

I.T.C. "Zanon"  
Udine - 9 gennaio 2012

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

*"...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!"*

conferenza iniziale per il laboratorio PLS:  
*"Equazioni lineari e matrici: la matematica in rete"*

Dimitri Breda

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università degli Studi di Udine

## alcune brevi premesse...

In questa conferenza gireremo intorno alla domanda

“...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!”

anche se resisteremo alla tentazione di fornire risposte. Piuttosto ragioniamo un po' sulla natura del quesito stesso:

## alcune brevi premesse...

In questa conferenza gireremo intorno alla domanda

“...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!”

anche se resisteremo alla tentazione di fornire risposte. Piuttosto ragioniamo un po' sulla natura del quesito stesso:

- uso **ATTIVO**: utilizzo **consapevole**

## alcune brevi premesse...

In questa conferenza gireremo intorno alla domanda

“...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!”

anche se resisteremo alla tentazione di fornire risposte. Piuttosto ragioniamo un po' sulla natura del quesito stesso:

- uso **ATTIVO**: utilizzo **consapevole**
  - conviene un'auto benzina o diesel? un tasso fisso o variabile?

## alcune brevi premesse...

In questa conferenza gireremo intorno alla domanda

“...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!”

anche se resisteremo alla tentazione di fornire risposte. Piuttosto ragioniamo un po' sulla natura del quesito stesso:

- uso **ATTIVO**: utilizzo **consapevole**
  - conviene un'auto benzina o diesel? un tasso fisso o variabile?
  - basarsi su esempi specifici è un terreno insidioso...

## alcune brevi premesse...

In questa conferenza gireremo intorno alla domanda

“...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!”

anche se resisteremo alla tentazione di fornire risposte. Piuttosto ragioniamo un po' sulla natura del quesito stesso:

- uso **ATTIVO**: utilizzo **consapevole**
  - conviene un'auto benzina o diesel? un tasso fisso o variabile?
  - basarsi su esempi specifici è un terreno insidioso...
    - “...scusi prof...ma a cosa servono i linguaggi di programmazione?!”

## alcune brevi premesse...

In questa conferenza gireremo intorno alla domanda

“...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!”

anche se resisteremo alla tentazione di fornire risposte. Piuttosto ragioniamo un po' sulla natura del quesito stesso:

- uso **ATTIVO**: utilizzo **consapevole**
  - conviene un'auto benzina o diesel? un tasso fisso o variabile?
  - basarsi su esempi specifici è un terreno insidioso...
    - “...scusi prof...ma a cosa servono i linguaggi di programmazione?!”
    - “...scusi prof...ma a cosa servono i temi di italiano?!”

## alcune brevi premesse...

In questa conferenza gireremo intorno alla domanda

“...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!”

anche se resisteremo alla tentazione di fornire risposte. Piuttosto ragioniamo un po' sulla natura del quesito stesso:

- uso **ATTIVO**: utilizzo **consapevole**
  - conviene un'auto benzina o diesel? un tasso fisso o variabile?
  - basarsi su esempi specifici è un terreno insidioso...
    - “...scusi prof...ma a cosa servono i linguaggi di programmazione?!”
    - “...scusi prof...ma a cosa servono i temi di italiano?!”
  - sviluppo della capacità razionale: **deduzione**, che non è **induzione** (il *tacchino induttivista* [Bertrand Russell, 1872-1970])

## alcune brevi premesse...

In questa conferenza gireremo intorno alla domanda

“...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!”

anche se resisteremo alla tentazione di fornire risposte. Piuttosto ragioniamo un po' sulla natura del quesito stesso:

- uso **ATTIVO**: utilizzo **consapevole**
  - conviene un'auto benzina o diesel? un tasso fisso o variabile?
  - basarsi su esempi specifici è un terreno insidioso...
    - “...scusi prof...ma a cosa servono i linguaggi di programmazione?!”
    - “...scusi prof...ma a cosa servono i temi di italiano?!”
  - sviluppo della capacità razionale: **deduzione**, che non è **induzione** (il *tacchino induttivista* [Bertrand Russell, 1872-1970])
- uso **PASSIVO**: utilizzo **inconsapevole**, seppur quotidiano e spesso insospettabile...

- 1 un mattone, l'Everest e gli antichi egizi
- 2 internet e il web
- 3 Google

1 un mattone, l'Everest e gli antichi egizi

2 internet e il web

3 Google

un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone, quanto pesa il mattone?

...alcune risposte in rete:

un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone, quanto pesa il mattone?

...alcune risposte in rete:

...non l'ho capita

un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone, quanto pesa il mattone?

...alcune risposte in rete:

Forse sbaglio..... o forse no, ma credo che la risposta esatta sia 666,66 gr. o se preferisci 0,666 kg.

Kg 1 è pari ad 1 mattone e  $1/2$ , quindi.....  
Kg 1 diviso 3 parti per 2 parti che sarebbe il mattone.

il mattone peserà 1,5 kg, perchè se il mattone pesa 1 kg, mezzo mattone ne pesa 0,5, quindi  $1 + 0,5$  uguale 1,5 kg

un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone, quanto pesa il mattone?

...alcune risposte in rete:

2 kg ovviamente

ehm 2 kg. E non ci vuole un'equazione per risolverla: se sai che 1 kg è il peso di metà mattone basta moltiplicarlo per 2

Allora, se un mattone pesa 1 kg più un mezzo mattone, allora le metà sono uguali. l'altra metà pesa 1 kg. il mattone pesa 2 kg

un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone, quanto pesa il mattone?

...alcune risposte in rete:

allora imponendo il mattone a incognita  $x$  viene  $x = 1 + X/2$  e risolvendo l'equazione viene  $x=2$  quindi pesa 2kg

comunque potrebbe essere anche 1.75 kg perchè-

1 mattone= 1 kg + mezzo mattone quindi

mezzo mattone= 0.5 kg più 1 quarto di mattone

e 1 quarto di mattone è 0.25 kg

quindi sommate 0.25 kg a 0.5 kg e viene che mezzo mattone è 0.75 kg, poi sommate il peso di mezzo mattone a 1 kg ed esce che il mattone pesa 1.75 kg

e comunque non è 1.5 kg perchè dice che un mattone pesa 1 kg e MEZZO

MATTONE e non solo 1 kg quindi mezzo mattone non pesa solo 500 grammi come dicono alcuni. spero che mi abbiate capito

un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone, quanto pesa il mattone?

