficile ottenere una formula esplicita per la soluzione del problema a valori iniziali (1)-(2).

Abbiamo bisogno dei metodi per l'approssimazione delle soluzioni che possono essere implementati sul calcolatore \rightsquigarrow **modello numerico**.

L'introduzione e il largo impiego dei calcolatori nel campo scientifico ha consentito di trattare problemi di dimensioni sempre maggiori e sempre più complessi.

Allo stesso tempo ha reso necessario lo sviluppo e l'analisi di metodi di risoluzione computazionalmente più efficienti.

Il metodo di Eulero

Suddividiamo $[t_0, t_f]$ in N sottointervalli $[t_n, t_{n+1}]$ di ampiezza $h = \frac{t_f - t_0}{N}$,
i.e.

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f, \quad t_{n+1} = t_n + h, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Da

$$u'(t_0) = f(t_0, u_0) \approx \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}$$

abbiamo che

$$u(t_0 + h) \approx u_1 = u_0 + hu'(t_0) = u_0 + hf(t_0, u_0).$$

Applicando ricorsivamente tale formula, otteniamo

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n \geq 0,$$

dove

$$u_n \approx u(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Tale tecnica di approssimazione è il **metodo di Eulero**



È un



Altri algoritmi più accurati ed efficienti sono stati sviluppati e studiati per approssimare le soluzioni di equazioni differenziali ordinarie.

Esempio: In MATLAB si può usare per esempio *ode45*

Nell'attività di laboratorio impareremo a disegnare i grafici delle funzioni e useremo dei programmi che fanno uso delle funzioni (**function**) che il MATLAB mette a disposizione per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Nella parte finale, impareremo a scrivere una **function** per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie con il metodo di Eulero.

Modello per la dinamica di coppia

Vogliamo costruire un modello minimale per descrivere la dinamica nel tempo dell'affetto in una coppia (*)

Le **ipotesi semplificatrici** sono:

- l'intensità dell'affetto di un individuo verso l'altro è rappresentato da un'unica variabile
(l'amore risulta una mistura di più sentimenti difficilmente descrivibili con un'unica variabile!);
- il modello descrive solo l'interazione dei due individui della coppia
(la dinamica dell'amore in una coppia e delle emozioni di una persona risente anche della sua vita sociale);
- le personalità dei due individui non variano nel tempo (modello adatto a valutare la dinamica sui brevi periodi)

(*) S. H. Strogatz *Love affairs and differential equations. Mathematics Magazine (1988).*

Dinamica di coppia, continua

All'interno della coppia consideriamo tre fenomeni:

- la **dimenticanza** che descrivere il disinteresse verso il partner;
- il **rinnovo** che aumenta con l'amore del partner;
- l' **istinto** che rende sensibile al **fascino** del partner.

Al contrario del primo, il secondo ed il terzo danno origine ad un aumento dell'interesse.

Dinamica di coppia, continua

Introduciamo le variabili di stato

- $l_1(t)$ l'intensità dell'amore dell'individuo 1 per l'individuo 2 all'istante t ,
- $l_2(t)$ l'intensità dell'amore dell'individuo 2 per l'individuo 1 all'istante t

e assumiamo che

- $l_i(t) > 0 \rightsquigarrow$ **affetto** di $i = 1, 2$ verso il partner;
- $l_i(t) = 0 \rightsquigarrow$ **indifferenza** di $i = 1, 2$ verso il partner;
- $l_i(t) < 0 \rightsquigarrow$ **antagonismo** o **disamore** di $i = 1, 2$ verso il partner.

Dinamica di coppia, continua

Ogni individuo è descritto da quattro parametri **costanti e positivi**:

- fascino F_i ;
- tasso di dimenticanza a_i ;
- tassi di reattività b_i all'affetto del partner;
- tassi di reattività c_i al fascino del partner.

Il modello risulta

$$\begin{cases} \ell'_1(t) = -a_1\ell_1(t) + b_1\ell_2(t) + c_1F_2 \\ \ell'_2(t) = -a_2\ell_2(t) + b_2\ell_1(t) + c_2F_1 \end{cases}, \quad (3)$$

Il termine negativo $-a_i\ell_i(t)$ descrive la **dimenticanza**: in assenza del partner il sentimento decade esponenzialmente.

I termini $b_i\ell_j(t)$ e c_iF_j , $i \neq j$ descrivono rispettivamente il **rinnovo** e la **reazione** dell'individuo i al fascino del partner j e danno un contributo positivo all'affetto.

Simulazione dinamica coppia

Assumiamo che $a_1 a_2 > b_1 b_2$ (= la media geometrica della reazione all'amore minore della media geometrica della dimenticanza) e studiamo sperimentalmente la dinamica con

$$a_1 = 16, b_1 = 5, c_1 = 1, F_1 = 30$$

e

$$a_2 = 8, b_2 = 10, c_2 = 1, F_2 = 60.$$

Simulazione dinamica coppia, continua

Usa **solcoppia2** per simulare numericamente il modello (3)

```
>>[t,elle,ellestar] =solcoppia2(tspan,elle0,P1,P2,F)
```

dove

- $tspan = [t_0 \ t_f]$ è l'intervallo di integrazione;
- $elle0 = [\ell_1(t_0) \ \ell_2(t_0)]$ è lo stato iniziale;
- $P1 = [a_1 \ b_1 \ c_1]$ vettore dei parametri che descrivono il partner 1;
- $P2 = [a_2 \ b_2 \ c_2]$ vettore dei parametri che descrivono il partner 2;
- $F = [F(1) \ F(2)]$ vettore fascino
- $elle(:, 1), elle(:, 2)$ sono i valori approssimati delle soluzioni in t ;
- $ellestar$ il punto di equilibrio.

Simulazione dinamica coppia: esempio

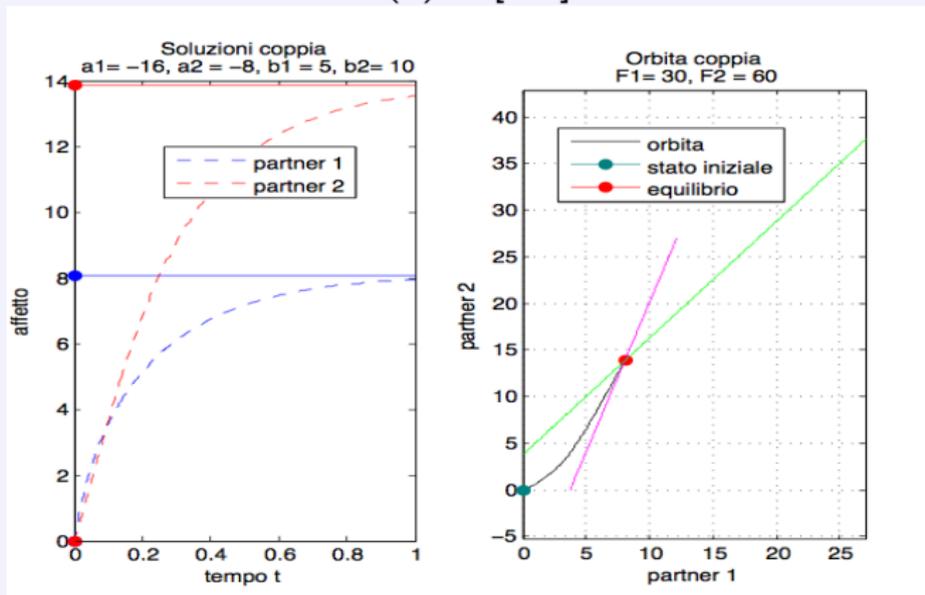
```
>>P1=[16 5 1];  
>>P2=[8 10 1];  
>>F=[30 60];  
>>[t,elle,ellestar] =solcoppia2([0 1],[20 10],P1,P2,F)
```

