Geometrie non euclidee tra matematica e fisica

Sebastiano Sonego[1]

Dipartimento di Chimica, Fisica e Ambiente

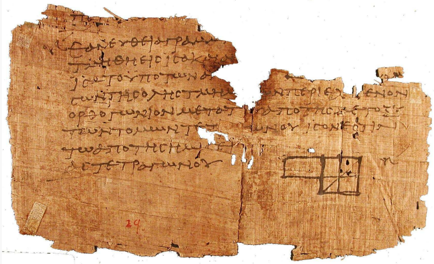
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

23 Aprile 2012

[1]sebastiano.sonego@uniud.it

Euclide di Alessandria

(circa 325 a.C. – 265 a.C.)



Elementi, Libro II

(Papyrus Oxyrhynchus 29, circa 100 d.C.)

Elementi

Venezia 1482

(Bibbia di Gutenberg: Mainz 1454)

- Un “best-seller”: secondo, per numero di edizioni, soltanto alla Bibbia.
- Non si possiedono copie dell’epoca di Euclide, ma versioni in arabo, greco e latino di varie epoche.
- Libro di testo fondamentale per 2000 anni!

Elementi

Venezia 1482

(Bibbia di Gutenberg: Mainz 1454)

- Un “best-seller”: secondo, per numero di edizioni, soltanto alla Bibbia.
- Non si possiedono copie dell’epoca di Euclide, ma versioni in arabo, greco e latino di varie epoche.
- Libro di testo fondamentale per 2000 anni!

Venezia 1482

(Bibbia di Gutenberg: Mainz 1454)

- Un “best-seller”: secondo, per numero di edizioni, soltanto alla Bibbia.
- Non si possiedono copie dell’epoca di Euclide, ma versioni in arabo, greco e latino di varie epoche.
- Libro di testo fondamentale per 2000 anni!

Venezia 1482

(Bibbia di Gutenberg: Mainz 1454)

- Un “best-seller”: secondo, per numero di edizioni, soltanto alla Bibbia.
- Non si possiedono copie dell’epoca di Euclide, ma versioni in arabo, greco e latino di varie epoche.
- Libro di testo fondamentale per 2000 anni!

Cosa contiene di così speciale questo libro?

- Rappresenta il culmine di una rivoluzione intellettuale iniziata nella Grecia del 600 a.C.
- Sviluppo di una matematica razionale, in contrapposizione alla matematica empirica dei babilonesi e degli egiziani.

Cosa contiene di così speciale questo libro?

- Rappresenta il culmine di una rivoluzione intellettuale iniziata nella Grecia del 600 a.C.
- Sviluppo di una matematica razionale, in contrapposizione alla matematica empirica dei babilonesi e degli egiziani.

Cosa contiene di così speciale questo libro?

- Rappresenta il culmine di una rivoluzione intellettuale iniziata nella Grecia del 600 a.C.
- Sviluppo di una matematica razionale, in contrapposizione alla matematica empirica dei babilonesi e degli egiziani.

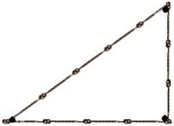
Plimpton 322 (1900 $\div$ 1600 a.C.)

Tavola di terne pitagoriche (a, b, c) t.c. $a^2 + b^2 = c^2$.

Es. $(3, 4, 5)$; $(12709, 13500, 18541)$

Uso pratico delle terne pitagoriche: consentono di costruire triangoli rettangoli, utili per ripartire i terreni: geo-metria.

“Harpedonaptae” diretti dallo scriba Djerserkereseneb (1400 ÷ 1390 a.C.).
(Sama-sutra-niranchaka in India.)



Negli *Elementi* si deduce un metodo per costruire una generica terna pitagorica.

(Libro X, Proposizione 29, Lemma 1)

contenere vn ſpatio medio. percioche eſſendo come la B alla C, coſi la D alla E, ſarà permutandoſi come la B alla D, coſi la C alla E: & come la B alla D, coſi è
16. del ſeſto. la D alla A. come dunque la D alla A, coſi è anchor la C alla E. onde il rettango
22. di queſto. lo contenuto dalle A C è vguale à quello, che ſi contiene dalle D E. ma quello che è contenuto dalle A C è medio. adunque quello che ſi contiene dalle D E ſara medio. il perche ſi ſono trouate due medie in potenza ſolamente commenſurabili, che contengono vn ſpatio medio, come biſognaua fare.

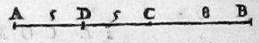
IL COMMANDINO.

✻ Et facciaſi come la B alla C, coſi la D alla E] *Sia la A 4 & la B* R 8 *& la C* R 6. *ſarà il rettangolo che ſi contiene dalle A B* R 128, *& la linea retta D fra le A B proportionale* R R 128. *facciaſi dunque come la B alla C, cioè come* R R 64 *à* R R 36, *coſi la D cioè* R R 128 *ad vn'altra, che ſia E. nel medeſimo modo, che diſopra, moltiplichiſi 128 per 36. ſi fa 4608, & 4608 ſi diuida per 64, ne vengono 72. adunque* R R 72 *ſarà la quarta proportionale A, che cercauamo.*

LEMMA I.

Trouare due numeri quadrati di modo, che quello che ſi compone da eſſi ſia anchor quadrato.

Propongaſi due numeri A B B C, che
A ſiano ò pari ò diſpari. & perche ò ſi tragga dal pari il pari, ò dal diſpari il diſpari, il rimanente è pari, ſarà il numeto A C pari. ſeghiſi A C per mezo nel punto D, & ſiano
B AB BC ò ſimili piani, ò quadrati, quali anche eſsi ſono piani ſimili. adūque quello, che ſi fa da A B B C inſieme col quadrato di CD è vguale al quadrato di BD.
C & è quadrato quello, che ſi fa da A B B C, percioche ſi è dimoſtrato ſe due piani ſimili moltiplicando ſe ſteſsi facciano qualche numero, quello che ſi fa, eſſere quadrato. ſi ſono dunque trouati due numeri quadrati, cioè quello, che ſi fa da A B B C, & quello, che ſi fa da C D, quali inſieme compoſti fanno vn numero quadrato, cioè quello, che ſi fa da B D. il che biſognaua fare.



COROLLARIO.

Et è manifeſto anchora eſſerſi trouati due numeri quadrati, cioè quello, che ſi fa da B D, & quello, che ſi fa da C D, dimodo che l'eccesſo loro, che ſi fa da A B B C ſia quadrato, quando però A B B C ſia
D *no piani ſimili. ma quando non ſiano piani ſimili, ſi ſaranno trouati due quadrati, & quello, che ſi fa da B D, & quello, che da C D, de quali l'eceſſo, che ſi fa da A B B C, non è quadrato.*

IL COMMANDINO.

A Et perche ò ſi tragga dal pari il pari, ò dal diſpari il diſpari, il rimanente è pari] *per la 24 & 26 del nono libro.*
B Adunque quello, che ſi fa da A B B C, inſieme col quadrato di C D è vguale al quadrato di B D] *queſto ſi dimoſtra da Barlaam Monacho, nel theorema 6 di quelli, che*

noi

Matematica empirica:

- molte “ricette”, non legate fra loro;
- possibilità di contraddizioni...

Come sapere se le “ricette” sono valide?

Matematica razionale:

- pochi assiomi/postulati, logicamente indipendenti fra loro (quindi compatibili), intuitivamente evidenti;
- moltissime (in principio, infinite!) proposizioni/teoremi, dedotti dagli assiomi/postulati, e solo da questi.

Quali postulati scegliere?

Matematica empirica:

- molte “ricette”, non legate fra loro;
- possibilità di contraddizioni...

Come sapere se le “ricette” sono valide?

Matematica razionale:

- pochi assiomi/postulati, logicamente indipendenti fra loro (quindi compatibili), intuitivamente evidenti;
- moltissime (in principio, infinite!) proposizioni/teoremi, dedotti dagli assiomi/postulati, e solo da questi.

Quali postulati scegliere?

Matematica empirica:

- molte “ricette”, non legate fra loro;
- possibilità di contraddizioni...

Come sapere se le “ricette” sono valide?

Matematica razionale:

- pochi assiomi/postulati, logicamente indipendenti fra loro (quindi compatibili), intuitivamente evidenti;
- moltissime (in principio, infinite!) proposizioni/teoremi, dedotti dagli assiomi/postulati, e solo da questi.

Quali postulati scegliere?

Matematica empirica:

- molte “ricette”, non legate fra loro;
- possibilità di contraddizioni...

Come sapere se le “ricette” sono valide?

Matematica razionale:

- pochi assiomi/postulati, logicamente indipendenti fra loro (quindi compatibili), intuitivamente evidenti;
- moltissime (in principio, infinite!) proposizioni/teoremi, dedotti dagli assiomi/postulati, e solo da questi.