...alcune risposte in rete:

$$x = 1 + 0,5x$$

$$2x = 2 + x$$

$$x = 2$$

è chiaro?

un mattone pesa 1 kg più mezzo mattone, quanto pesa il mattone?

...alcune risposte in rete:

$$x = 1 + 0,5x$$

$$2x = 2 + x$$

$$x = 2$$

è chiaro?

NB: per trovare queste risposte (<http://it.answers.yahoo.com/>) qualcuno ha risolto per noi circa 8 miliardi di equazioni!

Abbiamo visto risposte, esatte o meno, basate

- sull'intuito

Abbiamo visto risposte, esatte o meno, basate

- sull'intuito
- sul ragionamento "*non formale*"

Abbiamo visto risposte, esatte o meno, basate

- sull'intuito
- sul ragionamento "*non formale*"
- sul ragionamento "*formale*", ovvero la **traduzione del problema in linguaggio matematico**  $\Rightarrow$  **EQUAZIONE** (di primo grado o lineare.)

Abbiamo visto risposte, esatte o meno, basate

- sull'intuito
- sul ragionamento "*non formale*"
- sul ragionamento "*formale*", ovvero la **traduzione del problema in linguaggio matematico**  $\Rightarrow$  **EQUAZIONE** (di primo grado o lineare.)

Una volta impostato il problema secondo l'opportuno modello matematico, quindi

$$x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

il processo deduttivo porta (**sperabilmente**) alla soluzione.

Abbiamo visto risposte, esatte o meno, basate

- sull'intuito
- sul ragionamento "*non formale*"
- sul ragionamento "*formale*", ovvero la **traduzione del problema in linguaggio matematico**  $\Rightarrow$  **EQUAZIONE** (di primo grado o lineare.)

Una volta impostato il problema secondo l'opportuno modello matematico, quindi

$$x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

il processo deduttivo porta (**sperabilmente**) alla soluzione.

Nel caso del mattone si applicano i **principi di equivalenza** (equazione = bilancia):

moltiplicazione per 2 :

$$2x = 2 + x$$

sottrazione di  $x$  :

$$x = 2$$

L'**intuito** è un'arma formidabile, difficilmente confinabile nella sfera razionale... nonostante il notevole vantaggio iniziale che reca, deve far posto, prima o poi, ad un'attività più logica.

L'**intuito** è un'arma formidabile, difficilmente confinabile nella sfera razionale... nonostante il notevole vantaggio iniziale che reca, deve far posto, prima o poi, ad un'attività più logica.

Non mi credete?

L'**intuito** è un'arma formidabile, difficilmente confinabile nella sfera razionale... nonostante il notevole vantaggio iniziale che reca, deve far posto, prima o poi, ad un'attività più logica.

Non mi credete? Provate allora a rispondere **intuitivamente** a

**26 mattoni uguali pesano 57 kg più 7 mattoni, quanto pesa un mattone?**

L'**intuito** è un'arma formidabile, difficilmente confinabile nella sfera razionale... nonostante il notevole vantaggio iniziale che reca, deve far posto, prima o poi, ad un'attività più logica.

Non mi credete? Provate allora a rispondere **intuitivamente** a

**26 mattoni uguali pesano 57 kg più 7 mattoni, quanto pesa un mattone?**

Tra l'altro, non coinvolgendo più il comune concetto di metà, questo secondo quesito fa cadere anche l'uso del ragionamento non formale.

L'**intuito** è un'arma formidabile, difficilmente confinabile nella sfera razionale... nonostante il notevole vantaggio iniziale che reca, deve far posto, prima o poi, ad un'attività più logica.

Non mi credete? Provate allora a rispondere **intuitivamente** a

**26 mattoni uguali pesano 57 kg più 7 mattoni, quanto pesa un mattone?**

Tra l'altro, non coinvolgendo più il comune concetto di metà, questo secondo quesito fa cadere anche l'uso del ragionamento non formale.

Al contrario, il processo formale di **formulazione del modello** (equazione lineare) e conseguente **risoluzione** (deduzione) regge ancora, e inalterato:

$$\text{equazione :} \qquad 26x = 57 + 7x$$

$$\text{sottrazione di } 7x : \qquad 19x = 57$$

$$\text{divisione per } 19 : \qquad x = 3$$

Essendo poi questo un procedimento di **astrazione**, consente diverse direzioni di **generalizzazione**:

Essendo poi questo un procedimento di **astrazione**, consente diverse direzioni di **generalizzazione**:

3 mattoni grandi e 7 piccoli pesano 26 kg  
un muro di 90 mattoni grandi e 200 piccoli pesa 760 kg  
quanto pesano, rispettivamente, un mattone grande e uno piccolo?

che, detti  $x_1$  ed  $x_2$  il peso dei mattoni grande e piccolo, rispettivamente, si traduce nel sistema di equazioni lineari o, brevemente, **sistema lineare**

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

Essendo poi questo un procedimento di **astrazione**, consente diverse direzioni di **generalizzazione**:

3 mattoni grandi e 7 piccoli pesano 26 kg  
un muro di 90 mattoni grandi e 200 piccoli pesa 760 kg  
quanto pesano, rispettivamente, un mattone grande e uno piccolo?

che, detti  $x_1$  ed  $x_2$  il peso dei mattoni grande e piccolo, rispettivamente, si traduce nel sistema di equazioni lineari o, brevemente, **sistema lineare**

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

...certo, la risoluzione è un altro paio di maniche!

...allora come si risolve un sistema lineare? per sostituzione? per eliminazione?