Simulazione dinamica di coppia, continua

- Poni $tspan = [0 \ 1]$. Descrivi il comportamento delle soluzioni, variando $\ell_0 = [\ell_1(0), \ell_2(0)]$ (es. $\ell_0 = [0 \ 0], [10 \ 0], [0 \ 10], [20 \ 10], [40 \ 20]$). C'è un equilibrio positivo? La coppia ha una solida relazione? Come si comportano le soluzioni se $\ell_0 = [-1 \ -1]$?
- Modifica il vettore F per studiare il comportamento delle soluzioni e dell'equilibrio variando i valori F_i . Se il fascino F_i aumenta cosa accade dei valori di equilibrio $\ell_{i,star}$? La coppia trae vantaggio dall'incremento del fascino?
- Modifica i vettori dei parametri P_1, P_2 e studia il comportamento delle soluzioni e dell'equilibrio variando b_i in modo che valga $a_1 a_2 > b_1 b_2$. Se b_i aumenta cosa accade dei valori di equilibrio? La coppia trae vantaggio dall'incremento di tale parametro?
- Modifica i vettori dei parametri P_1, P_2 e studia il comportamento delle soluzioni e dell'equilibrio variando a_i in modo che valga $a_1 a_2 > b_1 b_2$.

Risultati simulazione modello dinamica di coppia

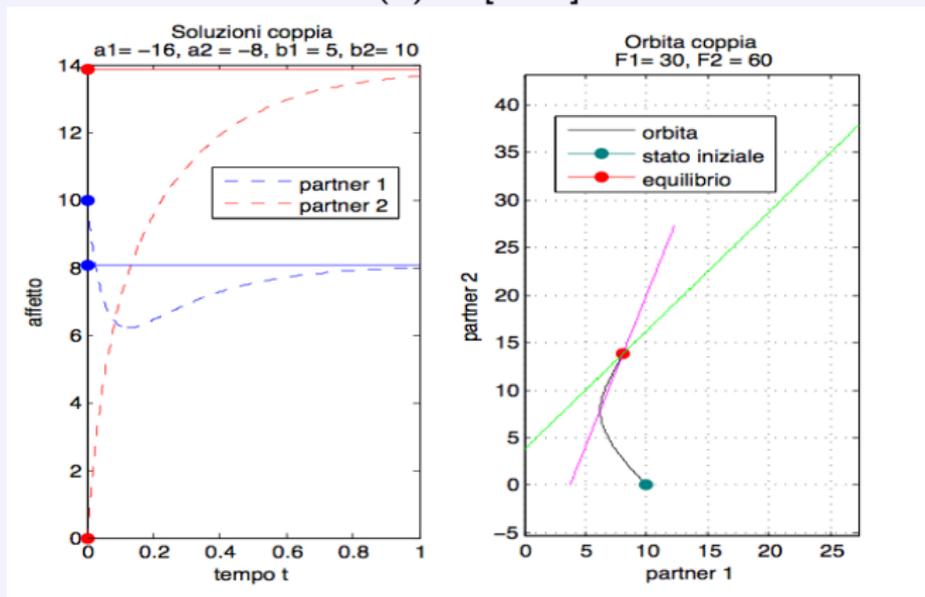
$$\ell(0) = [0 \ 0]$$



Simulazione numerica in[01]

Dinamica di coppia, continua

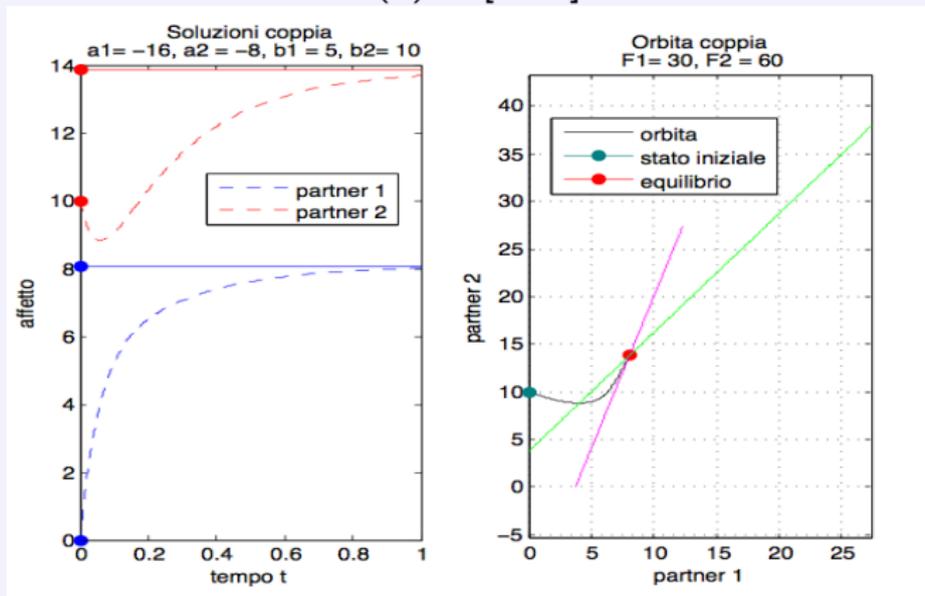
$$l(0) = [10 \ 0]$$



Simulazione numerica Simulazione numerica in [01]

Dinamica di coppia, continua

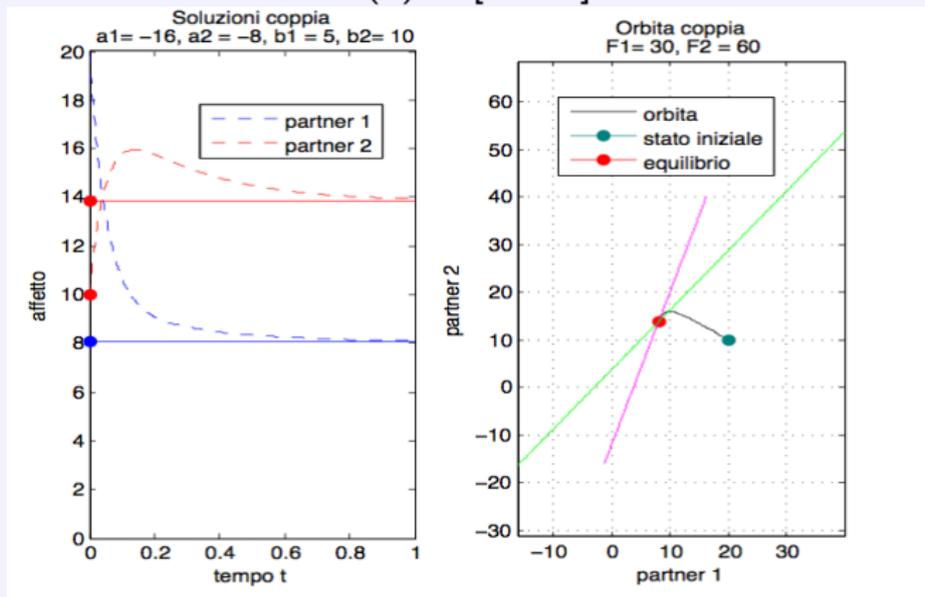
$$l(0) = [0 \ 10]$$



Soluzione numerica in [0 1]

