Piano Lauree Scientifiche "Matematica e Statistica" 2010-11

Modelli matematici e realtà:
Laboratorio sulle equazioni differenziali - prima parte

R. Vermiglio[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica - Università degli Studi di Udine

Le equazioni differenziali

Le Equazioni Differenziali Ordinarie (EDO) sono relazioni tra delle funzioni incognite e le loro derivate.

Se indichiamo con $u(t)$ la funzione incognita, allora un'**equazione differenziale ordinaria** è

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_f \tag{1}$$

Sotto opportune ipotesi sulla funzione f, che descrive la legge di variazione, **esiste ed è unica** la soluzione di (1) che soddisfa alle condizioni iniziali

$$u(t_0) = u_0 \tag{2}$$

Quando ci sono più equazioni si parla di **sistema** di EDO.

I sistemi di EDO rappresentano uno dei **modelli matematici** più importanti nella descrizione della dinamica di fenomeni reali.

Modello numerico

In generale è difficile ottenere una formula esplicita per la soluzione del problema a valori iniziali (1)-(2).

Abbiamo bisogno dei metodi per l'approssimazione delle soluzioni che possono essere implementati sul calcolatore $\rightsquigarrow$ **modello numerico**.

L'introduzione e il largo impiego dei calcolatori nel campo scientifico ha consentito di trattare problemi di dimensioni sempre maggiori e sempre più complessi.

Allo stesso tempo ha reso necessario lo sviluppo e l'analisi di metodi di risoluzione computazionalmente più efficienti.

Il metodo di Eulero

Suddividiamo $[t_0, t_f]$ in N sottointervalli $[t_n, t_{n+1}]$ di ampiezza $h = \frac{t_f - t_0}{N}$, i.e.

$$t_0 < t_1 < ... < t_N = t_f, \quad t_{n+1} = t_n + h, n = 0, 1, ..., N.$$

Da

$$u'(t_0) = f(t_0, u_0) \approx \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}$$

abbiamo che

$$u(t_0 + h) \approx u_1 = u_0 + hu'(t_0) = u_0 + hf(t_0, u_0).$$

Applicando ricorsivamente tale formula, otteniamo

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n \geq 0,$$

dove

$$u_n \approx u(t_n), n = 1, 2, .., , N.$$

Tale tecnica di approssimazione è il metodo di Eulero . È un esempio di **modello numerico**.

Altri algoritmi più accurati ed efficienti sono stati sviluppati e studiati per approssimare le soluzioni di equazioni differenziali ordinarie.

Esempio: In MATLAB si può usare per esempio $ode45$

Nell'attività di laboratorio impareremo a disegnare i grafici delle funzioni e useremo dei programmi che fanno uso delle funzioni (**function**) che il MATLAB mette a disposizione per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Nella parte finale, impareremo a scrivere una **function** per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziali ordinarie con il metodo di Eulero.

Equazione logistica

Considera il modello di popolazione di Verlhust (equazione logistica)

$$u'(t) = r u(t)(1 - \frac{u(t)}{k}) = r u(t) - \mathbf{c} u(t)^2, \quad t \geq 0 \tag{3}$$

dove $r > 0$ rappresenta il tasso di crescita e $k > 0$ la capacità. Il parametro $\mathbf{c} = \frac{r}{k} > 0$ descrive la competizione interna.

Utilizza la **function** del MATLAB **plot** per disegnare il grafico della soluzione di (3) con $u(0) = u_0$

$$u(t) = \frac{k u_0 e^{rt}}{k - u_0(e^{rt} - 1)} = \frac{k}{1 + k_0 e^{-rt}}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

dove $k_0 = \frac{k - u_0}{u_0}$, per diversi valori dei parametri r, k, u_0.

Verifica che (4) è soluzione di (3) con $u(0) = u_0$.