Quali postulati scegliere?

Matematica empirica:

- molte “ricette”, non legate fra loro;
- possibilità di contraddizioni...

Come sapere se le “ricette” sono valide?

Matematica razionale:

- pochi assiomi/postulati, logicamente indipendenti fra loro (quindi compatibili), intuitivamente evidenti;
- moltissime (in principio, infinite!) proposizioni/teoremi, dedotti dagli assiomi/postulati, e solo da questi.

Quali postulati scegliere?

Matematica empirica:

- molte “ricette”, non legate fra loro;
- possibilità di contraddizioni...

Come sapere se le “ricette” sono valide?

Matematica razionale:

- pochi assiomi/postulati, logicamente indipendenti fra loro (quindi compatibili), intuitivamente evidenti;
- moltissime (in principio, infinite!) proposizioni/teoremi, dedotti dagli assiomi/postulati, e solo da questi.

Quali postulati scegliere?

Matematica empirica:

- molte “ricette”, non legate fra loro;
- possibilità di contraddizioni...

Come sapere se le “ricette” sono valide?

Matematica razionale:

- pochi assiomi/postulati, logicamente indipendenti fra loro (quindi compatibili), intuitivamente evidenti;
- moltissime (in principio, infinite!) proposizioni/teoremi, dedotti dagli assiomi/postulati, e solo da questi.

Quali postulati scegliere?

Matematica empirica:

- molte “ricette”, non legate fra loro;
- possibilità di contraddizioni...

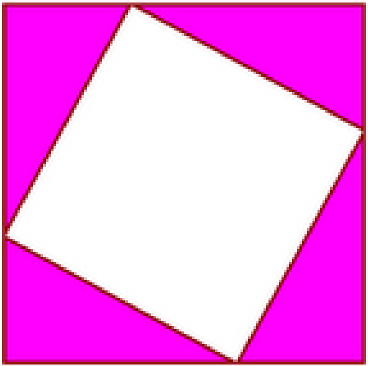
Come sapere se le “ricette” sono valide?

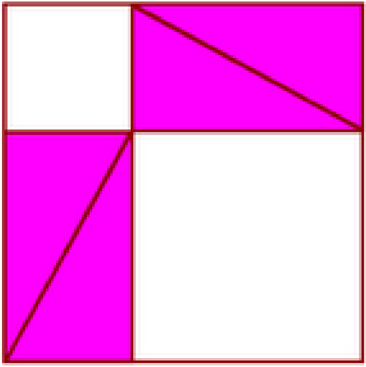
Matematica razionale:

- pochi assiomi/postulati, logicamente indipendenti fra loro (quindi compatibili), intuitivamente evidenti;
- moltissime (in principio, infinite!) proposizioni/teoremi, dedotti dagli assiomi/postulati, e solo da questi.

Quali postulati scegliere?

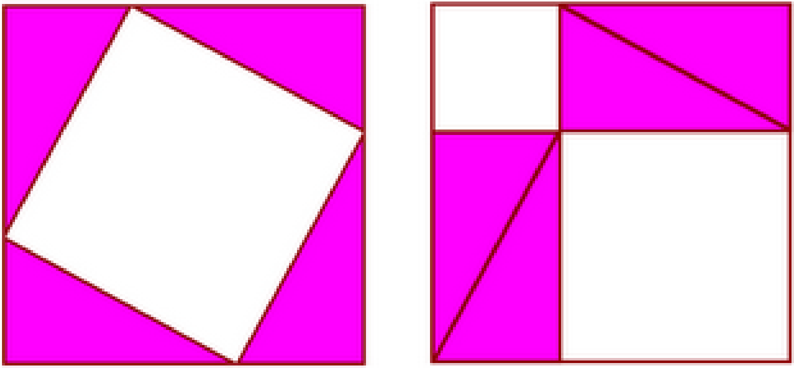
Esempio: Teorema di Pitagora





Stiamo assumendo, ad esempio, che triangoli rettangoli con cateti uguali abbiano aree uguali...

Esempio: Teorema di Pitagora



Stiamo assumendo, ad esempio, che triangoli rettangoli con cateti uguali abbiano aree uguali...

Postulati di Euclide

In un piano, richiediamo:

I. Che da ogni punto ad ogni altro punto sia possibile condurre una linea retta.
II. Che un segmento di linea retta possa essere indefinitamente prolungato in linea retta.
III. Che attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere sia possibile tracciare una circonferenza.
IV. Che tutti gli angoli retti siano tra di loro uguali.
V. Ogni volta che una retta, intersecando altre due rette forma con esse angoli interni da una medesima parte, la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono per incontrarsi da quella parte nella quale gli angoli interni formano insieme meno di due retti.

Postulati di Euclide

In un piano, richiediamo:

I. Che da ogni punto ad ogni altro punto sia possibile condurre una linea retta.
II. Che un segmento di linea retta possa essere indefinitamente prolungato in linea retta.
III. Che attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere sia possibile tracciare una circonferenza.
IV. Che tutti gli angoli retti siano tra di loro uguali.
V. Ogni volta che una retta, intersecando altre due rette forma con esse angoli interni da una medesima parte, la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono per incontrarsi da quella parte nella quale gli angoli interni formano insieme meno di due retti.

Postulati di Euclide

In un piano, richiediamo:

I. Che da ogni punto ad ogni altro punto sia possibile condurre una linea retta.
II. Che un segmento di linea retta possa essere indefinitamente prolungato in linea retta.
III. Che attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere sia possibile tracciare una circonferenza.
IV. Che tutti gli angoli retti siano tra di loro uguali.
V. Ogni volta che una retta, intersecando altre due rette forma con esse angoli interni da una medesima parte, la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono per incontrarsi da quella parte nella quale gli angoli interni formano insieme meno di due retti.

Postulati di Euclide

In un piano, richiediamo:

I. Che da ogni punto ad ogni altro punto sia possibile condurre una linea retta.
II. Che un segmento di linea retta possa essere indefinitamente prolungato in linea retta.
III. Che attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere sia possibile tracciare una circonferenza.
IV. Che tutti gli angoli retti siano tra di loro uguali.
V. Ogni volta che una retta, intersecando altre due rette forma con esse angoli interni da una medesima parte, la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono per incontrarsi da quella parte nella quale gli angoli interni formano insieme meno di due retti.

Postulati di Euclide

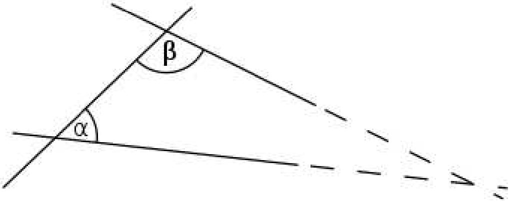
In un piano, richiediamo:

I. Che da ogni punto ad ogni altro punto sia possibile condurre una linea retta.
II. Che un segmento di linea retta possa essere indefinitamente prolungato in linea retta.
III. Che attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere sia possibile tracciare una circonferenza.
IV. Che tutti gli angoli retti siano tra di loro uguali.
V. Ogni volta che una retta, intersecando altre due rette forma con esse angoli interni da una medesima parte, la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono per incontrarsi da quella parte nella quale gli angoli interni formano insieme meno di due retti.

Postulati di Euclide

In un piano, richiediamo:

I. Che da ogni punto ad ogni altro punto sia possibile condurre una linea retta.
II. Che un segmento di linea retta possa essere indefinitamente prolungato in linea retta.
III. Che attorno ad un centro scelto a piacere con un raggio scelto a piacere sia possibile tracciare una circonferenza.
IV. Che tutti gli angoli retti siano tra di loro uguali.
V. Ogni volta che una retta, intersecando altre due rette forma con esse angoli interni da una medesima parte, la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono per incontrarsi da quella parte nella quale gli angoli interni formano insieme meno di due retti.



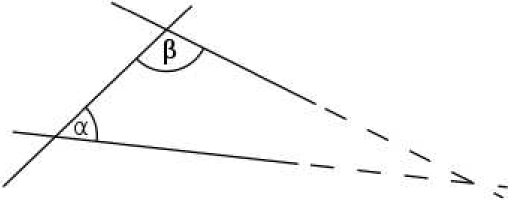
$\alpha + \beta <$ 2 retti

Il V postulato ha una natura assai diversa dagli altri.

È forse, in realtà, un TEOREMA?

Lo stesso Euclide ne fa uso il più tardi possibile... solo alla 29ª proposizione.

Ma non riesce ad evitarlo!