Dinamica di coppia, continua

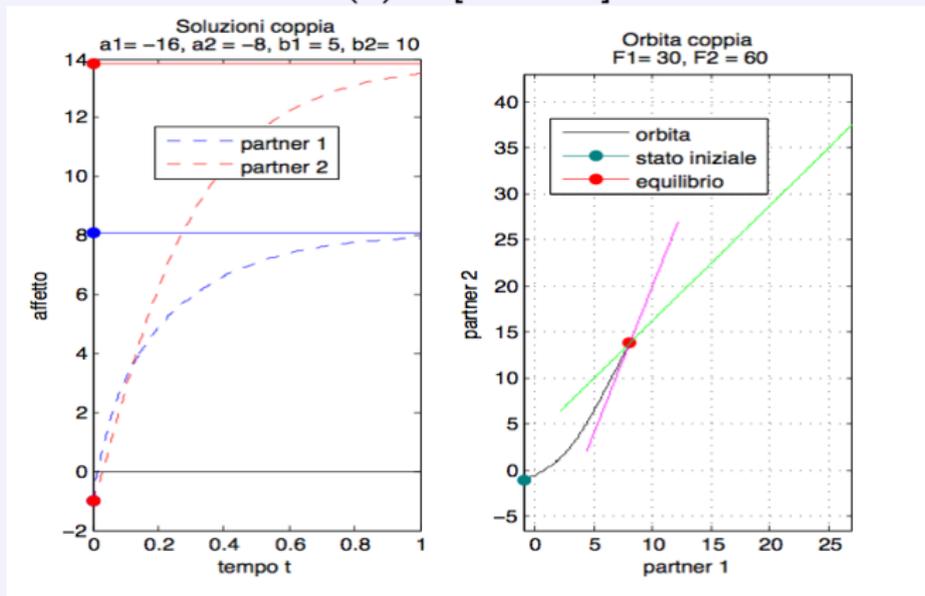
$$\ell(0) = [20 \ 10]$$



Simulazione numerica in $[0 \ 1]$

Dinamica di coppia, continua

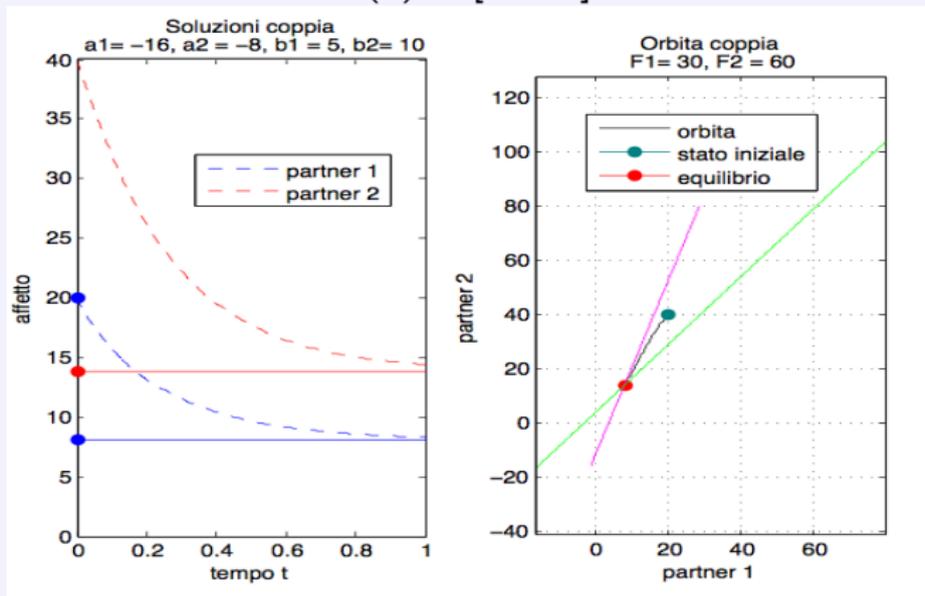
$$l(0) = [-1 \quad -1]$$



Simulazione numerica in $[0 \ 1]$

Dinamica di coppia, continua

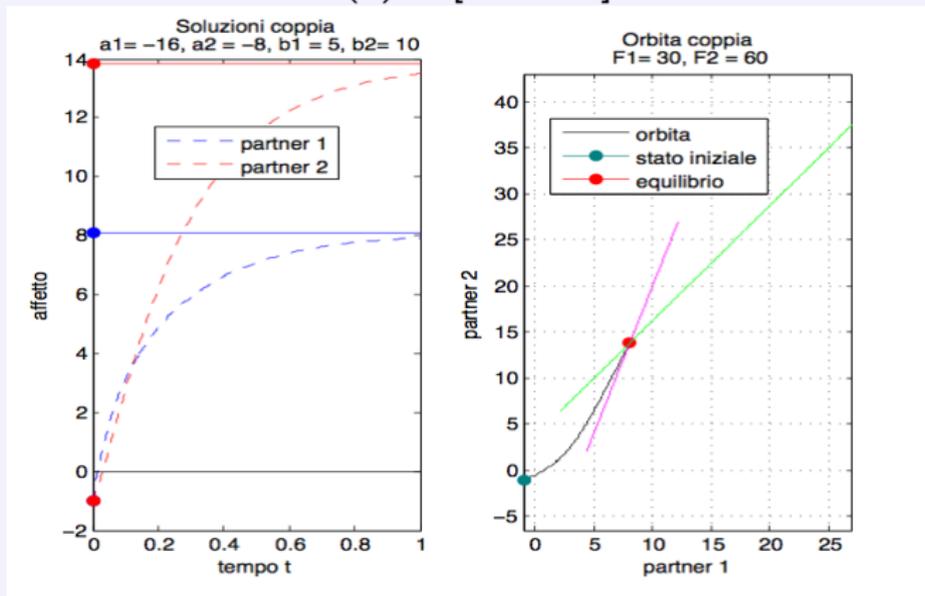
$$\ell(0) = [20 \ 40]$$



Simulazione numerica in $[0 \ 1]$

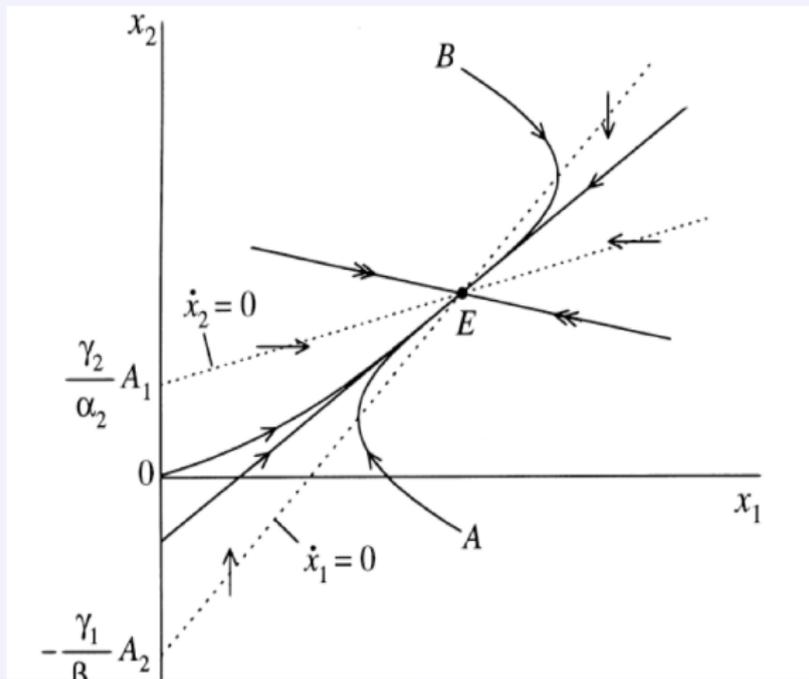
Dinamica di coppia, continua

$$l(0) = [-1 \quad -1]$$



Simulazione numerica in $[0 \ 1]$

Descrizione spazio degli stati del modello dinamica di coppia



Dinamica di coppia, continua

Il codice **lovedynamics.m** calcola e disegna le soluzioni del sistema (3) e ne disegna le orbite.