Simulazione numerica dell'equazione logistica

La **function**

$$[tout, uout, ustar] = sologistica(tspan, u0, r, k, p, d)$$

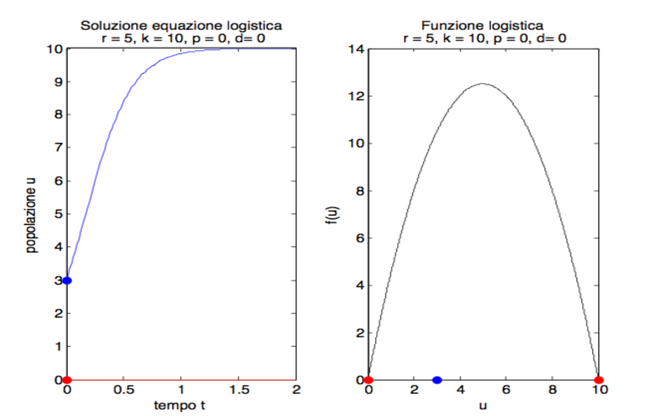
calcola un'approssimazione della soluzione del problema

$$\begin{cases} u'(t) = r u(t)(1 - \frac{u(t)}{k}) - d u(t) - \mathbf{p}, & t \in [t_0, t_f], \\ u(t_0) = u0 \end{cases} \tag{5}$$

dove $tspan = [t_0 \ \ t_f]$, $u0$ è il valore iniziale, $r > 0$ rappresenta il tasso di crescita, $k > 0$ la capacità, $d \geq s0$ il tasso di migrazione e $\mathbf{p} \geq 0$ il prelievo. Il vettore *uout* contiene i valori approssimati della soluzione di (5) nei punti del vettore *tout*, *ustar* contiene i valore dei punti di equilibrio. Inoltre **sologistica** disegna i grafici della soluzione e di $f(u) = r u(1 - \frac{u}{k}) - d u - \mathbf{p}$.

Esempio

>>[tout,uout,ustar] = sologistica([0 2],3,5,10,0,0)



Soluzione equazione logistica (3) con $r = 5$, $k = 10$

Equazione logistica, continua

Poni $\mathbf{p} = 0$ e $d = 0$ e usa **sologistica** per simulare numericamente il comportamento delle soluzioni di (3)

- Come si comporta la soluzione se il valore iniziale $u0 = 0$ e $u0 = k$?
- Come si comporta la soluzione per valori iniziali $u0$ tali che $0 < u0 < k$?
- Come si comporta la soluzione per valori iniziali $u0$ tali che $u0 > k$?
- $u_1 = 0$ e $u_2 = k$ si chiamano punti di equilibrio. Perchè, secondo te, hanno questo nome?
- Varia i parametri r, k e descrivi il comportamento delle soluzioni.

Equazione logistica con migrazione

Vogliamo tener conto di una migrazione di una frazione $d > 0$ della popolazione per unità di tempo. Poni $p = 0$ e studia il comportamento delle soluzioni con la **function sologistica** con $0 < d < r$.

- Varia il valore iniziale $u0$. Osserva i valori di equilibrio $ustar = [u_1, u_2]$. Ci sono due equilibri $0 < u_1 < u_2 < k$? Verifica che $u_2 = k(1 - \frac{d}{r})$.
- Come si comporta la soluzione se il valore iniziale $u0 = 0$ o $u0 = u_2$?
- Come si comporta la soluzione per valori iniziali $u0$ tali che $0 < u0 < u_2$?
- Come si comporta la soluzione per valori iniziali $u0$ tali che $u0 > u_2$?
- Cosa è cambiato rispetto all'equazione senza migrazione?
- Varia i parametri r, k, d e descrivi il comportamento delle soluzioni.

La presenza della migrazione non ha modificato il comportamento qualitativo delle soluzioni, ma ha abbassato il valore dell'equilibrio non nullo u_2, che è positivo solo se $0 < d < r$.

Equazione logistica con prelievo

Vogliamo tener conto di una riduzione dovuta a un prelievo $\mathbf{p} > 0$ costante nel tempo (es. pesca o caccia). Poni $d = 0$ e studia il comportamento delle soluzioni con la **function sologistica**.
Sia $4\mathbf{p} < rk$.