...allora come si risolve un sistema lineare? per sostituzione? per eliminazione?

intanto scriviamolo in modo **ordinato**:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

...allora come si risolve un sistema lineare? per sostituzione? per eliminazione?

intanto scriviamolo in modo **ordinato**:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

moltiplichiamo la prima equazione per  $-30$  (che corrisponde a  $-90/3$ ):

$$\begin{cases} -90x_1 - 210x_2 = -780 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

...allora come si risolve un sistema lineare? per sostituzione? per eliminazione?

intanto scriviamolo in modo **ordinato**:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

moltiplichiamo la prima equazione per  $-30$  (che corrisponde a  $-90/3$ ):

$$\begin{cases} -90x_1 - 210x_2 = -780 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

e sommiamola alla seconda

$$\begin{cases} -90x_1 - 210x_2 = -780 \\ \phantom{-90x_1} - 10x_2 = -20 \end{cases}$$

...allora come si risolve un sistema lineare? per sostituzione? per eliminazione?

intanto scriviamolo in modo **ordinato**:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

moltiplichiamo la prima equazione per  $-30$  (che corrisponde a  $-90/3$ ):

$$\begin{cases} -90x_1 - 210x_2 = -780 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

e sommiamola alla seconda

$$\begin{cases} -90x_1 - 210x_2 = -780 \\ -10x_2 = -20 \end{cases}$$

ricaviamo quindi  $x_2 = 2$  dalla seconda e sostituendo nella prima:

$$-90x_1 - 210 \cdot 2 = -780 \Rightarrow -90x_1 = -360 \Rightarrow x_1 = 4$$

...allora come si risolve un sistema lineare? per sostituzione? per eliminazione?

intanto scriviamolo in modo **ordinato**:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

moltiplichiamo la prima equazione per  $-30$  (che corrisponde a  $-90/3$ ):

$$\begin{cases} -90x_1 - 210x_2 = -780 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

e sommiamola alla seconda

$$\begin{cases} -90x_1 - 210x_2 = -780 \\ \phantom{-90x_1} - 10x_2 = -20 \end{cases}$$

ricaviamo quindi  $x_2 = 2$  dalla seconda e sostituendo nella prima:

$$-90x_1 - 210 \cdot 2 = -780 \Rightarrow -90x_1 = -360 \Rightarrow x_1 = 4$$



Carl Friedrich Gauss  
(1777-1855)

**metodo di eliminazione  
di Gauss**  
e  
**sostituzione all'indietro**  
GE+BS: [1809?]

Quello che abbiamo appena utilizzato è un **algoritmo** di risoluzione: un numero finito di passi che portano alla soluzione (ancora deduzione...).

L'idea di algoritmo è fondamentale perché codifica un processo risolutivo che, invariato, si applica a tutti i casi che rientrano nel modello in esame.

Nel nostro caso: **tutti** i sistemi lineari si possono risolvere con GE+BS.

Quello che abbiamo appena utilizzato è un **algoritmo** di risoluzione: un numero finito di passi che portano alla soluzione (ancora deduzione...).

L'idea di algoritmo è fondamentale perché codifica un processo risolutivo che, invariato, si applica a tutti i casi che rientrano nel modello in esame.

Nel nostro caso: **tutti** i sistemi lineari si possono risolvere con GE+BS.

NB: in matematica le affermazioni generali sono delicate: con "tutti" i sistemi qui intendiamo quelli con un numero di equazioni pari al numero di incognite (altrimenti minimi quadrati, regressione lineare...), e che hanno comunque una soluzione.

Per esprimere "tutti" ricorriamo alle **MATRICI** e ai **VETTORI**:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 90 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 760 \end{pmatrix}$$

Per esprimere "tutti" ricorriamo alle **MATRICI** e ai **VETTORI**:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 90 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 760 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Per esprimere "tutti" ricorriamo alle **MATRICI** e ai **VETTORI**:

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 26 \\ 90x_1 + 200x_2 = 760 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 90 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 760 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

e scriviamo semplicemente

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

chiamando

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  matrice dei coefficienti
- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  vettore delle incognite
- $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  vettore dei termini noti

Allora un sistema lineare con  $n$  equazioni ed  $n$  incognite

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Allora un sistema lineare con  $n$  equazioni ed  $n$  incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

lo possiamo scrivere come

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ovvero sempre come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

e si parla di sistema lineare di **dimensione  $n$** .

Allora un sistema lineare con  $n$  equazioni ed  $n$  incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

lo possiamo scrivere come

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ovvero sempre come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

e si parla di sistema lineare di **dimensione  $n$** .

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

$i =$  indice di RIGA  
(equazione)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

$j = 1, 2, \dots, n =$  indici di COLONNA  
(incognite)

Bene, adesso che abbiamo

- imparato a scrivere “tutti” i sistemi lineari e che

Bene, adesso che abbiamo

- imparato a scrivere “tutti” i sistemi lineari e che
- sappiamo come risolverli mediante GE+BS

Bene, adesso che abbiamo

- imparato a scrivere “tutti” i sistemi lineari e che
- sappiamo come risolverli mediante GE+BS

vi dico che questo algoritmo comporta

circa  $\frac{2}{3}n^3$  operazioni

dove  $n$  è la dimensione del sistema.

Bene, adesso che abbiamo

- imparato a scrivere “tutti” i sistemi lineari e che
- sappiamo come risolverli mediante GE+BS