È possibile cambiare sia il punto di equilibrio (quindi implicitamente i parametri del sistema) sia il punto iniziale operando sul grafico con il cursore e trascinando i punti nella nuova posizione.

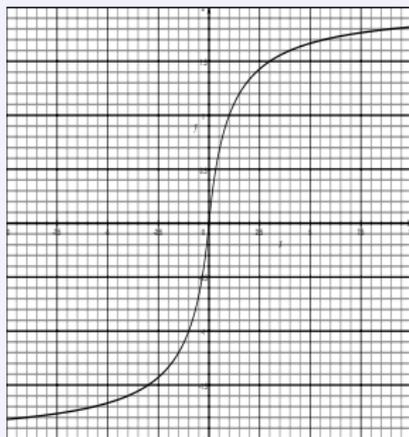
Osserva come cambiamo le soluzioni.

Modello non lineare dinamica di coppia

Per tener conto che la reazione di un individuo all'affetto del partner è limitata, possiamo introdurre le funzioni di reazione

$$R_i(\ell) = b_i \frac{\ell}{1 + |\ell|} \quad i = 1, 2,$$

il cui grafico con $b_i = 2$ risulta



Modello di dinamica coppia non lineare

Anche il fascino può variare nel tempo!!! Si ottiene così il seguente modello di coppia

$$\begin{cases} l_1'(t) = -a_1 l_1(t) + R_1(l_2(t)) + c_1 F_2(t) \\ l_2'(t) = -a_2 l_2(t) + R_2(l_1(t)) + c_2 F_1(t). \end{cases} \quad (4)$$

Definisco funzioni MATLAB

Con i seguenti comandi posso definire funzioni e disegnarne dei grafici

```
>>R=@(elle)2*elle/(1+abs(elle))  
>> fplot(r,[-5,5])
```

Definisci delle funzioni a tua scelta e disegna il loro grafico.

Simulazione numerica

Le soluzioni di (4) possono essere approssimate con

```
[t,elle]=solcoppiaNN(tspan,elle0,P1,P2,F,varF,R1,R2)
```

dove

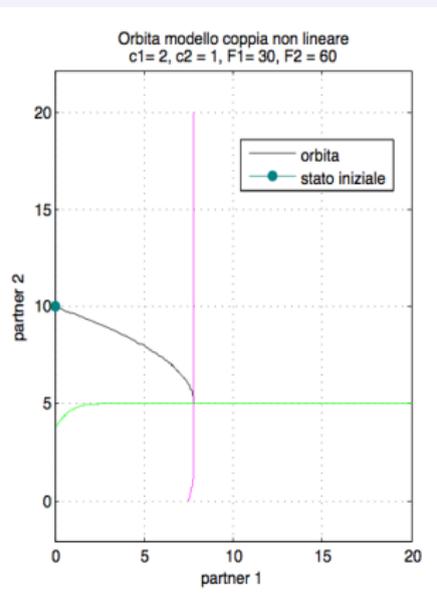
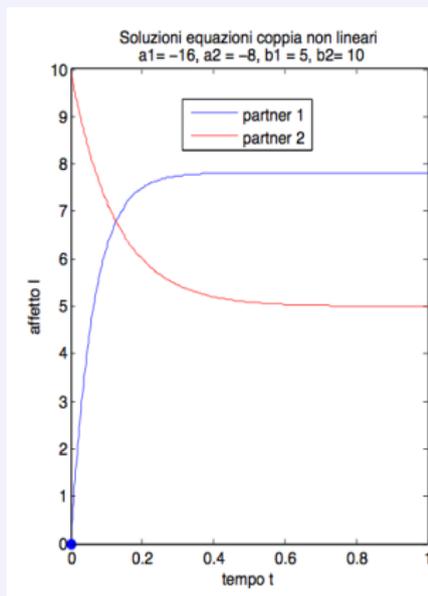
- $tspan = [t_0 \ t_f]$ è l'intervallo di integrazione;
- $elle0 = [\ell_1(t_0), \ell_2(t_0)]$ è lo stato iniziale;
- $P1$ vettore parametri partner 1;
- $P2$ vettore parametri partner 2;
- F funzione fascino $F(t) = [F_1(t) : F_2(t)]$
- $varF = 0$ corrisponde a fascino costante;
- $R1$ funzione reazione partner 1;
- $R2$ funzione reazione partner 2;
- $elle(:, 1), elle(:, 2)$ sono i valori approssimati delle soluzioni in t .

Esempio

Consideriamo il caso in cui i partner reagiscono allo stesso modo all'affetto e che il fascino sia costante.

```
>> P1=[16 5 1];  
>> P2=[8 10 1];  
>> R=@(elle) tanh(elle);  
>> fplot(R, [-5 5])  
>> F=@(t) [30; 60];  
>> varF=0;  
>> [t, elle]=solcoppiaNN([0 1], [0 10], P1, P2, F, varF, R, R);  
>> R=@(elle) elle./(1+abs(elle));  
>> fplot(R, [-5 5])  
>> [t, elle]=solcoppiaNN([0 1], [0 10], P1, P2, F, varF, R, R);
```

Risultati di simulazione numerica per il modello di coppia non lineare fascino costante



Simulazione dinamica di coppia, continua

Fascino costante ($\text{var}F = 0$). Poni $P1 = [2 \ 20 \ 2]$, $P2 = [1 \ 15 \ 1]$ e considera diverse funzioni di reazione e studia il comportamento delle soluzioni al variare dei valori iniziali. Considera, per esempio,

```
>> F=@(t) [6 ;4]
>> R1=@(elle)elle./(1+abs(elle));
>> varF=0;
>> elle0=[5 5];
>> [t,elle]=solcoppiaNN([0 10],elle0,P1,P2,F,varF,R1,R1);
```

con $elle0 = [0 \ 0]$, $[0 \ 20]$, $[20 \ 0]$, $[20 \ 10]$ e $elle0 = [-0.5 \ -0.5]$. Questo rapporto è robusto? Cosa accade con $elle0 = [-1 \ -1]$? Ripeti le simulazioni con altra funzione di reazione.

```
>> R=@(elle) tanh(elle);
>> elle0=[5 5];
>> [t,elle]=solcoppiaNN([0 10],elle0,P1,P2,F,varF,R,R);
```

Cosa succede con $elle0 = [-0.5 \ -0.5]$ e $elle0 = [-1 \ -1]$?