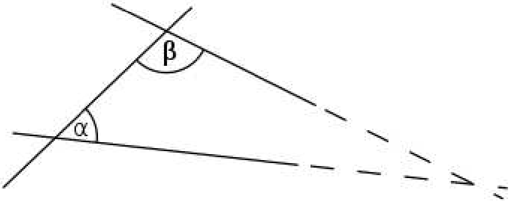
$\alpha + \beta <$ 2 retti

Il V postulato ha una natura assai diversa dagli altri.

È forse, in realtà, un TEOREMA?

Lo stesso Euclide ne fa uso il più tardi possibile... solo alla 29ª proposizione.

Ma non riesce ad evitarlo!



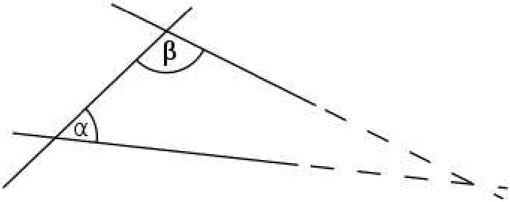
$\alpha + \beta <$ 2 retti

Il V postulato ha una natura assai diversa dagli altri.

È forse, in realtà, un
TEOREMA?

Lo stesso Euclide ne fa uso il più tardi possibile... solo alla 29ª proposizione.

Ma non riesce ad evitarlo!



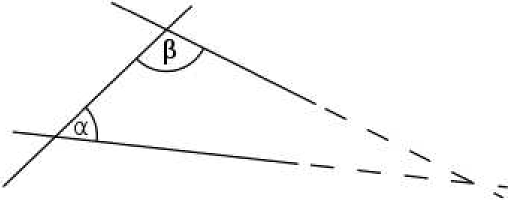
$\alpha + \beta <$ 2 retti

Il V postulato ha una natura assai diversa dagli altri.

È forse, in realtà, un
TEOREMA?

Lo stesso Euclide ne fa uso il più tardi possibile... solo alla 29ª proposizione.

Ma non riesce ad evitarlo!



$$\alpha + \beta < 2 \text{ retti}$$

Il V postulato ha una natura assai diversa dagli altri.

È forse, in realtà, un
TEOREMA?

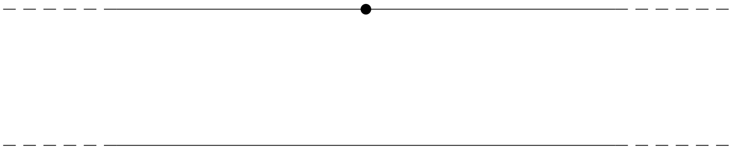
Lo stesso Euclide ne fa uso il più tardi possibile... solo alla 29ª proposizione.

Ma non riesce ad evitarlo!

Enunciati equivalenti. I

"In un piano, per un punto esterno a una retta si può condurre una e una sola parallela alla retta data."

[Proclo 450 d.C.; Playfair 1795]



(Due rette in un piano si dicono parallele se non si incontrano.)

Enunciati equivalenti. II

"In un piano, il luogo dei punti equidistanti da una retta è ancora una retta."

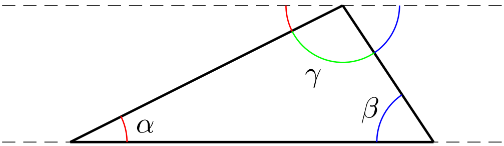
(*Due* rette, per la precisione...)

Enunciati equivalenti. II

"In un piano, il luogo dei punti equidistanti da una retta è ancora una retta."

(*Due* rette, per la precisione...)

"In un piano, la somma degli angoli interni di un triangolo rettilineo è uguale a due retti."

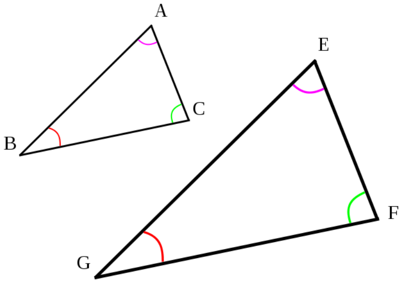


$$\alpha + \beta + \gamma = 2 \text{ retti}$$

Enunciati equivalenti. III

“Di ogni figura piana ne esiste una simile di grandezza arbitraria.”

(Due poligoni si dicono simili se hanno angoli uguali.)

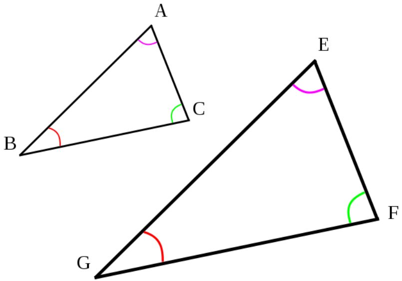


Il V postulato è vero se e solo se lo sono gli enunciati precedenti.

Enunciati equivalenti. III

"Di ogni figura piana ne esiste una simile di grandezza arbitraria."

(Due poligoni si dicono simili se hanno angoli uguali.)



Il V postulato è vero se e solo se lo sono gli enunciati precedenti.

Di questo, nessuno dubitava...

Per duemila anni si cerca di dimostrare il V postulato [Tolomeo, Proclo, Al-Gauhari, Thabit ibn Qurra, Ibn al-Haytham, Omar Khayyam, Nasir Eddin al-Tusi, Commandino, Clavio, Cataldi, Borelli, Wallis, Vitale, Saccheri, Lambert, Legendre].

Sempre, accade che il “dimostratore” di turno supponga valida una proprietà indipendente dai primi quattro postulati, senza rendersene conto.

Di questo, nessuno dubitava...

Per duemila anni si cerca di dimostrare il V postulato [Tolomeo, Proclo, Al-Gauhari, Thabit ibn Qurra, Ibn al-Haytham, Omar Khayyam, Nasir Eddin al-Tusi, Commandino, Clavio, Cataldi, Borelli, Wallis, Vitale, Saccheri, Lambert, Legendre].

Sempre, accade che il “dimostratore” di turno supponga valida una proprietà indipendente dai primi quattro postulati, senza rendersene conto.

Di questo, nessuno dubitava...

Per duemila anni si cerca di dimostrare il V postulato [Tolomeo, Proclo, Al-Gauhari, Thabit ibn Qurra, Ibn al-Haytham, Omar Khayyam, Nasir Eddin al-Tusi, Commandino, Clavio, Cataldi, Borelli, Wallis, Vitale, Saccheri, Lambert, Legendre].

Sempre, accade che il “dimostratore” di turno supponga valida una proprietà indipendente dai primi quattro postulati, senza rendersene conto.

In Dei nomine.

OPVSCVLVM
DE LINEIS RECTIS ÆQVIDISTANTIBVS, ET NON ÆQVIDISTANTIBVS

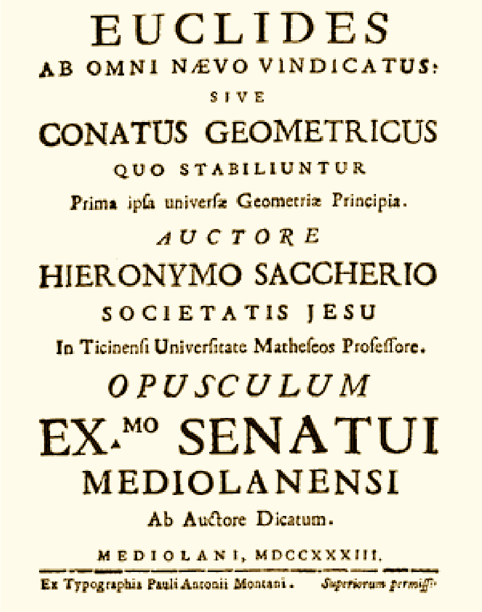
Petri Antonij Cataldi.

Apud Hæredes Ioannis Rossij. M.DC.III.

1603

Gerolamo Saccheri
(San Remo 1667 – Milano 1733)

- Gesuita, docente di filosofia, teologia e matematica a Pavia.
- Grande sostenitore della tecnica di dimostrazione “per assurdo”.



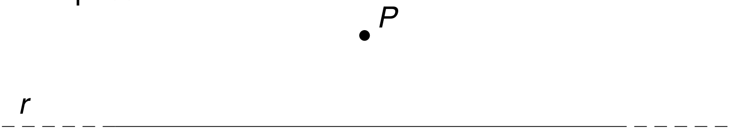
EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

Supponiamo che il V postulato, nella formulazione di Proclo-Playfair, sia falso.

Vi sono due possibilità:

Supponiamo che il V postulato, nella formulazione di Proclo-Playfair, sia falso.

Vi sono due possibilità:

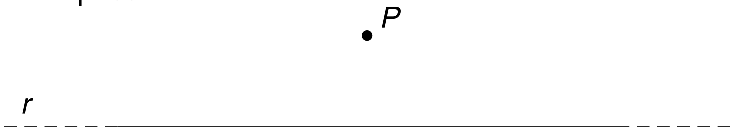
1. 