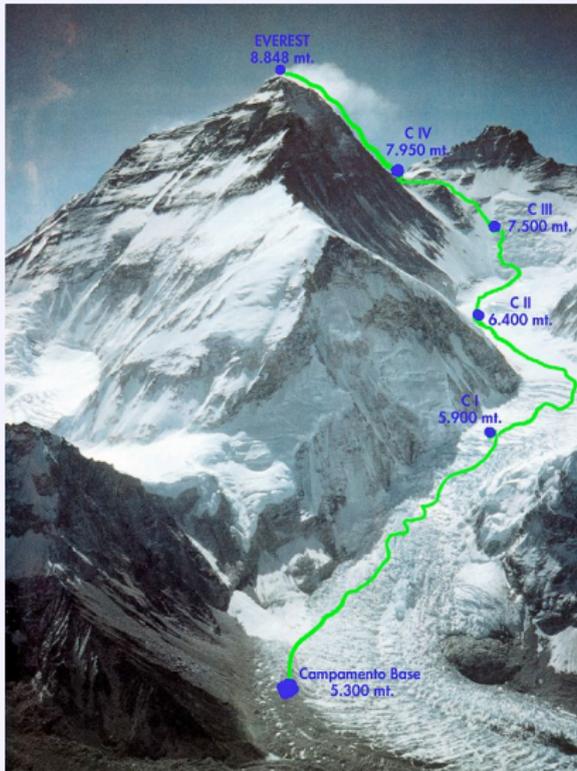
vi dico che questo algoritmo comporta

circa  $\frac{2}{3}n^3$  operazioni

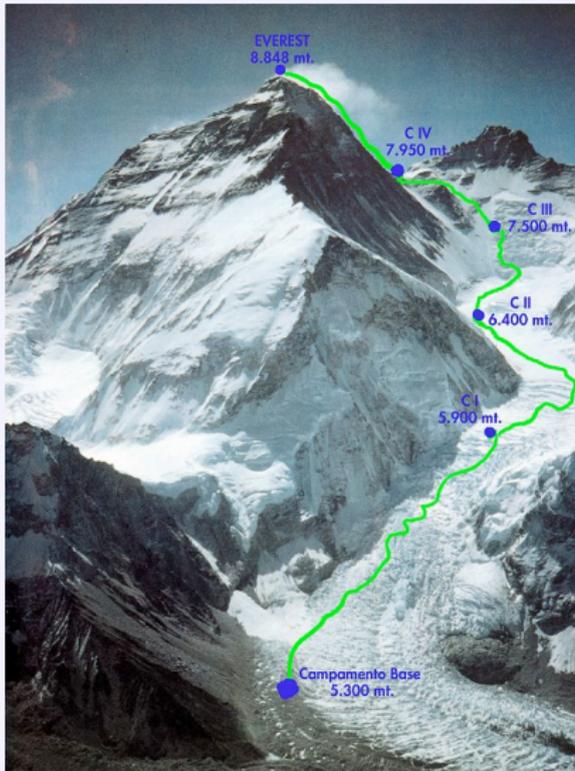
dove  $n$  è la dimensione del sistema.

NB: ho detto che “sappiamo come risolverli”, non che “li risolviamo”; torneremo su questa sottile ma determinante questione verso la fine...





La via normale dal versante sud alla vetta del monte Everest è arcinota: quindi “sappiamo come salire” sul tetto del mondo...



La via normale dal versante sud alla vetta del monte Everest è arcinota: quindi **“sappiamo come salire”** sul tetto del mondo...

...ma **“salirlo”** veramente? finora la vetta è stata salita poco meno di 4000 volte...

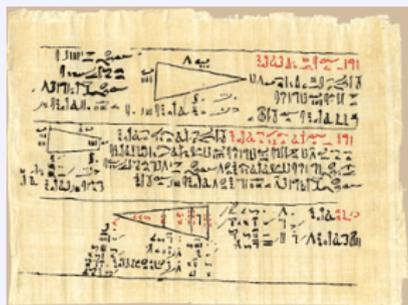
...un po' di storia

È curioso osservare come uno dei primi esempi documentati di equazione lineare, risalente agli antichi egizi, non si discosta poi molto dalla questione del mattone:

qual è il valore del mucchio se il mucchio e un settimo del mucchio sono uguali a 19?

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

[papiro di Rhind, ~ 1650 ac]



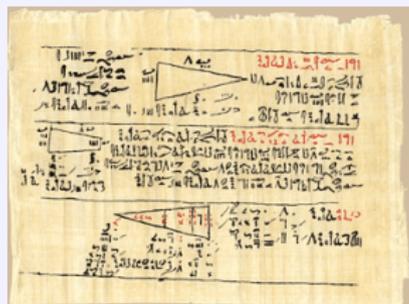
...un po' di storia

È curioso osservare come uno dei primi esempi documentati di equazione lineare, risalente agli antichi **egizi**, non si discosta poi molto dalla questione del mattone:

qual è il valore del mucchio se il mucchio e un settimo del mucchio sono uguali a 19?

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

[papiro di Rhind, ~ 1650 ac]



Risale invece ai **babilonesi** un esempio di sistema (anche il calcolo di  $\sqrt{x}$ ):

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \text{larghezza} + \text{lunghezza} = 7 \text{mani} \\ \text{lunghezza} + \text{larghezza} = 10 \text{mani} \end{cases}$$

[roccia di Behistun, 1843 dc]



Altri se ne trovano in antichi testi **cinesi**:

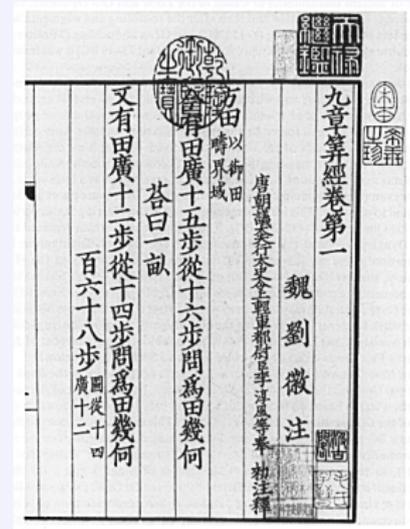
tre fasci di raccolto di buona qualità, due di media qualità e uno di cattiva qualità sono venduti a 29 doi

due fasci di buona qualità, tre di media e uno di cattiva qualità sono venduti a 34 doi

un fascio di buona qualità, due di media e tre di cattiva qualità sono venduti a 26 doi

quali sono i costi di ciascun fascio di buona, media e cattiva qualità?

[Chiu-chang Suan-shu, ~ 200 ac]



Altri se ne trovano in antichi testi **cinesi**:

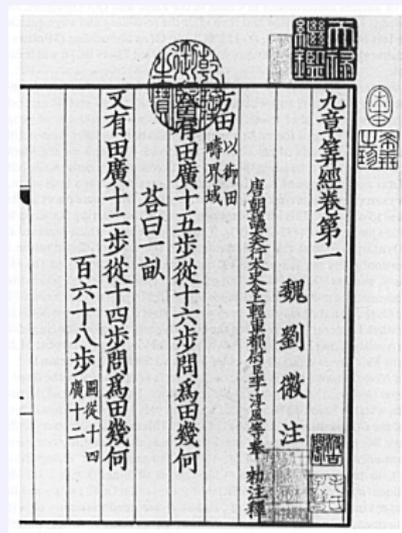
tre fasci di raccolto di buona qualità, due di media qualità e uno di cattiva qualità sono venduti a 29 doi

due fasci di buona qualità, tre di media e uno di cattiva qualità sono venduti a 34 doi

un fascio di buona qualità, due di media e tre di cattiva qualità sono venduti a 26 doi

quali sono i costi di ciascun fascio di buona, media e cattiva qualità?