Simulazione dinamica di coppia, continua

Fascino costante ($\text{varF}=0$)

Poni $P1 = [16 \ 5 \ 1]$, $P2 = [8 \ 10 \ 1]$. Considera funzioni di reazione diverse per i partner e studia il comportamento delle soluzioni al variare dei valori iniziali. Considera, per esempio,

```
>> F=@(t) [30 ;60]
>> R1=@(elle)elle./(1+abs(elle));
>> R2=@(elle)elle;
>> varF=0;
>> elle0=[5 5];
>> [t,elle]=solcoppiaNN([0 2],elle0,P1,P2,F,varF,R1,R2);
```

con $elle0 = [0 \ 0]$, $[0 \ 20]$, $[20 \ 0]$, $[30 \ 30]$, $[20 \ 10]$ e $e//0 = [-0.5 \ -0.5]$.
Scambia le funzioni di reazione dei partner e descrivi il comportamento delle soluzioni.

Simulazione dinamica di coppia, continua

Fascino variabile ($\text{var}F = 1$)

- Definisci la funzione fascino

```
>> F=@(t) [10*cos(t)+5;(20*cos(t)+10)];
```

e studia il comportamento delle soluzioni al variare del dato iniziale.
Considera, per esempio,

```
>> P1=[2 20 2];
```

```
>> P2=[1 15 1];
```

```
>> R1=@(elle)elle./(1+abs(elle));
```

```
>> varF=1
```

```
>> [t,elle]=solcoppiaNN([0 10],[10 10],P1,P2,F,varF,R1,R1);
```

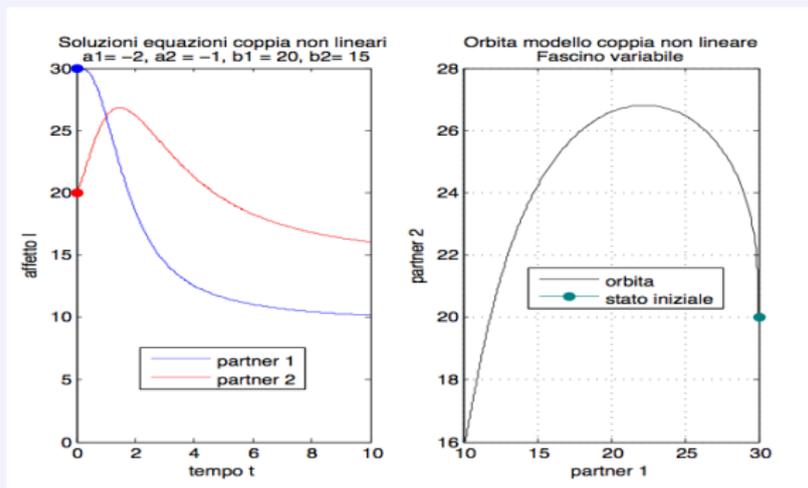
- Proponi altre funzioni fascino e studia la dinamica. Sia

```
>> F=@(t) [10*cos(t)+5;(20*cos(t)+10)];
```

Come descriveresti il rapporto di coppia in questo caso?

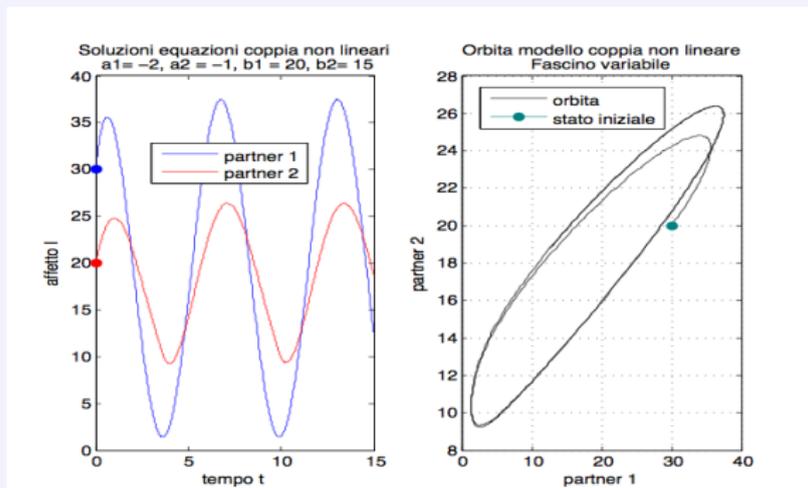
Risultati di simulazione numerica per il modello di coppia non lineare con fascino variabile

Con $R_1(\ell) = R_2(\ell) = \frac{\ell}{1+|\ell|}$ e $F_1(t) = \frac{(10+20t)}{(1+t^2)}$, $F_2(t) = \frac{(20+5t)}{(1+t^2)}$ si ottengono i seguenti risultati



Risultati di simulazione numerica per il modello di coppia non lineare con fascino variabile

Con $R_1(\ell) = R_2(\ell) = \frac{\ell}{1+|\ell|}$ e $F_1(t) = 10 * \cos(t) + 5$,
 $F_2(t) = 20 * \cos(t) + 10$ si ottengono i seguenti risultati



Modello predatore-preda

Una popolazione non vive in isolamento e può incontrare degli antagonisti.

I modelli **predatore-preda** furono proposti ed analizzati dal matematico italiano Vito Volterra (1860- 1940) e dallo statistico americano Alfred Lotka (1880-1949) per descrivere l'**interazione** tra due popolazioni. Sono anche chiamati modelli di **Lotka-Volterra**.



Volterra



Lotka

Modello predatore-preda, continua

Indicati con $u_1(t)$ e $u_2(t)$ rispettivamente le prede e i predatori all'istante t , il più semplice modello per descrivere l'**interazione** tra le due specie o **competizione esterna** è

$$\begin{cases} u_1'(t) = r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) \\ u_2'(t) = r_2 u_2(t) - c_{21} u_1(t) u_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

dove

- r_1 è il fattore di crescita della preda in assenza del predatore,
- r_2 è il fattore di crescita della predatore in assenza della preda,
- c_{12} descrive l'effetto sulla preda della cattura da parte del predatore,
- c_{21} descrive l'effetto della cattura della preda sul predatore.

Modello predatore-preda, continua

Se $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$ assumiamo che la preda in assenza del predatore trovi il suo sostentamento e possa svilupparsi e che il predatore in assenza della preda sia destinato all'estinzione.

Inoltre l'effetto dell'interazione predatore-preda porterà ad una decrescita della preda con $c_{12} > 0$, mentre $c_{21} < 0$ descrive il beneficio del predatore che deve la sua sopravvivenza alla presenza della preda.

Volendo tener conto anche di un prelievo costante, si ottiene il modello

$$\begin{cases} u_1'(t) &= r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) - d u_1(t) \\ u_2'(t) &= r_2 u_2(t) - c_{21} u_1(t) u_2(t) - d u_2(t), \end{cases} \quad (6)$$

con $d > 0$.

Modello predatore-preda, continua

Negli anni Venti, il matematico Vito Volterra propone i modelli (5) e (6) per risolvere un problema "pratico" che il genero Umberto D'Ancona, biologo all'Università di Siena, gli aveva sottoposto.

Le statistiche relative alla pesca nell'Adriatico settentrionale indicavano che, durante il periodo 1905-1923, la percentuale dei pesci grandi (= predatori) nel pesce pescato era aumentata negli anni della guerra e in quelli immediatamente successivi, dove c'era stata una riduzione dell'attività di pesca (=prelievo).