Non esiste alcuna retta per P parallela ad $r \Longrightarrow$ si viola il II postulato — assurdo!
"L'ipotesi [...] è completamente falsa, poiché distrugge se stessa."

Supponiamo che il V postulato, nella formulazione di Proclo-Playfair, sia falso.

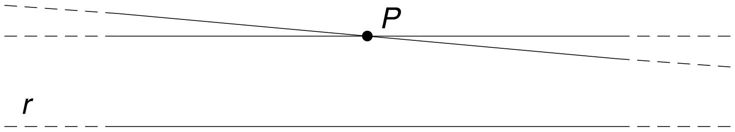
Vi sono due possibilità:

1.



Non esiste alcuna retta per P parallela ad $r \Longrightarrow$ si viola il II postulato — assurdo!
"L'ipotesi [...] è completamente falsa, poiché distrugge se stessa."

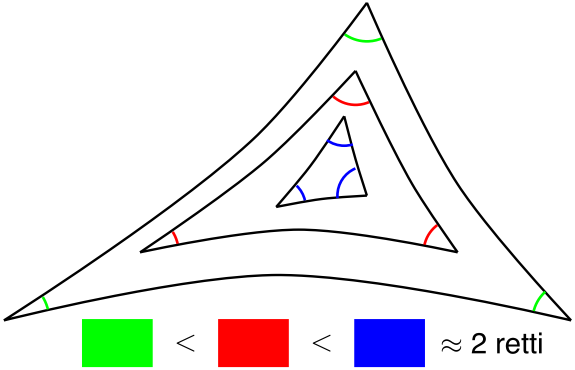
2.



Esistono più rette per P, che sono tutte parallele a $r \Longrightarrow$ molte conseguenze strane...

Ad esempio, la somma degli angoli interni di un trangolo è minore di due retti e dipende dalle dimensioni del triangolo $\Longrightarrow$ assurdo!

“L’ipotesi [...] è assolutamente falsa, poiché ripugna alla natura della linea retta.”

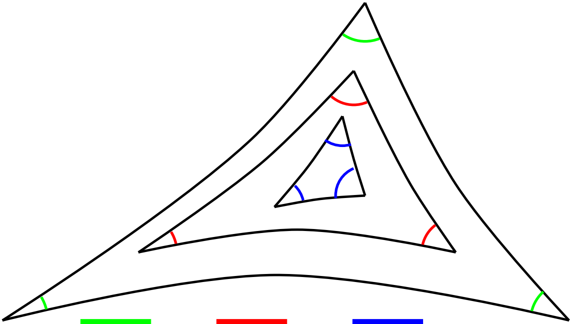


Assurdo?

Non c’è alcuna contraddizione con gli altri postulati...

Ad esempio, la somma degli angoli interni di un trangolo è minore di due retti e dipende dalle dimensioni del triangolo $\Longrightarrow$ assurdo!

"L'ipotesi [...] è assolutamente falsa, poiché ripugna alla natura della linea retta."



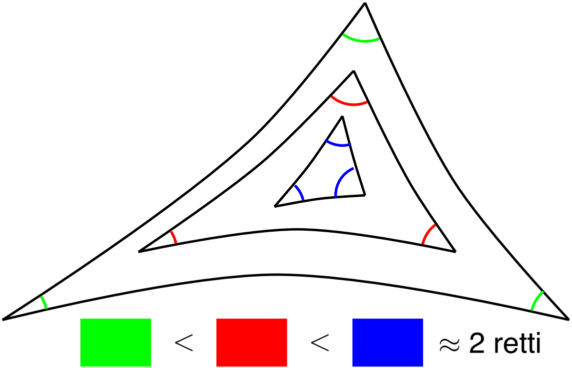
$<$ $<$ $\approx$ 2 retti

Assurdo?

Non c'è alcuna contraddizione con gli altri postulati...

Ad esempio, la somma degli angoli interni di un trangolo è minore di due retti e dipende dalle dimensioni del triangolo $\Longrightarrow$ assurdo!

"L'ipotesi [...] è assolutamente falsa, poiché ripugna alla natura della linea retta."



Assurdo?

Non c'è alcuna contraddizione con gli altri postulati...

“Lo scandalo della geometria elementare.”

D’Alembert, 1767

Carl Friedrich Gauss 1777–1855

1792: All’età di quindici anni, Gauss tenta di dimostrare il V postulato partendo dagli altri quattro.

1813: “Nella teoria delle parallele non c’è stato alcun progresso dai tempi di Euclide. Questa parte della matematica è vergognosa.”

1817: “Tendo [...] a credere che la necessità della nostra geometria non possa essere dimostrata [...] Non dobbiamo annoverare la geometria con l’aritmetica, che è veramente a priori, ma con la meccanica [...]”

1792: All’età di quindici anni, Gauss tenta di dimostrare il V postulato partendo dagli altri quattro.

1813: “Nella teoria delle parallele non c’è stato alcun progresso dai tempi di Euclide. Questa parte della matematica è vergognosa.”

1817: “Tendo [...] a credere che la necessità della nostra geometria non possa essere dimostrata [...] Non dobbiamo annoverare la geometria con l’aritmetica, che è veramente a priori, ma con la meccanica [...]”

1792: All’età di quindici anni, Gauss tenta di dimostrare il V postulato partendo dagli altri quattro.

1813: “Nella teoria delle parallele non c’è stato alcun progresso dai tempi di Euclide. Questa parte della matematica è vergognosa.”

1817: “Tendo [...] a credere che la necessità della nostra geometria non possa essere dimostrata [...] Non dobbiamo annoverare la geometria con l’aritmetica, che è veramente a priori, ma con la meccanica [...]”

Gauss riconosce la differenza fra la consistenza interna di un sistema formale e la validità di quest'ultimo come modello fisico.

La geometria ottenuta da Saccheri sostituendo il V postulato è formalmente corretta! Se essa descriva o no lo spazio fisico è un problema empirico.

Errore di Saccheri (e di altri): si utilizzano proprietà dello spazio fisico anziché aderire strettamente al sistema formale.

Gauss riconosce la differenza fra la consistenza interna di un sistema formale e la validità di quest'ultimo come modello fisico.

La geometria ottenuta da Saccheri sostituendo il V postulato è formalmente corretta! Se essa descriva o no lo spazio fisico è un problema empirico.

Errore di Saccheri (e di altri): si utilizzano proprietà dello spazio fisico anziché aderire strettamente al sistema formale.

Gauss riconosce la differenza fra la consistenza interna di un sistema formale e la validità di quest'ultimo come modello fisico.

La geometria ottenuta da Saccheri sostituendo il V postulato è formalmente corretta! Se essa descriva o no lo spazio fisico è un problema empirico.

Errore di Saccheri (e di altri): si utilizzano proprietà dello spazio fisico anziché aderire strettamente al sistema formale.

Geometria matematica & geometria fisica. I

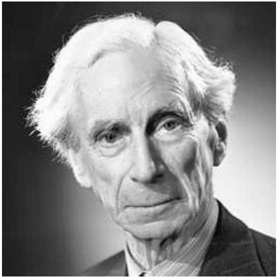
Teoria matematica:

- entità fondamentali;
- assiomi.

Le entità fondamentali sono oggetti astratti, e tutto ciò che si richiede agli assiomi è la consistenza formale.

"La matematica può essere definita come la disciplina nella quale non sappiamo di che cosa stiamo parlando, nè se ciò che stiamo dicendo sia vero."

Bertrand Russell



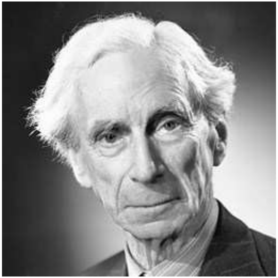
Teoria matematica:

- entità fondamentali;
- assiomi.

Le entità fondamentali sono oggetti astratti, e tutto ciò che si richiede agli assiomi è la consistenza formale.

"La matematica può essere definita come la disciplina nella quale non sappiamo di che cosa stiamo parlando, nè se ciò che stiamo dicendo sia vero."

Bertrand Russell



Geometria matematica & geometria fisica. I

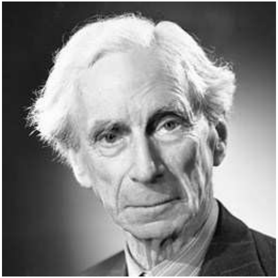
Teoria matematica:

- entità fondamentali;
- assiomi.

Le entità fondamentali sono oggetti astratti, e tutto ciò che si richiede agli assiomi è la consistenza formale.

"La matematica può essere definita come la disciplina nella quale non sappiamo di che cosa stiamo parlando, nè se ciò che stiamo dicendo sia vero."