[Chiu-chang Suan-shu, ~ 200 ac]



**ESERCIZIO:** qual è la matrice corrispondente? e il vettore dei termini noti?

1 un mattone, l'Everest e gli antichi egizi

2 internet e il web

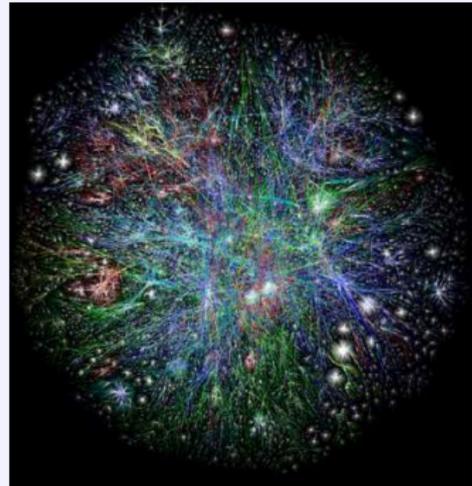
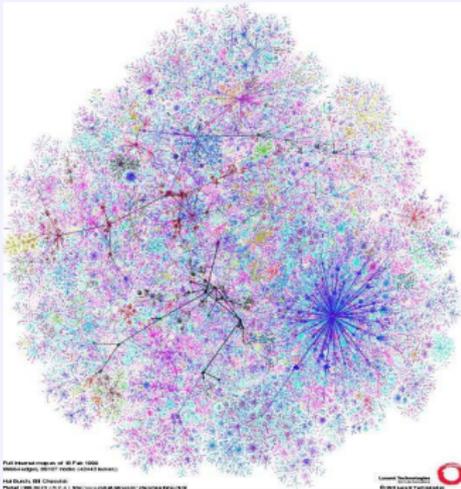
3 Google

## ...ancora un po' di storia: da ARPANET a INTERNET

- 29 ottobre 1969: **prima connessione** tra due computer (UCLA-SRI)
- 5 dicembre 1969: **prima rete** di 4 nodi (UCLA-SRI-UCSB-UU)
- anni '70: **TCP/IP** (Transmission Control Protocol/Internet Protocol)

## ...ancora un po' di storia: da ARPANET a INTERNET

- 29 ottobre 1969: **prima connessione** tra due computer (UCLA-SRI)
- 5 dicembre 1969: **prima rete** di 4 nodi (UCLA-SRI-UCSB-UU)
- anni '70: **TCP/IP** (Transmission Control Protocol/Internet Protocol)



fine anni '80: ipertesto, **HTTP** (Hyper Text Transfer Protocol)

6 agosto 1991: il **w**orld **w**ide **w**eb

fine anni '80: ipertesto, **HTTP** (**H**yper **T**ext **T**ransfer **P**rotocol)



Tim Berners-Lee (1955-)



Robert Cailliau (1947-)

## la matematica in rete

**Internet** e il **web** rappresentano fonti di problemi interessanti per la matematica, dal punto di vista teorico e applicativo.

## la matematica in rete

**Internet** e il **web** rappresentano fonti di problemi interessanti per la matematica, dal punto di vista teorico e applicativo.

Essi sono relazionati alla gestione delle **informazioni**:

- **dimensione** delle informazioni
- controllo del **flusso** delle informazioni
- **reperimento** delle informazioni
- **ordinamento** delle informazioni

## la matematica in rete

**Internet** e il **web** rappresentano fonti di problemi interessanti per la matematica, dal punto di vista teorico e applicativo.

Essi sono relazionati alla gestione delle **informazioni**:

- **dimensione** delle informazioni
- controllo del **flusso** delle informazioni
- **reperimento** delle informazioni
- **ordinamento delle informazioni**

## una piccola parentesi



mp3,jpeg,mpeg,cd,dvd,dvix...

## una piccola parentesi



mp3,jpeg,mpeg,cd,dvd,dvix...



J. B. Joseph Fourier (1768-1830)

1 un mattone, l'Everest e gli antichi egizi

2 internet e il web

3 Google

come fatturare miliardi con 3 semplici regole...



27 settembre 1998: Larry Page (1973-) e Sergey Brin (1973-) fondano Google

## il motore di ricerca

L'enorme contenuto informativo del web risulterebbe assai poco utile se non fossimo capaci di

## il motore di ricerca

L'enorme contenuto informativo del web risulterebbe assai poco utile se non fossimo capaci di

- trovare quello che cerchiamo e

## il motore di ricerca

L'enorme contenuto informativo del web risulterebbe assai poco utile se non fossimo capaci di

- trovare quello che cerchiamo e
- scegliere, tra quello che abbiamo trovato, **ciò che più ci interessa.**

## il motore di ricerca

L'enorme contenuto informativo del web risulterebbe assai poco utile se non fossimo capaci di

- trovare quello che cerchiamo e
- scegliere, tra quello che abbiamo trovato, **ciò che più ci interessa.**

Un buon motore di ricerca deve essere in grado di soddisfare entrambi i criteri

## il motore di ricerca

L'enorme contenuto informativo del web risulterebbe assai poco utile se non fossimo capaci di

- trovare quello che cerchiamo e
- scegliere, tra quello che abbiamo trovato, **ciò che più ci interessa.**

Un buon motore di ricerca deve essere in grado di soddisfare entrambi i criteri

- ma mentre il primo rappresenta un problema già affrontato in altri settori (ad es. ricerca bibliotecaria) ed è oggi risolvibile in modo efficiente: *information retrieval*,

## il motore di ricerca

L'enorme contenuto informativo del web risulterebbe assai poco utile se non fossimo capaci di

- trovare quello che cerchiamo e
- scegliere, tra quello che abbiamo trovato, **ciò che più ci interessa.**

Un buon motore di ricerca deve essere in grado di soddisfare entrambi i criteri

- ma mentre il primo rappresenta un problema già affrontato in altri settori (ad es. ricerca bibliotecaria) ed è oggi risolvibile in modo efficiente: *information retrieval*,
- il secondo è alquanto recente e rappresenta tuttora un attivo campo di ricerca interdisciplinare.