Perchè l'incremento riguardava solo i predatori e non le prede?

Analizzando i modelli, Volterra riuscì a spiegare in maniera esauriente questo fatto empirico.

Modello predatore-preda, continua

Volendo introdurre anche gli effetti della competizione all'interno dei due gruppi prede e predatori a causa di limitate risorse, si ottiene il modello di predatore-preda con **competizione interna**

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'(t) = r_1 u_1(t) \left(1 - \frac{u_1(t)}{k_1}\right) - c_{12} u_1(t) u_2(t) \\ \quad = r_1 u_1(t) - c_{11} u_1^2(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) \\ \\ u_2'(t) = r_2 u_2(t) \left(1 - \frac{u_2(t)}{k_2}\right) - c_{21} u_1(t) u_2(t), \\ \quad = r_2 u_2(t) - c_{21} u_1(t) u_2(t) - c_{22} u_2^2(t) \end{array} \right. \quad (7)$$

con k_1, k_2 costanti positive che descrivono la capacità limitata delle risorse per prede e predatori. La competizione all'interno del gruppo può essere descritta anche con i parametri $c_{ii} = \frac{r_i}{k_i}, i = 1, 2$.

Se $c_{12} k_1 / r_1 = c_{21} k_2 / r_2$ l'interazione tra i due gruppi sarà simmetrica, mentre la scelta $c_{12} k_1 / r_1 \neq c_{21} k_2 / r_2$ favorirà un gruppo rispetto all'altro.

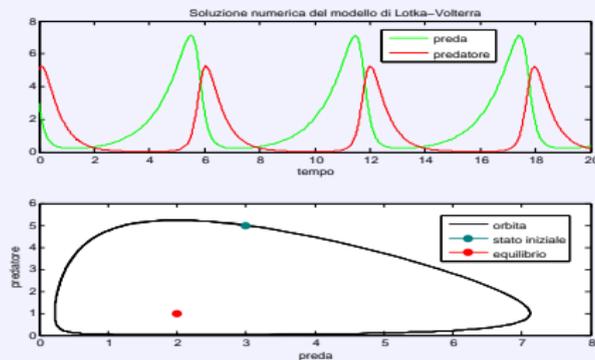
Simulazione numerica del modello di Lotka-Volterra

Usa il codice **LV.m** per il risolvere il sistema (5) con i seguenti dati
 $t_0 = 0$, $t_f = 20$, $r_1 = 1$, $c_{12} = 1$, $r_2 = -2$, $c_{21} = -1$ e
 $u_1(0) = 3$, $u_2(0) = 5$.

- Osserva le traiettorie di $u_1(t)$, $u_2(t)$ al variare del tempo e descrivi il loro comportamento.
- Osserva l'orbita descritta dal punto $(u_1(t), u_2(t))$ nel piano degli stati come funzione del tempo. Qual è proprietà presenta?
- Cambia il valore della popolazione iniziale $u_1(0)$, $u_2(0)$ e osserva i nuovi grafici e le nuove orbite.
- Pensi che ci possa essere un valore iniziale della popolazione per cui prede e predatori si estinguono?
- C'è un valore delle popolazione diverso da zero che non cambia nel tempo (=soluzione di equilibrio)?

Risultati di simulazione numerica Lotka-Volterra

$t_0 = 0$, $t_f = 20$, $r_1 = 1$, $c_{12} = 1$, $r_2 = -2$, $c_{21} = -1$ e $u_1(0) = 3$, $u_2(0) = 5$



Lotka-Volterra, continua

- Disegna diverse traiettorie e orbite del sistema (5) cambiando i valori dei parametri $r_1 > 0$, $c_{12} > 0$, $r_2 < 0$, $c_{21} < 0$.
- Considera il modello (6) e studia il comportamento delle soluzione per effetto del prelievo. Come cambia l'equilibrio rispetto al caso senza prelievo? I predatori all'equilibrio sono aumentati o diminuiti per effetto del prelievo?

Lotka-Volterra, continua

Il codice **predprey.m** calcola le soluzioni del sistema (5) con i seguenti valori dei parametri $r_1 = 1$, $c_{12} = 1/300$, $r_2 = -1$, $c_{21} = -1/200$ e dato iniziale $u_1(0) = 400$, $u_2(0) = 100$. Il punto rosso rappresenta l'equilibrio non nullo, mentre il punto verde rappresenta il punto iniziale. Il programma calcola anche il periodo delle soluzioni. È possibile cambiare sia il punto di equilibrio (quindi implicitamente i parametri c_{12} , c_{21}) sia il punto iniziale operando sul grafico con il cursore e trascinando i punti nella nuova posizione.

- Osserva come cambia il periodo se il punto di equilibrio ed il punto iniziale si avvicinano sempre più. Sai riconoscere il valore del periodo? Dipende dalla posizione dei punti o dalla loro distanza?
- Osserva come cambia il periodo se il punto di equilibrio ed il punto iniziale si allontanano sempre più. La lunghezza del periodo cresce o diminuisce quando aumenta la distanza tra i due punti? Il periodo può diventare più piccolo del valore che ha vicino all'equilibrio?

Lotka-Volterra, continua

Consideriamo ora il sistema (7) che considera anche la competizione interna (= autoregolazione) alle specie. Usa il codice **LV.m** per studiare sperimentalmente la dinamica con $r_1 = 1, r_2 = 2$.

- Poni $c_{11} = 1/15, c_{12} = 1/5, c_{21} = 1/9, c_{22} = 1/10$ e risolvi il sistema con diversi dati iniziali. Quanti equilibri positivi ci sono? Che significato hanno dal punto di vista biologico? Come si comporta la soluzione? Può una specie estinguersi a spese dell'altra specie? Come sono cambiate le soluzioni rispetto a quelle del modello di Lotka-Volterra senza competizione interna?
- Poni $c_{11} = 1/25, c_{12} = 1/10, c_{21} = 1/10, c_{22} = 1/5$ e risolvi il sistema con diversi dati iniziali. Quanti equilibri positivi ci sono? Che significato hanno dal punto di vista biologico? Come si comportano le soluzioni? Può una specie estinguersi a spese dell'altra specie? Come sono cambiate le soluzioni rispetto a quelle del caso precedente?

Lotka-Volterra, continua

Considera sempre il sistema (7) con $r_1 = 1$, $r_2 = 2$.

- Poni $c_{11} = 1/15$, $c_{12} = 1/5$, $c_{21} = 2/5$, $c_{22} = 1/10$ e risolvi il sistema con diversi dati iniziali. Quanti equilibri positivi ci sono? Che significato hanno dal punto di vista biologico? Come si comporta la soluzione? Considera, per esempio, $u(0) = [10, 5]$ e $u(0) = [20, 30]$. Osserva i risultati e descrivi il diverso comportamento.
- Poni $c_{11} = 1/4$, $c_{12} = 1/10$, $c_{21} = 1/3$, $c_{22} = 2/5$ e risolvi il sistema con diversi dati iniziali. Quanti equilibri positivi ci sono? Come si comportano le soluzioni? Può una specie estinguersi a spese dell'altra specie? Come sono cambiate le soluzioni rispetto a quelle del caso precedente?

Abbiamo sperimentato il **principio di esclusione** o **coesistenza** tra due specie. Si può dimostrare che la coesistenza tra due specie si verifica quando $c_{11}c_{22} > c_{12}c_{21}$. Sai dare un significato biologico a tale condizione?