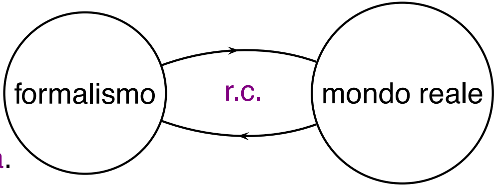
Bertrand Russell



Geometria matematica & geometria fisica. II

Teoria fisica:

- teoria matematica (formalismo);
- regole di corrispondenza.



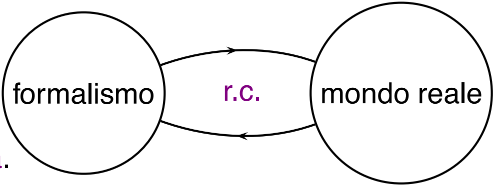
Le regole di corrispondenza associano le entità fondamentali della teoria a caratteristiche del mondo reale, e consentono una verifica sperimentale degli enunciati.

La geometria euclidea è la prima grande teoria fisica della storia — una teoria delle proprietà dello spazio fisico.

La confusione fra geometria matematica e geometria fisica è all'origine di una fallacia di Kant.

Teoria fisica:

- teoria matematica (formalismo);
- regole di corrispondenza.



Le regole di corrispondenza associano le entità fondamentali della teoria a caratteristiche del mondo reale, e consentono una verifica sperimentale degli enunciati.

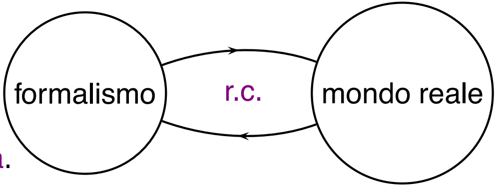
La geometria euclidea è la prima grande teoria fisica della storia — una teoria delle proprietà dello spazio fisico.

La confusione fra geometria matematica e geometria fisica è all'origine di una fallacia di Kant.

Geometria matematica & geometria fisica. II

Teoria fisica:

- teoria matematica (formalismo);
- regole di corrispondenza.



Le regole di corrispondenza associano le entità fondamentali della teoria a caratteristiche del mondo reale, e consentono una verifica sperimentale degli enunciati.

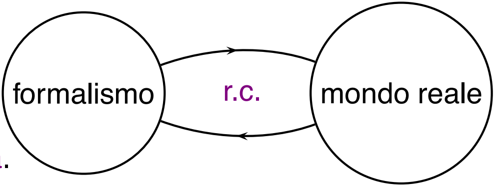
La geometria euclidea è la prima grande teoria fisica della storia — una teoria delle proprietà dello spazio fisico.

La confusione fra geometria matematica e geometria fisica è all'origine di una fallacia di Kant.

Geometria matematica & geometria fisica. II

Teoria fisica:

- teoria matematica (formalismo);
- regole di corrispondenza.



Le regole di corrispondenza associano le entità fondamentali della teoria a caratteristiche del mondo reale, e consentono una verifica sperimentale degli enunciati.

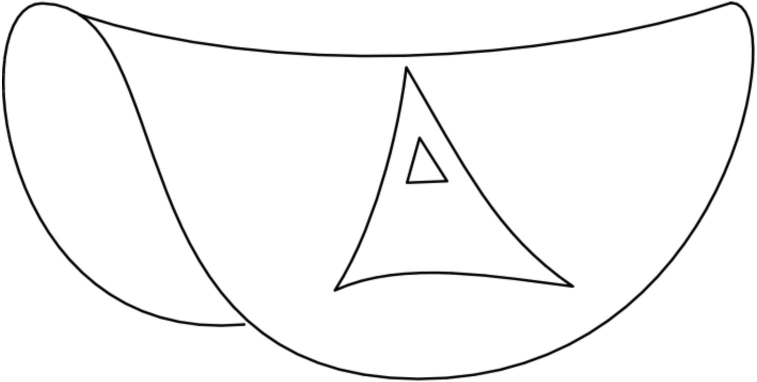
La geometria euclidea è la prima grande teoria fisica della storia — una teoria delle proprietà dello spazio fisico.

La confusione fra geometria matematica e geometria fisica è all'origine di una fallacia di Kant.

János Bolyai 1802–1860

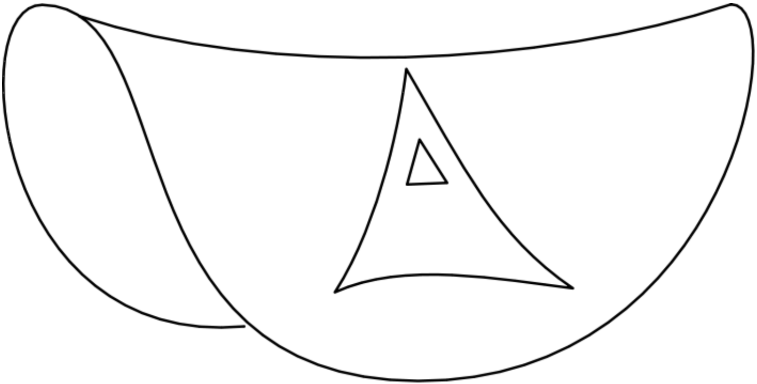
Nikolai Ivanovich Lobachevsky 1792–1856

Bolyai e Lobachevsky sviluppano la geometria cosiddetta iperbolica, in cui per *P* passano più rette parallele a *r*.



In pratica, già scoperta — ma ritenuta ripugnante — da Saccheri!

Bolyai e Lobachevsky sviluppano la geometria cosiddetta iperbolica, in cui per P passano più rette parallele a r.



In pratica, già scoperta — ma ritenuta ripugnante — da Saccheri!

Dal momento che sono logicamente possibili (almeno) due geometrie, viene spontaneo chiedersi quale sia la geometria che descrive il nostro spazio fisico.

Naturalmente, su piccola scala vale la geometria euclidea con eccellente approssimazione.

E su scale astronomiche?

Dal momento che sono logicamente possibili (almeno) due geometrie, viene spontaneo chiedersi quale sia la geometria che descrive il nostro spazio fisico.

Naturalmente, su piccola scala vale la geometria euclidea con eccellente approssimazione.

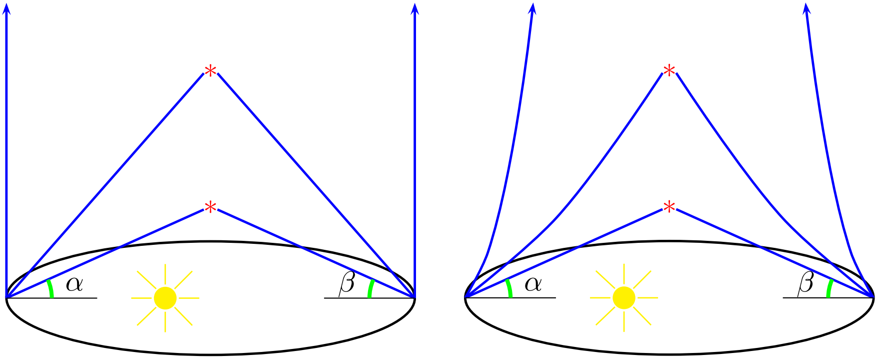
E su scale astronomiche?

Dal momento che sono logicamente possibili (almeno) due geometrie, viene spontaneo chiedersi quale sia la geometria che descrive il nostro spazio fisico.

Naturalmente, su piccola scala vale la geometria euclidea con eccellente approssimazione.

E su scale astronomiche?

Misure di parallasse [Lobachevsky, Bessel]



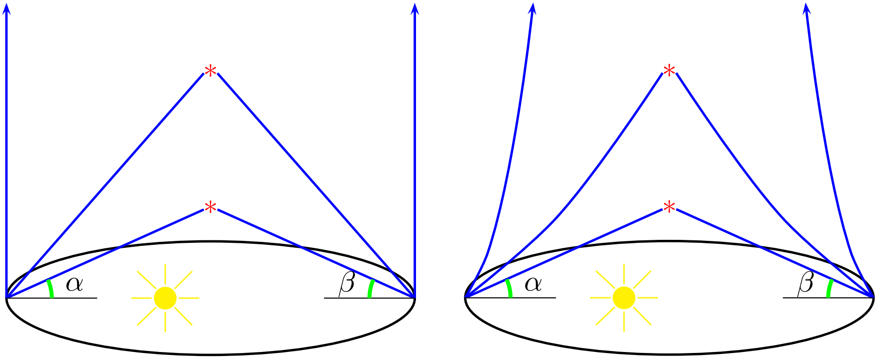
Euclidea: $\alpha + \beta \to$ 2 retti.

Iperbolica: $\alpha + \beta \to$ 2 retti $-\varepsilon$.

Dati osservativi (Eridani 29, Rigel, Sirio, 61 Cygni): ε minore degli errori...