## importanza di una pagina web: il pagerank

## l'importanza di una pagina web

- È ovvio che qualunque definizione di “importante” (o “interessante”) potrebbe risultare piuttosto soggettiva.

## l'importanza di una pagina web

- È ovvio che qualunque definizione di “importante” (o “interessante”) potrebbe risultare piuttosto soggettiva.
- Bisogna quindi formulare un criterio che sia il più indipendente possibile dalla soggettività dell'individuo che effettua la ricerca.

## l'importanza di una pagina web

- È ovvio che qualunque definizione di “importante” (o “interessante”) potrebbe risultare piuttosto soggettiva.
- Bisogna quindi formulare un criterio che sia il più indipendente possibile dalla soggettività dell'individuo che effettua la ricerca.
- Un modo sicuro per realizzare ciò è quello di definire una pagina più “importante” di un'altra pagina **indipendentemente dal contenuto informativo**.

## l'importanza di una pagina web

- È ovvio che qualunque definizione di “importante” (o “interessante”) potrebbe risultare piuttosto soggettiva.
- Bisogna quindi formulare un criterio che sia il più indipendente possibile dalla soggettività dell'individuo che effettua la ricerca.
- Un modo sicuro per realizzare ciò è quello di definire una pagina più “importante” di un'altra pagina **indipendentemente dal contenuto informativo**.
- Se ci svincoliamo dal contenuto delle pagine, allora potremmo **classificarle** tutte indipendentemente da quello che cerchiamo, ma solo secondo la loro **importanza** relativa:

## l'importanza di una pagina web

- È ovvio che qualunque definizione di “importante” (o “interessante”) potrebbe risultare piuttosto soggettiva.
- Bisogna quindi formulare un criterio che sia il più indipendente possibile dalla soggettività dell'individuo che effettua la ricerca.
- Un modo sicuro per realizzare ciò è quello di definire una pagina più “importante” di un'altra pagina **indipendentemente dal contenuto informativo**.
- Se ci svincoliamo dal contenuto delle pagine, allora potremmo **classificarle** tutte indipendentemente da quello che cerchiamo, ma solo secondo la loro **importanza** relativa:

Problema:

classificare le pagine web secondo la loro importanza

ma cos'è l'importanza di una pagina?

Dato che parliamo di **classificare** le **pagine** web secondo la loro importanza, quest'ultima viene chiamata

**page-rank**

## ma cos'è l'importanza di una pagina?

Dato che parliamo di classificare le pagine web secondo la loro importanza, quest'ultima viene chiamata

### page-rank

Il pagerank può essere definito secondo diversi criteri, ad es. in base

- a quante volte quello che cerco compare

ma dipenderebbe dal contenuto.

## ma cos'è l'importanza di una pagina?

Dato che parliamo di classificare le pagine web secondo la loro importanza, quest'ultima viene chiamata

### page-rank

Il pagerank può essere definito secondo diversi criteri, ad es. in base

- a quante volte quello che cerco compare

ma dipenderebbe dal contenuto.

Sfruttiamo piuttosto una caratteristica che troviamo solo nel web: i **collegamenti ipertestuali** o **link**.

## ma cos'è l'importanza di una pagina?

Dato che parliamo di classificare le pagine web secondo la loro importanza, quest'ultima viene chiamata

### page-rank

Il pagerank può essere definito secondo diversi criteri, ad es. in base

- a quante volte quello che cerco compare

ma dipenderebbe dal contenuto.

Sfruttiamo piuttosto una caratteristica che troviamo solo nel web: i **collegamenti ipertestuali** o **link**. Potremmo allora dire che una pagina è importante perché

- ha tanti link uscenti

## ma cos'è l'importanza di una pagina?

Dato che parliamo di classificare le pagine web secondo la loro importanza, quest'ultima viene chiamata

### page-rank

Il pagerank può essere definito secondo diversi criteri, ad es. in base

- a quante volte quello che cerco compare

ma dipenderebbe dal contenuto.

Sfruttiamo piuttosto una caratteristica che troviamo solo nel web: i **collegamenti ipertestuali** o **link**. Potremmo allora dire che una pagina è importante perché

- ha tanti link uscenti
- ha tanti link entranti

## ma cos'è l'importanza di una pagina?

Dato che parliamo di classificare le pagine web secondo la loro importanza, quest'ultima viene chiamata

### page-rank

Il pagerank può essere definito secondo diversi criteri, ad es. in base

- a quante volte quello che cerco compare

ma dipenderebbe dal contenuto.

Sfruttiamo piuttosto una caratteristica che troviamo solo nel web: i **collegamenti ipertestuali** o **link**. Potremmo allora dire che una pagina è importante perché

- ha tanti link uscenti
- ha tanti link entranti
- ha tanti link entranti che provengono da pagine IMPORTANTI.

## ma cos'è l'importanza di una pagina?

Dato che parliamo di classificare le pagine web secondo la loro importanza, quest'ultima viene chiamata

### page-rank

Il pagerank può essere definito secondo diversi criteri, ad es. in base

- a quante volte quello che cerco compare

ma dipenderebbe dal contenuto.