Lotka-Volterra, continua

Consideriamo ora il sistema (7) che considera anche la competizione interna alle specie. Usa il codice **LV.m** per studiare sperimentalmente la dinamica con $r_1 = 1$, $c_{12} = 1/300$, $r_2 = -1$, $c_{21} = -1/200$ e dato iniziale $u_1(0) = 400$, $u_2(0) = 100$.

- Poni

$r_1 = 1$, $c_{11} = 1/100$, $c_{12} = 1/200$, $r_2 = -1$, $c_{21} = -1/400$, $c_{22} = 0$ e risolvi il sistema con dato iniziale $u_1(0) = 100$, $u_2(0) = 200$ in $[0, 6]$. Quanti equilibri ci sono? Sono tutti significativi dal punto di vista biologico? Come si comporta la soluzione? Cambia punto iniziale e osserva il comportamento delle soluzioni. Può una specie estinguersi? Come sono cambiate le soluzioni rispetto a quelle del modello di Lotka-Volterra senza competizione interna nella preda?

Lotka-Volterra, continua

- Poni

$r_1 = 1$, $c_{11} = 1/800$, $c_{12} = 1/200$, $r_2 = -1$, $c_{21} = -1/400$, $c_{22} = 0$ e risolvi il sistema con dato iniziale $u_1(0) = 100$, $u_2(0) = 200$ in $[0, 20]$. Quanti equilibri ci sono? Sono tutti significativi dal punto di vista biologico? Come si comporta la soluzione? Cambia punto iniziale e osserva il comportamento delle soluzioni che ottieni. Considera il punto iniziale $u_1(0) = 810$, $u_2(0) = 10$ osserva le soluzioni e descrivi ciò che vedi.

Lotka-Volterra, continua

- Poni $r_1 = 1$, $c_{11} = 1/800$, $c_{12} = 1/200$, $r_2 = -1$, $c_{21} = -1/400$, $c_{22} = -1/800$ e risolvi il sistema con dato iniziale $u_1(0) = 100$, $u_2(0) = 100$ in $[0, 35]$. Quanti equilibri ci sono? Sono tutti significativi dal punto di vista biologico? Come si comporta la soluzione? Cambia punto iniziale e osserva il comportamento delle soluzioni. Considera in particolare il punto iniziale $u_1(0) = 810$, $u_2(0) = 10$ osserva le soluzioni e descrivi ciò che vedi.

Lotka-Volterra, continua

Il codice **competizione.m** calcola inizialmente le soluzioni del sistema (7) con i seguenti valori dei parametri $r_1 = 1$, $c_{11} = 1/4$, $c_{12} = 1/10$, $r_2 = 2/5$, c_{22} , $c_{21} = 1/3$ e dato iniziale $u_1(0) = 20$, $u_2(0) = 10$ nell'intervallo $[0, 100]$. I punti rossi rappresentano gli equilibri in cui solo una singola specie sopravvive, mentre il punto verde rappresenta il punto iniziale. È possibile cambiare uno dei punti di equilibrio (quindi implicitamente i soli parametri c_{12} , c_{21}) sia il punto iniziale operando sul grafico con il cursore e trascinando i punti nella nuova posizione.

- Osserva come cambiano le orbite al variare del dato iniziale analizzando se le due specie possono coesistere (punto di equilibrio con entrambe le componenti positive) o se una esclude l'altra (punto di equilibrio con unica componente diversa da zero)
- Osserva come cambia la dinamica se sposti un'equilibrio e successivamente il punto iniziale.

Lotka-Volterra, continua

Modifica il codice **predprey.m** per studiare il comportamento delle soluzioni del sistema il sistema

$$\begin{cases} u_1'(t) &= u_1(t)\left(1 - \frac{u_1(t)}{K_1}\right)\left(1 - \frac{u_2(t)}{u^*_2}\right) \\ u_2'(t) &= -u_2(t)\left(1 - \frac{u_1(t)}{u^*_1}\right) \end{cases} \quad (8)$$

Per evitare di introdurre un altro parametro poni $K_1 = 2u_1(0)$. Cosa succede alle traiettorie? Le soluzioni sono ancora periodiche? Cosa accade al periodo?

Simulazione numerica del modello di Leslie-Gower

Usa il codice **LG.m** per il risolvere numericamente il seguente modello di Leslie-Gower (1960)

$$\begin{cases} u_1'(t) = r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) \\ u_2'(t) = r_2 u_2(t) - c_{21} \frac{u_2(t)^2}{u_1(t)}, \end{cases} \quad (9)$$

con i seguenti dati $t_0 = 0$, $t_f = 1$, $r_1 = 1.5$, $c_{12} = 0.5$, $r_2 = 6$, $c_{21} = 1$ e $u_1(0) = 15$, $u_2(0) = 25$.

- Osserva le traiettorie di $u_1(t)$, $u_2(t)$ al variare del tempo e descrivi il loro comportamento.
- Osserva l'orbita descritta dal punto $(u_1(t), u_2(t))$ nel piano degli stato come funzione del tempo. Cosa osservi? Come sono cambiate le soluzioni rispetto a quelle del modello di Lotka-Volterra?

Leslie-Gower, continua

- Cambia la popolazione iniziale, osserva i nuovi grafici e descrivi il comportamento che osservi. Considera per esempio $u_1(0) = 5, u_2(0) = 2$ e $u_1(0) = 50, u_2(0) = 5$.
- C'è un valore diverso da zero che non cambia nel tempo (soluzione stazionaria)?
- Pensi che in questo caso ci possa essere un valore iniziale diverso da zero della popolazione per cui le prede o i predatori si estinguono?

Leslie-Gower, continua

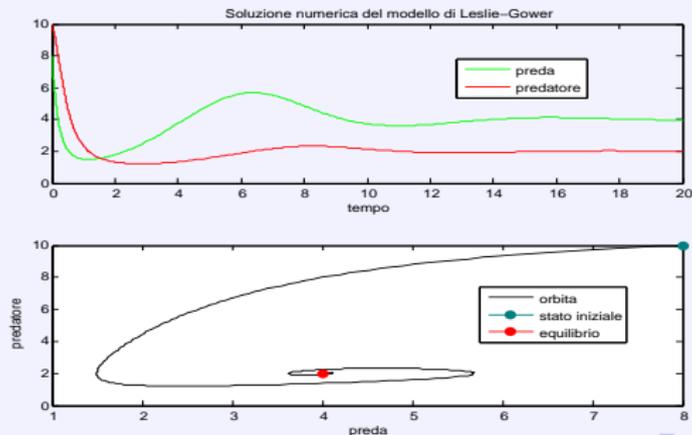
Cambia i parametri come segue

- $t_0 = 0, t_f = 5, r_1 = 1.5, c_1 = 0.5, r_2 = 3, c_2 = 1$ e $u_1(0) = 5, u_2(0) = 3$;
- $t_0 = 0, t_f = 5, r_1 = 1, c_1 = 0.5, r_2 = 0.5, c_2 = 1$ e $u_1(0) = 30, u_2(0) = 20$;
- $t_0 = 0, t_f = 5, r_1 = 1, c_1 = 0.5, r_2 = 0.5, c_2 = 1$ e $u_1(0) = 0.3, u_2(0) = 0.2$;

e descrivi il comportamento delle soluzioni.