$\Longrightarrow$ Se ci sono deviazioni apprezzabili dalla geometria euclidea, avvengono su scale enormi.

Misure di parallasse [Lobachevsky, Bessel]

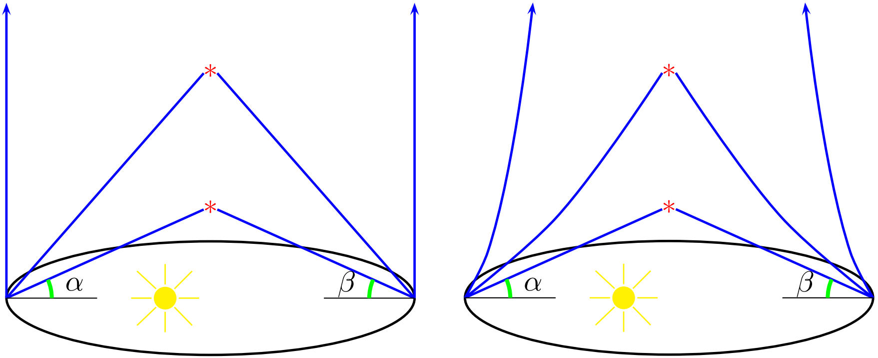


Euclidea: $\alpha + \beta \to$ 2 retti. Iperbolica: $\alpha + \beta \to$ 2 retti $-\varepsilon$.

Dati osservativi (Eridani 29, Rigel, Sirio, 61 Cygni): ε minore degli errori...

$\Longrightarrow$ Se ci sono deviazioni apprezzabili dalla geometria euclidea, avvengono su scale enormi.

Misure di parallasse [Lobachevsky, Bessel]



Euclidea: $\alpha + \beta \to$ 2 retti. Iperbolica: $\alpha + \beta \to$ 2 retti $-\varepsilon$.

Dati osservativi (Eridani 29, Rigel, Sirio, 61 Cygni): ε minore degli errori...

$\Longrightarrow$ Se ci sono deviazioni apprezzabili dalla geometria euclidea, avvengono su scale enormi.

La geometria iperbolica è coerente?

Chi ci garantisce che un giorno qualcuno non riesca finalmente a trovare una contraddizione nel sistema assiomatico di Lobachevsky-Bolyai, dimostrando così il V postulato?

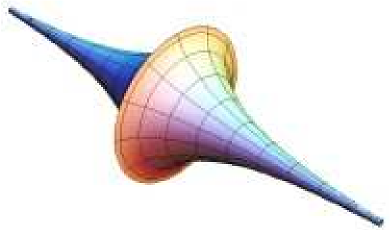
Eugenio Beltrami
Cremona 1835 – Roma 1900

La geometria iperbolica è coerente?

Chi ci garantisce che un giorno qualcuno non riesca finalmente a trovare una contraddizione nel sistema assiomatico di Lobachevsky-Bolyai, dimostrando così il V postulato?

Eugenio Beltrami
Cremona 1835 – Roma 1900

Pseudosfera



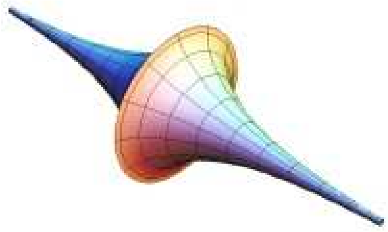
Le “rette” (curve di minima distanza) sulla pseudosfera soddisfano gli assiomi di Lobachevsky-Bolyai.

Siccome la pseudosfera è una superficie dello spazio tridimensionale euclideo, la geometria iperbolica è coerente se lo è la geometria euclidea!

La pseudosfera costituisce un modello euclideo della geometria iperbolica.

Vi sono altri modelli...

Pseudosfera



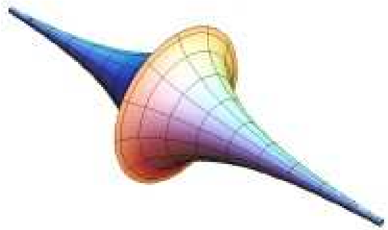
Le “rette” (curve di minima distanza) sulla pseudosfera soddisfano gli assiomi di Lobachevsky-Bolyai.

Siccome la pseudosfera è una superficie dello spazio tridimensionale euclideo, la geometria iperbolica è coerente se lo è la geometria euclidea!

La pseudosfera costituisce un modello euclideo della geometria iperbolica.

Vi sono altri modelli...

Pseudosfera



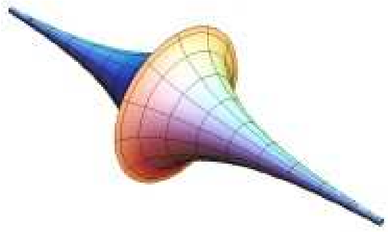
Le “rette” (curve di minima distanza) sulla pseudosfera soddisfano gli assiomi di Lobachevsky-Bolyai.

Siccome la pseudosfera è una superficie dello spazio tridimensionale euclideo, la geometria iperbolica è coerente se lo è la geometria euclidea!

La pseudosfera costituisce un modello euclideo della geometria iperbolica.

Vi sono altri modelli...

Pseudosfera

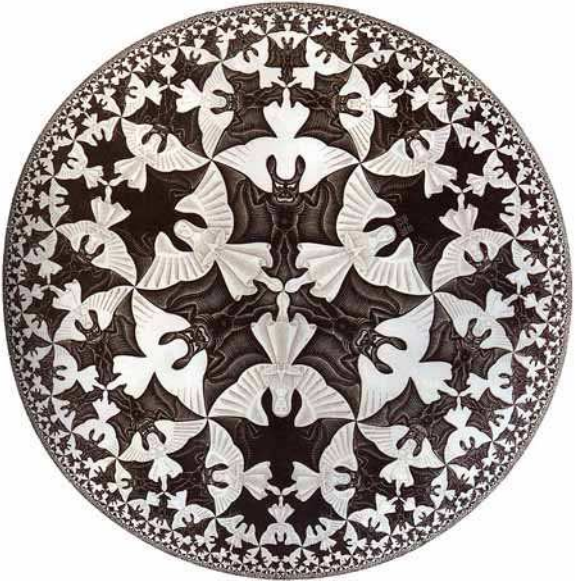


Le “rette” (curve di minima distanza) sulla pseudosfera soddisfano gli assiomi di Lobachevsky-Bolyai.

Siccome la pseudosfera è una superficie dello spazio tridimensionale euclideo, la geometria iperbolica è coerente se lo è la geometria euclidea!

La pseudosfera costituisce un modello euclideo della geometria iperbolica.

Vi sono altri modelli...

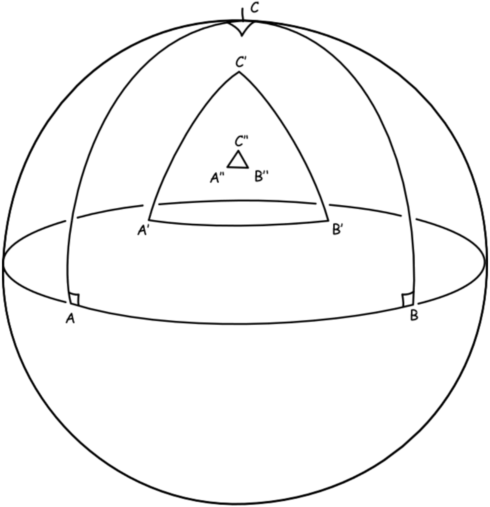


M. C. Escher: “Cerchio limite IV” (1960)

Ironicamente, un modello di geometria non euclidea si trovava sotto gli occhi dei matematici da tempo immemorabile...

“Rette”: cerchi di raggio massimo.

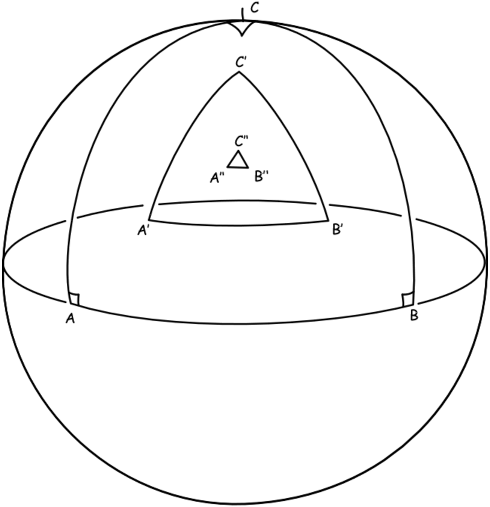
Il V postulato è violato perché per un punto esterno a una “retta” non passa nessuna “retta” che non interseca la prima.



Ironicamente, un modello di geometria non euclidea si trovava sotto gli occhi dei matematici da tempo immemorabile...