Sfruttiamo piuttosto una caratteristica che troviamo solo nel web: i **collegamenti ipertestuali** o **link**. Potremmo allora dire che una pagina è importante perché

- ha tanti link uscenti
- ha tanti link entranti
- **ha tanti link entranti che provengono da pagine IMPORTANTI.**

## il pagerank di Google

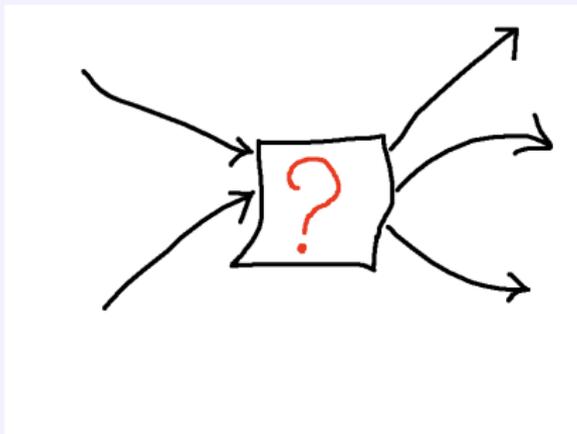
Page e Brin hanno proposto i seguenti criteri per classificare le pagine secondo il loro pagerank:



## il pagerank di Google

Page e Brin hanno proposto i seguenti criteri per classificare le pagine secondo il loro pagerank:

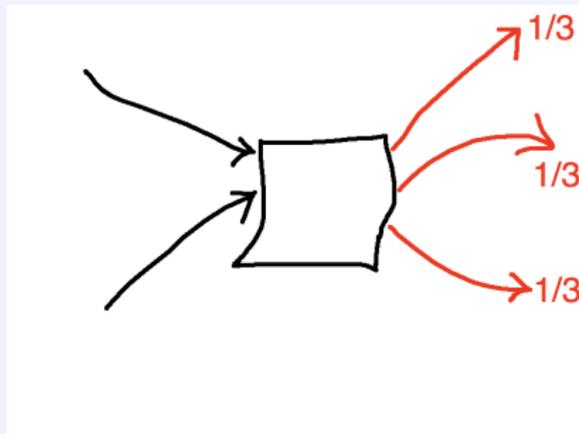
- 1 il pagerank di una pagina dipende dai link e non dal contenuto informativo



## il pagerank di Google

Page e Brin hanno proposto i seguenti criteri per classificare le pagine secondo il loro pagerank:

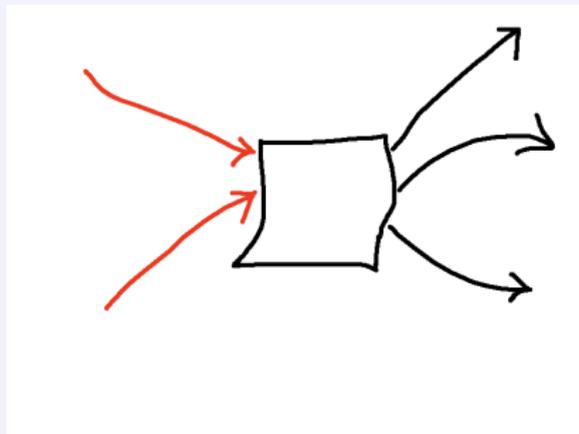
- 1 il pagerank di una pagina dipende dai link e non dal contenuto informativo
- 2 il pagerank di una pagina viene distribuito in parti uguali alle pagine a cui punta



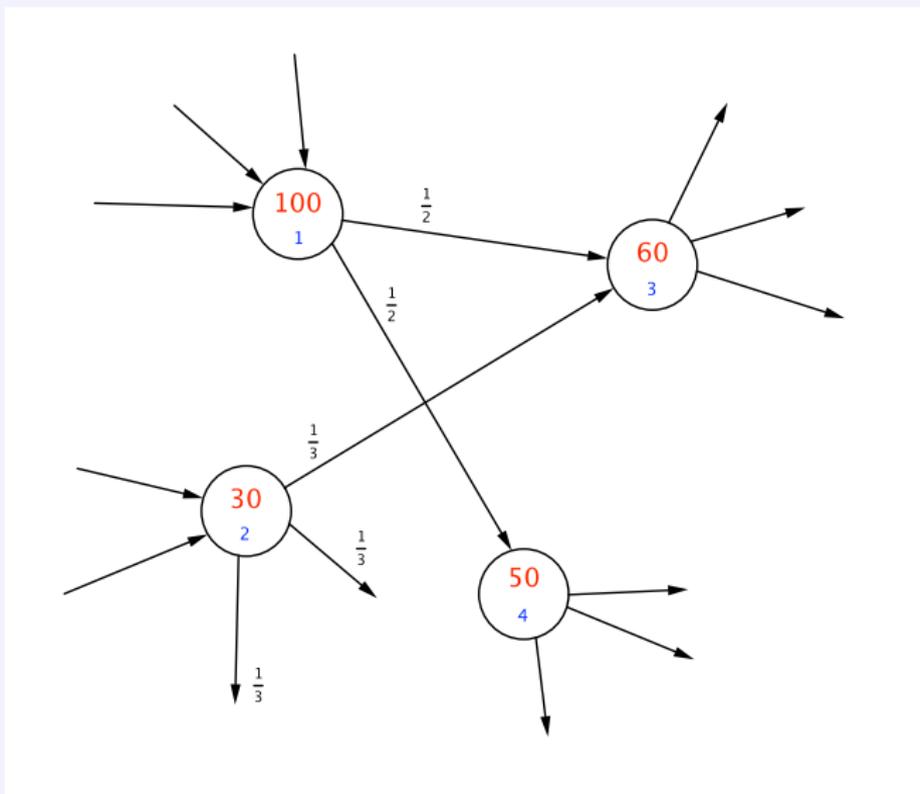
## il pagerank di Google

Page e Brin hanno proposto i seguenti criteri per classificare le pagine secondo il loro pagerank:

- 1 il pagerank di una pagina dipende dai link e non dal contenuto informativo
- 2 il pagerank di una pagina viene distribuito in parti uguali alle pagine a cui punta
- 3 il pagerank di una pagina è la somma delle frazioni di pagerank delle pagine che puntano ad essa



## il pagerank di Google: un piccolo esempio



un primo modello: ???

## un po' di notazione

Numeriamo le pagine web da 1 ad  $n$  e indichiamo con

- $P_j$  la  $j$ -esima pagina
- $x_j$  il **pagerank** di  $P_j$

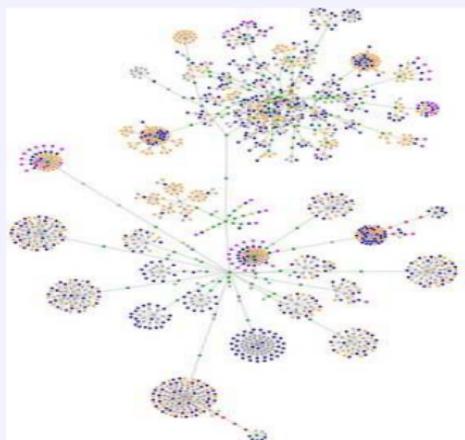
per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$ . Dunque la pagina  $P_j$  ha importanza  $x_j$ .