Risultati di simulazione numerica Leslie-Gower:

$t_0 = 0, t_f = 20, r_1 = 1, c_{12} = 0.5, r_2 = 0.5, c_{21} = 1$ e $u_1(0) = 8, u_2(0) = 10$



Modello di epidemia di Kermack-McKendrick

Consideriamo una popolazione isolata e vogliamo studiare la propagazione in essa di una malattia infettiva. Presentiamo il modello base proposto nel 1927 dai biomatematici Kermack e McKendrick. Nonostante la sua semplicità si è rivelato utile per descrivere la diffusione di epidemie (peste di Bombay nel 1905).

Suddividiamo la popolazione in

- **suscettibili** $S(t)$ individui che possono contrarre la malattia,
- **infetti** $I(t)$ individui che hanno la malattia in pieno sviluppo o incubazione non isolati,
- **rimossi** $R(t)$ individui in isolamento, morti o immunizzati.

Il passaggio da una classe all'altra descrive l'evolversi della malattia: il passaggio dalla classe dei suscettibili agli infetti descrive lo sviluppo della malattia, mentre il passaggio dalla classe degli infetti ai rimossi descrive la guarigione ma anche la letalità della malattia. Si suppone che chi ha

Modello di epidemia di Kermack-McKendrick

Le equazioni sono

$$\begin{cases} S'(t) = -cS(t)I(t) \\ I'(t) = -rI(t) + cS(t)I(t), \\ R'(t) = rI(t) \end{cases} \quad (10)$$

dove $c > 0$ è il tasso di infezione e misura la rapidità del contagio e $r > 0$ è il tasso di rimozione (guarigione, morte etc).

La popolazione totale non cambia nel tempo e la terza equazione può essere rimossa.

Sono di equilibrio tutte le configurazioni prive di malati.

Dallo studio di tale modello si può osservare che un'epidemia inizia se il numero di suscettibili supera la soglia $\frac{r}{c}$. Alzando r diminuisce il tempo durante il quale un malato può contagiare altre persone. Diminuendo c

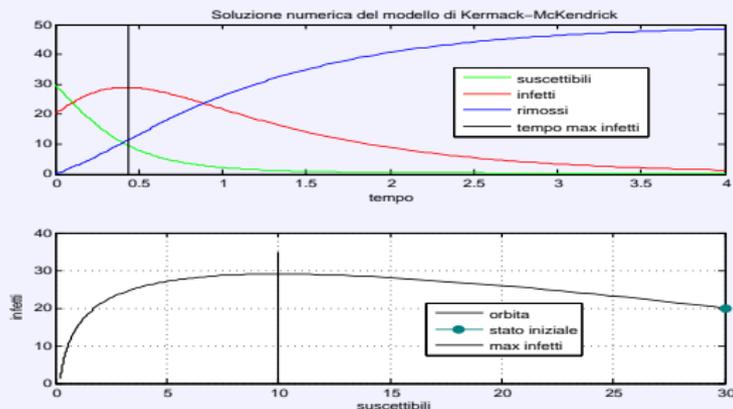
Simulazione numerica del modello di Kermack-McKendrick

Usa il codice **KK.m** per risolvere numericamente il sistema (10) in $[0, 1]$ con $r = 1$, $c = 0.1$ e dati iniziali $S(0) = 40, I(0) = 20, R(0) = 0$.

- Osserva le traiettorie di $S(t), I(t), R(t)$ al variare del tempo e descrivi il loro comportamento.
- Cambia i dati iniziali e osserva i nuovi grafici. Descrivi il diverso comportamento delle soluzioni quando $S(0) > \frac{r}{c}$ o $S(0) \leq \frac{r}{c}$?
- Considera intervalli di tempo sufficientemente grandi e osserva sperimentalmente che gli infetti tendono a zero, mentre i suscettibili rimangono positivi. Si può infatti provare che la malattia si estingue senza colpire tutti.
- C'è un valore del tempo per cui il numero degli infetti risulta massimo per ogni istante iniziale?
- Modifica i parametri di r, c e osserva il comportamento delle soluzioni.

Risultati simulazione numerica modello di KK

$t_0 = 0, t_f = 1, d = 1, c = 0.1$ e $S(0) = 30, I(0) = 20, R(0) = 0, t_e = 4.3483e - 01$



Kermack-McKendrick, continua

Usa il codice **KK3.m** per il risolvere numericamente il sistema

$$\begin{cases} S'(t) &= -cS(t)u_2(t) + dR(t) \\ I'(t) &= -rI(t) + cS(t)I(t), \\ R'(t) &= rI(t) - dR(t) \end{cases} \quad (11)$$

che prevede che parte dei rimossi possano ridiventare suscettibili.

Kermack-McKendrick, continua

Scegli per esempio $r = 1$, $c = 0.1$ e $d = 0.4$ dati iniziali
 $S(0) = 10, I(0) = 30, R(0) = 0$.

- Osserva le traiettorie di $S(t), I(t), R(t)$ al variare del tempo e descrivi il loro comportamento.
- Cambia i dati iniziali e osserva i nuovi grafici. Descrivi il diverso comportamento delle soluzioni quando $S(0) > \frac{r}{c}$ o $S(0) \leq \frac{r}{c}$?
- Considera intervalli di tempo sufficientemente grandi e osserva sperimentalmente se gli infetti tendono a zero o meno. Cosa è cambiato rispetto al caso precedente? Si può concludere che l'infezione rimane attiva?
- Modifica i parametri di r, c, d e osserva il comportamento delle soluzioni.

Un semplice codice

Una **function** MATLAB per risolvere (1)-(2) con il metodo di Eulero in $tspan = [t_0 \ t_f]$ è

```
function [tt,uu]=EE(f,tspan,u0,N)
t0=tspan(1);
tf=tspan(end);
h=(tf-t0)/N;
t=t0;
u=u0;
tt=t;
uu=u;
while t < tf
    uder = f(t,u);
    t = t + h;
    u = u + h*uder;
    tt=[tt,t];
    uu=[uu,u];
end
```

Esercizio

Si vuole risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = -u_1(t) \\ u_1(0) = u01 \\ u_2(0) = u02. \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad (12)$$

Dopo aver definito la funzione *fode*, usa **EE** per risolvere il sistema (12)

```
>>fode=@(t,u) [u(2);-u(1)]  
>>[t,u]=EE(fode,[0 2*pi],[1 1],100);
```

e disegna il grafico delle soluzioni

```
>> plot(t,u(:,1),'r',t,u(:,2),'b')
```

Esercizio, continua

- Disegna l'orbita descritta dal punto $(u_1(t), u_2(t))$ nel piano come funzione del tempo. Che figura geometrica ottieni?
- Varia N ed osserva le orbite che ottieni.
- Usa la **function ode45** del MATLAB per risolvere il sistema (12)

```
>>[t,u]=ode45(fode,[0 2*pi],[1 1]);
```

Disegna le soluzioni. La suddivisione non è uniforme, dove risulta più fine?

Conclusioni

La matematica ha visto probabilmente la sua nascita e la sua evoluzione attraverso una continua interazione col mondo reale in un processo di **astrazione** e **applicazione**.

Nuovi problemi del mondo reale richiedono lo sviluppo di nuove idee matematiche ed algoritmiche e nuove idee matematiche ed algoritmiche forniscono strumenti potenti per la comprensione di fenomeni reali.