“Rette”: cerchi di raggio massimo.

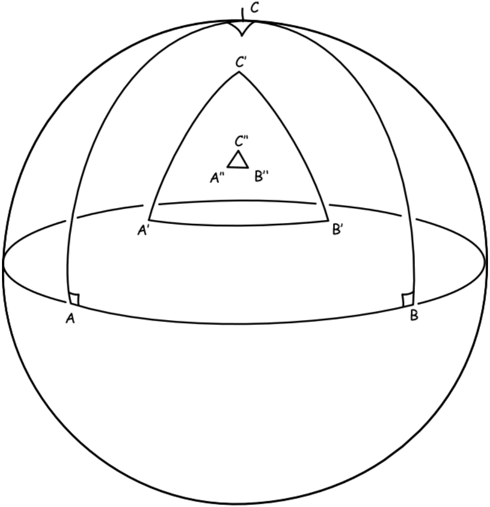
Il V postulato è violato perché per un punto esterno a una “retta” non passa nessuna “retta” che non interseca la prima.



Ironicamente, un modello di geometria non euclidea si trovava sotto gli occhi dei matematici da tempo immemorabile...

“Rette”: cerchi di raggio massimo.

Il V postulato è violato perché per un punto esterno a una “retta” non passa nessuna “retta” che non interseca la prima.



Ma anche il II postulato viene violato: le “rette” non hanno lungheza infinita!

Si tratta di un falso modello?...

Oppure no?

E se considerassimo geometrie più generali, in cui anche il II postulato può cadere?

Ma anche il II postulato viene violato: le “rette” non hanno lungheza infinita!

Si tratta di un falso modello?...

Oppure no?

E se considerassimo geometrie più generali, in cui anche il II postulato può cadere?

Ma anche il II postulato viene violato: le “rette” non hanno lungheza infinita!

Si tratta di un falso modello?...

Oppure no?

E se considerassimo geometrie più generali, in cui anche il II postulato può cadere?

G. F. B. Riemann, 1826–1866

- Scritto nel 1854.
- Pubblicato (postumo) nel 1868.

XIII.

Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

(Aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*))

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von **Euklid** bis auf **Legendre**, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der

*) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; einige Ausführungen derselben findet man in der Beantwortung der Pariser Preisaufgabe nebst den Anmerkungen zu derselben.

Idee di Riemann

I fondamenti della geometria tradizionale (euclidea e non euclidea) sono allo stesso tempo rigidi e poco chiari. Ad esempio, concetti complicati come “linea retta” non vengono definiti.

Il concetto base della geometria è quello di distanza.

Idee di Riemann

I fondamenti della geometria tradizionale (euclidea e non euclidea) sono allo stesso tempo rigidi e poco chiari. Ad esempio, concetti complicati come “linea retta” non vengono definiti.

Il concetto base della geometria è quello di distanza.

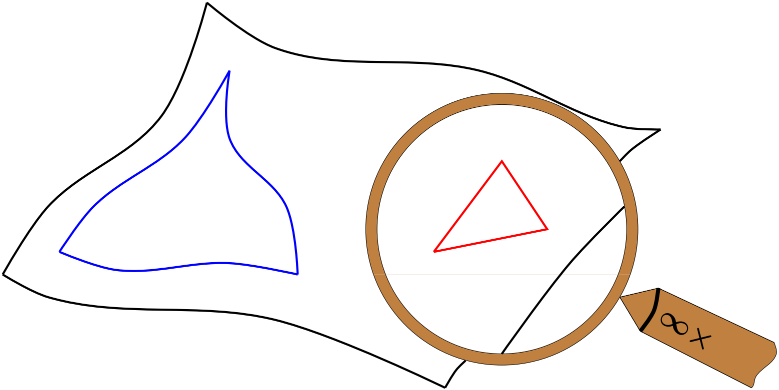
Della geometria tradizionale, Riemann conserva solo due caratteristiche:

Della geometria tradizionale, Riemann conserva solo due caratteristiche:

1. Lo spazio è un'entità continua (varietà).

Della geometria tradizionale, Riemann conserva solo due caratteristiche:

1. Lo spazio è un'entità continua (varietà).
2. Su scale "infinitesime" vale la geometria euclidea.



Su scale finite, le distanze non si combinano necessariamente secondo la geometria euclidea. Questo comportamento può essere attribuito a una curvatura dello spazio.

Tutto ciò è straordinariamente generale!

Il concetto di geometria di Riemann:

- contiene le geometrie euclidea, iperbolica, sferica, ..., come casi particolari;
- consente di studiare spazi non solo bi- o tridimensionali, ma con un numero arbitrario di dimensioni.

La geometria sintetica è ormai una disciplina di secondo piano.

Disgraziatamente, Riemann muore a nemmeno quarant'anni di età, senza aver potuto sviluppare le sue idee.

Su scale finite, le distanze non si combinano necessariamente secondo la geometria euclidea. Questo comportamento può essere attribuito a una curvatura dello spazio.

Tutto ciò è straordinariamente generale!

Il concetto di geometria di Riemann:

- contiene le geometrie euclidea, iperbolica, sferica, ..., come casi particolari;
- consente di studiare spazi non solo bi- o tridimensionali, ma con un numero arbitrario di dimensioni.

La geometria sintetica è ormai una disciplina di secondo piano.

Disgraziatamente, Riemann muore a nemmeno quarant'anni di età, senza aver potuto sviluppare le sue idee.

Su scale finite, le distanze non si combinano necessariamente secondo la geometria euclidea. Questo comportamento può essere attribuito a una curvatura dello spazio.

Tutto ciò è straordinariamente generale!

Il concetto di geometria di Riemann:

- contiene le geometrie euclidea, iperbolica, sferica, ..., come casi particolari;
- consente di studiare spazi non solo bi- o tridimensionali, ma con un numero arbitrario di dimensioni.

La geometria sintetica è ormai una disciplina di secondo piano.

Disgraziatamente, Riemann muore a nemmeno quarant'anni di età, senza aver potuto sviluppare le sue idee.

Su scale finite, le distanze non si combinano necessariamente secondo la geometria euclidea. Questo comportamento può essere attribuito a una curvatura dello spazio.

Tutto ciò è straordinariamente generale!

Il concetto di geometria di Riemann:

- contiene le geometrie euclidea, iperbolica, sferica, ..., come casi particolari;
- consente di studiare spazi non solo bi- o tridimensionali, ma con un numero arbitrario di dimensioni.

La geometria sintetica è ormai una disciplina di secondo piano.

Disgraziatamente, Riemann muore a nemmeno quarant'anni di età, senza aver potuto sviluppare le sue idee.

Su scale finite, le distanze non si combinano necessariamente secondo la geometria euclidea. Questo comportamento può essere attribuito a una curvatura dello spazio.

Tutto ciò è straordinariamente generale!

Il concetto di geometria di Riemann:

- contiene le geometrie euclidea, iperbolica, sferica, ..., come casi particolari;
- consente di studiare spazi non solo bi- o tridimensionali, ma con un numero arbitrario di dimensioni.

La geometria sintetica è ormai una disciplina di secondo piano.

Disgraziatamente, Riemann muore a nemmeno quarant'anni di età, senza aver potuto sviluppare le sue idee.

Su scale finite, le distanze non si combinano necessariamente secondo la geometria euclidea. Questo comportamento può essere attribuito a una curvatura dello spazio.

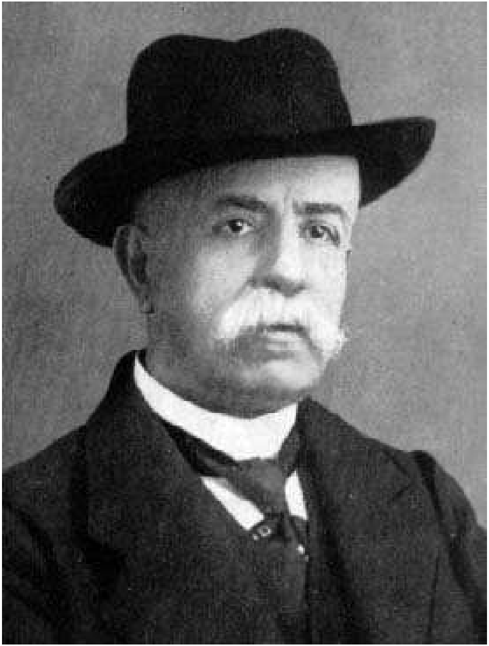
Tutto ciò è straordinariamente generale!

Il concetto di geometria di Riemann:

- contiene le geometrie euclidea, iperbolica, sferica, ..., come casi particolari;
- consente di studiare spazi non solo bi- o tridimensionali, ma con un numero arbitrario di dimensioni.