- Varia il valore iniziale $u0$. Osserva i valori di equilibrio $ustar = [u_1, u_2]$. Ci sono due equilibri $0 < u_1 < u_2 < k$?
- Come si comporta la soluzione per valori iniziali $u0$ inferiori al valore critico u_1? La popolazione si può estinguersi in tempo finito?
- Come si comporta la soluzione per valori iniziali $u0$ tali che $u_1 < u0 < u_2$?
- Come si comporta la soluzione per valori iniziali $u0$ tali che $u0 > u_2$?
- Varia i parametri $r, k, \mathbf{p}$ e descrivi il comportamento delle soluzioni.

Equazione logistica con prelievo, continua

Sia $4\mathbf{p} = rk$.

- Come si comporta la soluzione se $u_0 = \frac{k}{2}$? C'è un unico equilibrio?
- Come si comporta la soluzione se per valori iniziali inferiori al valore critico $\frac{k}{2}$? La popolazione si estingue in tempo finito?
- Come si comporta la soluzione per valori iniziali $u_0 > \frac{k}{2}$?
- Varia i parametri $r, k, \mathbf{p}$ e descrivi il comportamento delle soluzioni.

Equazione logistica con prelievo, continua

Sia $4\mathbf{p} > rk$.

- Osserva il comportamento delle soluzioni al variare u_0? La popolazione si estingue?
- Ci sono punti di equilibrio?
- Varia i parametri r, k, $\mathbf{p}$ e descrivi il comportamento delle soluzioni.

Equazione logistica con prelievo e/o migrazione, continua

Usa la **function sologistica** per simulare il comportamento delle soluzioni dell'equazione logistica (5) in presenza di migrazione e/o prelievo, variando il valore inziale $u0$ ed i parametri r, k, d, $\mathbf{p}$

Interpreta e commenta i risultati delle simulazioni alla luce di quanto ottenuto nei casi analizzati in precedenza.

Simulazione numerica delle vibrazioni di un sistema

La **function**

$$[t, u] = solvibrazioni(tspan, [s_0 v_0], \ell, k)$$

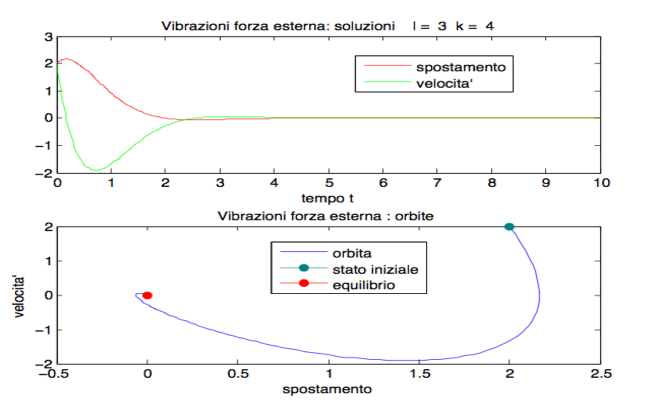
risolve le equazioni

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{\ell}{m} v(t) - \frac{k}{m} s(t) \end{cases}$$

nell' intervallo $tspan = [t_0 \ \ t_f]$, assegnati i valori iniziali $[s_0 \ \ v_0]$, la costante di smorzamento $\ell > 0$ e la costante elastica $k > 0$ e massa $m = 1$. Disegna inoltre il grafico delle soluzioni $s(t), v(t)$ e le relative orbite. Tali equazioni sono **autonome**.