La geometria sintetica è ormai una disciplina di secondo piano.

Disgraziatamente, Riemann muore a nemmeno quarant'anni di età, senza aver potuto sviluppare le sue idee.



Gregorio Ricci Curbastro, Lugo (Stato Pontificio) 1853 – Bologna1925

Tullio Levi-Civita, Padova 1873 – Roma 1941

Ricci e il suo allievo/collaboratore Levi-Civita portano a compimento la visione di Riemann: negli anni 1887–1900 sviluppano il calcolo tensoriale e le sue applicazioni alla geometria differenziale di varietà con un numero arbitrario di dimensioni.

[Mathematische Annalen, 54 (1901) 125-201]

Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.

Par

M. M. G. Ricci et T. Levi-Civita à Padoue.

Table des matières.

Chapitre I.

Algorithme du calcul différentiel absolu.

Chapitre II.

La géométrie intrinsèque comme instrument de calcul.

Chapitre III.

Applications analytiques.

Scarso successo fra i matematici dell'epoca: le tecniche di Ricci vengono ritenute troppo formali ed inutilmente complicate. Se ne può fare a meno!

Ricci e il suo allievo/collaboratore Levi-Civita portano a compimento la visione di Riemann: negli anni 1887–1900 sviluppano il calcolo tensoriale e le sue applicazioni alla geometria differenziale di varietà con un numero arbitrario di dimensioni.

[Mathematische Annalen, 54 (1901) 125-201]

Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.

Par

M. M. G. Ricci et T. Levi-Civita à Padoue.

Table des matières.

Chapitre I.

Algorithme du calcul différentiel absolu.

Chapitre II.

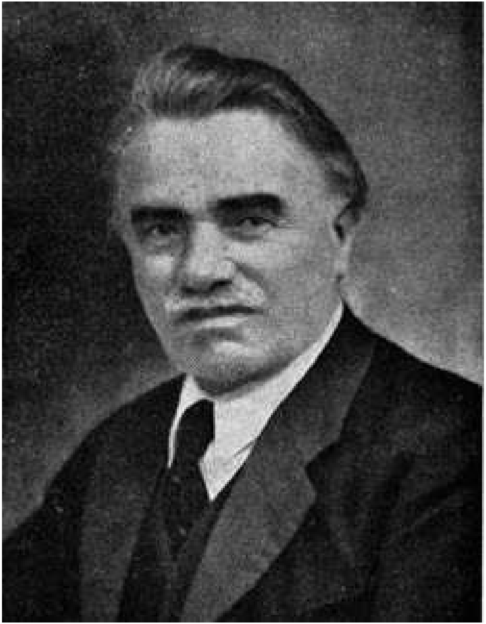
La géométrie intrinsèque comme instrument de calcul.

Chapitre III.

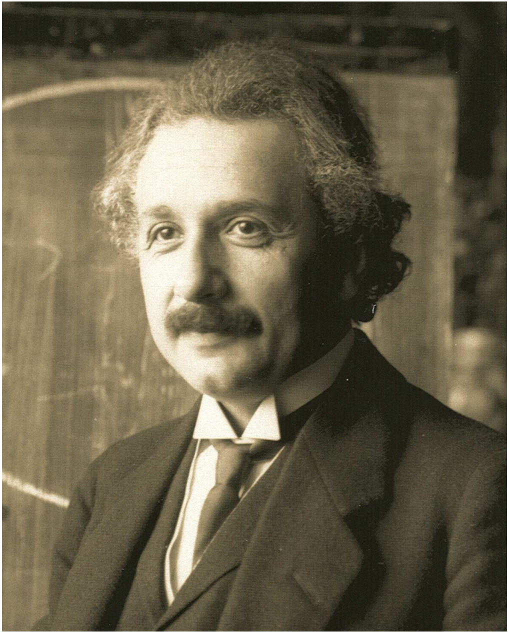
Applications analytiques.

Scarso successo fra i matematici dell'epoca: le tecniche di Ricci vengono ritenute troppo formali ed inutilmente complicate. Se ne può fare a meno!

"Preferisco che con metodi vecchi si trovino risultati nuovi al ritrovamento di risultati vecchi con metodi nuovi."



Luigi Bianchi, Parma 1856 – Pisa 1928



Albert Einstein 1879–1955

Nel 1912, Einstein è completamente immerso nel suo tentativo di generalizzare la teoria della relatività, includendo i fenomeni gravitazionali.

Le difficoltà sono enormi. In particolare, si rende conto che lo spaziotempo (quadridimensionale) deve essere in qualche modo "curvo", ma non sa come descrivere questa idea in modo preciso.

Nell'agosto del 1912, incontra a Zurigo un suo vecchio amico e compagno di studi.

Marcel Grossmann 1878–1936

Nel 1912, Einstein è completamente immerso nel suo tentativo di generalizzare la teoria della relatività, includendo i fenomeni gravitazionali.

Le difficoltà sono enormi. In particolare, si rende conto che lo spaziotempo (quadridimensionale) deve essere in qualche modo "curvo", ma non sa come descrivere questa idea in modo preciso.

Nell'agosto del 1912, incontra a Zurigo un suo vecchio amico e compagno di studi.

Marcel Grossmann 1878–1936

Nel 1912, Einstein è completamente immerso nel suo tentativo di generalizzare la teoria della relatività, includendo i fenomeni gravitazionali.

Le difficoltà sono enormi. In particolare, si rende conto che lo spaziotempo (quadridimensionale) deve essere in qualche modo "curvo", ma non sa come descrivere questa idea in modo preciso.

Nell'agosto del 1912, incontra a Zurigo un suo vecchio amico e compagno di studi.

Marcel Grossmann 1878–1936

Grossmann riconosce che lo strumento di cui Einstein ha bisogno è proprio la geometria riemanniana, nella forma sviluppata da Ricci e Levi-Civita pochi anni prima!

In tre anni, la teoria della relatività generale è completata.

Ora abbiamo una teoria della geometria fisica dello spaziotempo.

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{ab}$$

- La materia influenza la geometria.
- La geometria influenza l'evolversi dei fenomeni fisici.

Grossmann riconosce che lo strumento di cui Einstein ha bisogno è proprio la geometria riemanniana, nella forma sviluppata da Ricci e Levi-Civita pochi anni prima!

In tre anni, la teoria della relatività generale è completata.

Ora abbiamo una teoria della geometria fisica dello spaziotempo.

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{ab}$$

- La materia influenza la geometria.
- La geometria influenza l'evolversi dei fenomeni fisici.

Grossmann riconosce che lo strumento di cui Einstein ha bisogno è proprio la geometria riemanniana, nella forma sviluppata da Ricci e Levi-Civita pochi anni prima!

In tre anni, la teoria della relatività generale è completata.

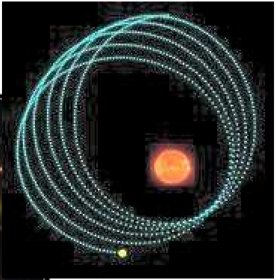
Ora abbiamo una teoria della geometria fisica dello spaziotempo.

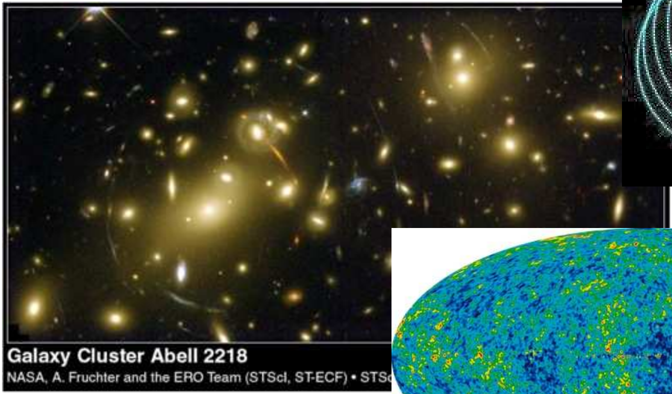
$$R_{ab} - \frac{1}{2} R\, g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

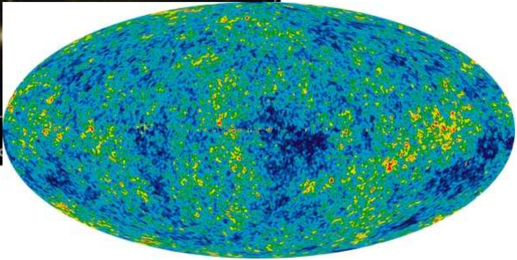
- La materia influenza la geometria.
- La geometria influenza l'evolversi dei fenomeni fisici.

Qual è, dunque, la geometria del nostro spazio fisico?

Un'altra storia, cronologicamente più breve,
ma più complessa.







Grazie per l'attenzione dimostrata!

Domande? Commenti?