Esempio simulazione numerica delle vibrazioni di un sistema

>>[t,u] = solvibrazioni([0 10],[2 2],3,4)



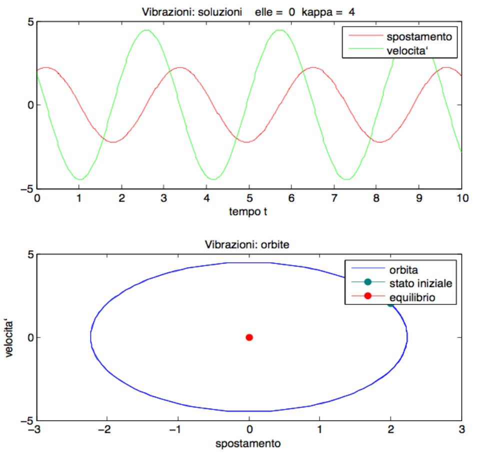
Vibrazioni, continua

Analizza il comportamento delle soluzioni e descrivi qualitativamente le orbite al variare dei valori iniziali $[s_0 \, v_0]$ nei seguenti casi

- $\ell = 0$ (non c'è resistenza viscosa)
- $0 < \ell < 2\sqrt{mk}$
- $\ell = 2\sqrt{mk}$
- $\ell > 2\sqrt{mk}$

Simulazione numerica $\ell = 0$: soluzione periodica

$t_0 = 0, t_f = 10, s_0 = 2, v_0 = 2, \ell = 0, k = 4$



Soluzione senza resistenza viscosa

Verifica che la soluzione è

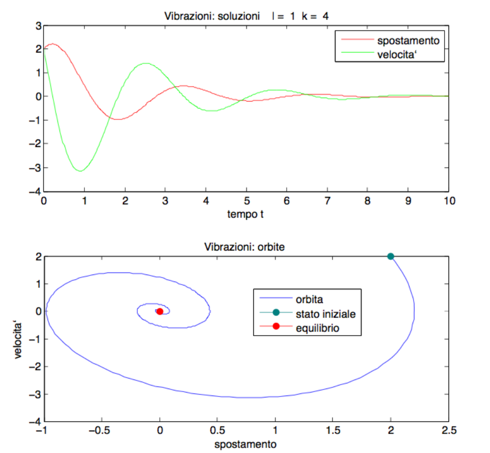
$$\left.\begin{aligned} s(t) &= s_0 cos(\omega_0 t) + \tfrac{v_0}{\omega_0} sen(\omega_0 t) \\ &= R sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned}\right. \quad , \quad t \geq 0$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, calcola l'ampiezza R e il periodo.

Il periodo dipende dalle condizioni iniziali?

Simulazione numerica $0 < \ell < 2\sqrt{mk}$: oscillazioni smorzate

$$t_0 = 0, t_f = 10, s_0 = 2, v_0 = 2, \ell = 1, k = 4$$



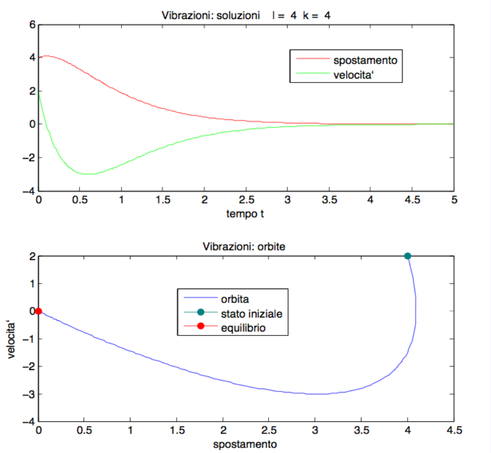
Soluzione nel caso $0 < \ell < 2\sqrt{mk}$

In questo caso il moto della particella è oscillatorio ma l'ampiezza delle oscillazioni si riduce e tende a zero al crescere di t :

OSCILLAZIONI SMORZATE

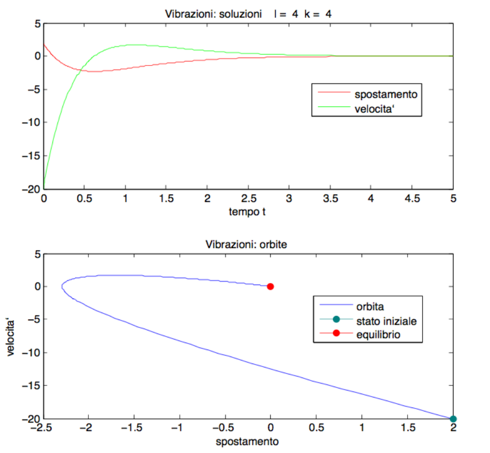
Simulazione numerica $\ell = 2\sqrt{mk}$: smorzamento critico

$t_0 = 0, t_f = 5, s_0 = 4, v_0 = 2, \ell = 4, k = 4$



Simulazione numerica $\ell = 2\sqrt{mk}$: smorzamento critico

$$t_0 = 0, t_f = 5, s_0 = 2, v_0 = -20, \ell = 4, k = 4$$



Soluzione $\ell = 2\sqrt{mk}$

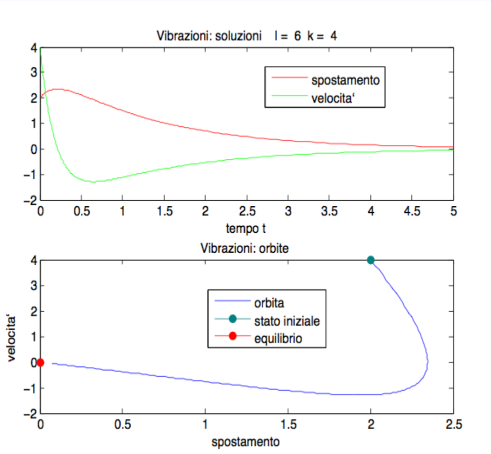
In questo caso il moto della particella NON è oscillatorio, ma tende a zero al crescere di t.

La particella può attraversare la posizione di equilibrio al più una volta e dipende dalle condizioni iniziali.

SMORZAMENTO CRITICO

Simulazione numerica $\ell > 2\sqrt{mk}$: smorzamento supercritico

$$t_0 = 0, t_f = 5, s_0 = 2, v_0 = 4, \ell = 6, k = 4$$



Soluzione $\ell > 2\sqrt{mk}$

Anche in questo caso il moto della particella NON è oscillatorio ma tende a zero al crescere di t.

La particella può attraversare la posizione di equilibrio al più una volta e dipende dalle condizioni iniziali.

SMORZAMENTO SUPERCRITICO

Forza esterna

Supponiamo che la particella sia anche soggetta a una forza esterna che dipende dal tempo: $f(t) = Mcos(\omega t)$. Le equazioni diventano

$$\begin{cases} s'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{\ell}{m} v(t) - \frac{k}{m} s(t) + Mcos(\omega t) \end{cases} \tag{6}$$

Tali equazioni sono dette **non autonome**.

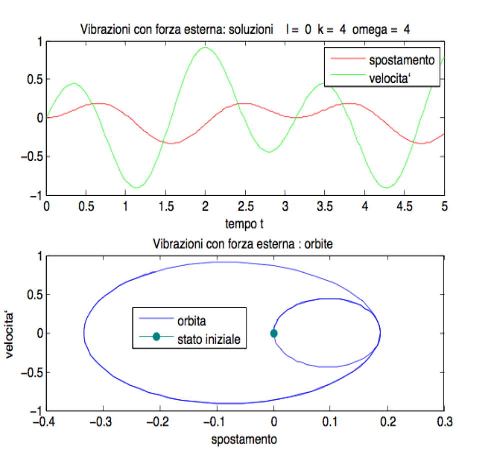
Dopo aver modificato il codice, calcola le soluzioni nei casi

- $\ell = 0, \omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (attenzione problemi numerici)
- $\ell = 0, \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

con valori iniziali $s_0 = 0, v_0 = 0$.

Simulazione numerica $\ell = 0$ $\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$t_0 = 0, t_f = 5, s_0 = 0, v_0 = 0, \ell = 0, k = 4, \omega = 4$



Soluzione nel caso $\ell = 0$ $\omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Verifica che le funzioni

$$\left.\begin{aligned} s(t) &= \frac{2M}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(cos(\omega t) - cos(\omega_0 t)) \\ v(t) &= \frac{2M}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(-\omega sin(\omega t) + \omega_0 sin(\omega_0 t)) \end{aligned}\right. , t \geq 0$$

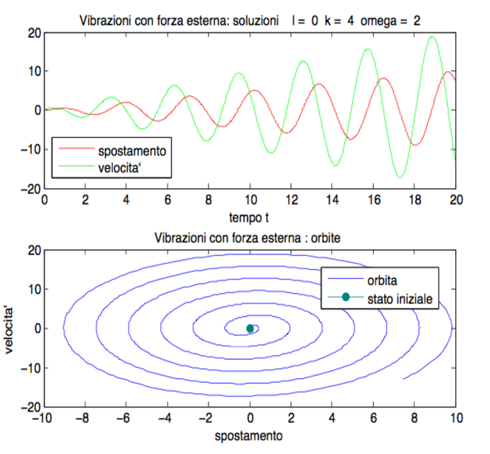
sono le soluzioni delle equazioni (6) con $s_0 = 0, v_0 = 0$.

Usa le formule della trigonometria per riscrivere la funzione $s(t)$ come prodotto di due funzioni periodiche di cui una oscilla più rapidamente dell'altra. Tale fenomeno è noto con il nome di

BATTIMENTI

Simulazione numerica $\ell = 0 \; \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$t_0 = 0, t_f = 20, s_0 = 0, v_0 = 0, \ell = 0, k = 4, \omega = 2$



Il fenomeno della risonanza

Il comportamento descritto dall'ultima simulazione viene definito

RISONANZA

La risonanza si verifica quando un sistema oscillante forzato viene sottoposto a sollecitazione periodica di frequenza pari all'oscillazione propria del sistema stesso. Può avere effetti catastrofici su costruzioni civili.

A questo fenomeno è collegato il crollo del Tacoma Narrows Bridge avvenuta il 7 novembre 1940.

Approfondimento

Un semplice codice

Una **function** MATLAB per risolvere (1)-(2) con il metodo di Eulero in $tspan = [t_0\ t_f]$ è

```
function [tt,uu]=EE(f,tspan,u0,N)
t0=tspan(1);
tf=tspan(end);
h=(tf-t0)/N;
t=t0;
u=u0;
tt=t;
uu=u;
while t < tf
   uder = f(t,u);
   t = t + h;
   u = u + h*uder;
   tt=[tt,t];
   uu=[uu,u];
end
```

- L'approssimazione della soluzione dell'equazione logistica (3) con $r = 5$ e $k = 10$ con valore iniziale $u0 = 2$ in $[0, 10]$ con il metodo di Eulero si ottiene con

```
>>r=5;
>>k=10;
>>fode=@(t,u)r*u*(1-u/k);
>>[t,u]=EE(fode,[0 10],2,100);
```

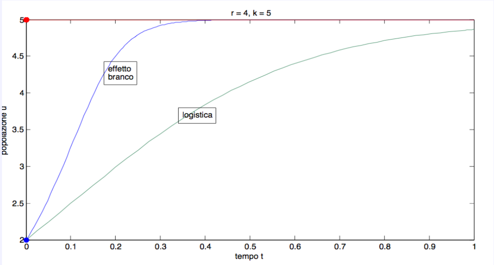
- Disegna il grafico della soluzione numerica ed il grafico della soluzione esatta (4).
- Come puoi calcolare l'errore dell'approssimazione?
- Come si comporta l'errore aumentando N e riducendo quindi h?

Effetto branco

Per descrivere una crescita che risulta difficile quando gli individui sono pochi, è più rapida quando gli individui aumentano (**effetto branco**) e rallenta quando si supera una soglia, si può considerare il modello

$$u'(t) = r u^2(t)(1 - \frac{u(t)}{k}) \quad t \geq 0.$$

Per simulare numericamente la soluzione dell'equazione logistica con effetto branco, modifica la definizione di *fode* e usa il codice **EE**.



Soluzione equazione logistica senza e con effetto branco $r = 4$, $k = 5$ (ode45)