## un po' di notazione

Numeriamo le pagine web da 1 ad  $n$  e indichiamo con

- $P_j$  la  $j$ -esima pagina
- $x_j$  il **pagerank** di  $P_j$

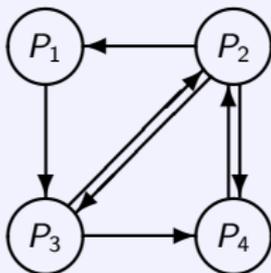
per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$ . Dunque la pagina  $P_j$  ha importanza  $x_j$ .



Naturalmente  $n$  è molto grande, meglio iniziare da un piccolo (ma esaustivo) esempio con  $n = 4$ .

## esempio con $n = 4$

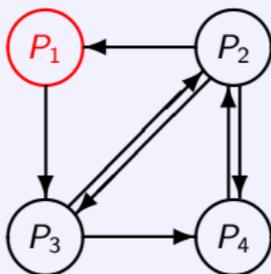
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=					
$x_2$	=					
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

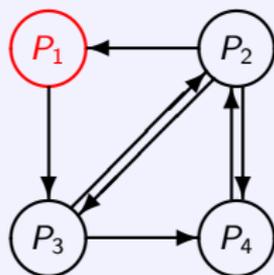
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=					
$x_2$	=					
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

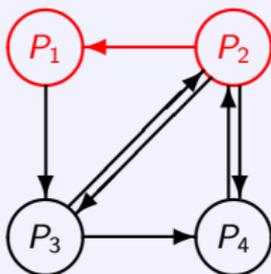
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0				
$x_2$	=					
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

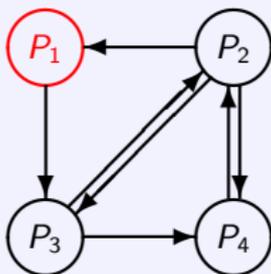
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$			
$x_2$	=					
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

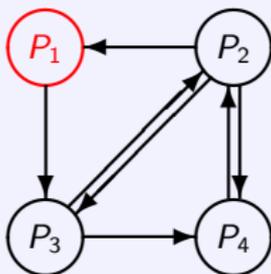
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0		
$x_2$	=					
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

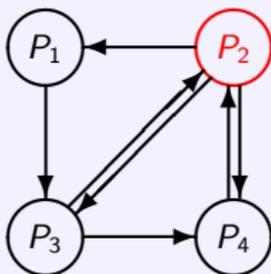
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=					
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

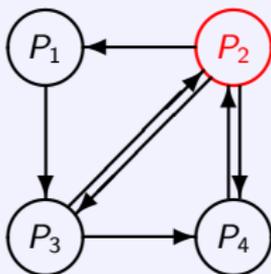
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=					
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

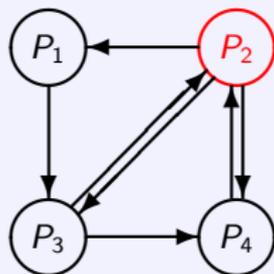
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0				
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

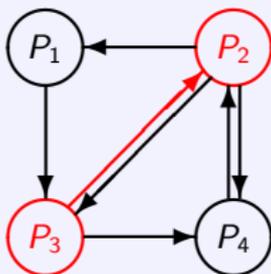
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0			
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

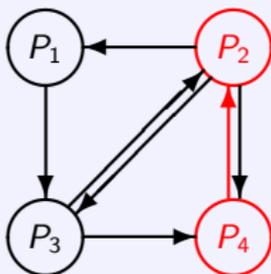
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$		
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

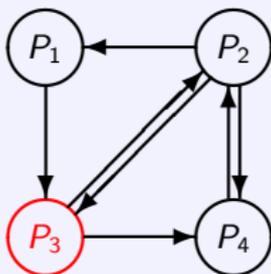
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

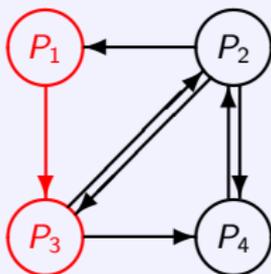
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=					
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

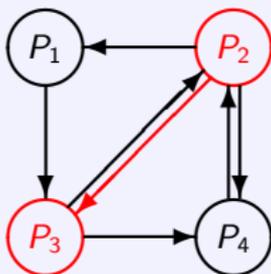
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$				
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

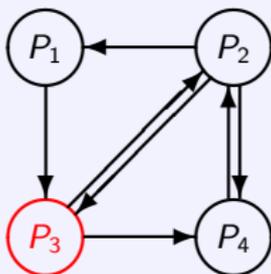
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$			
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

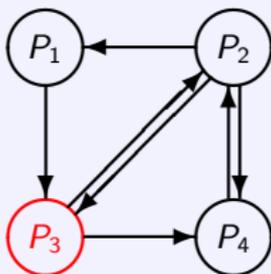
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0		
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

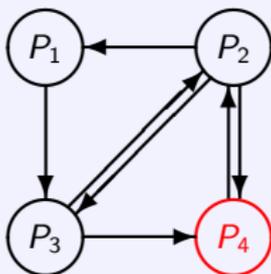
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

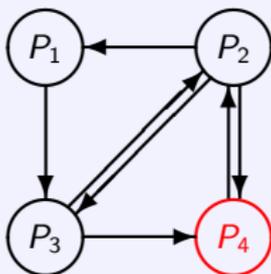
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=					

## esempio con $n = 4$

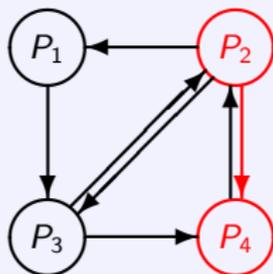
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=	0				

## esempio con $n = 4$

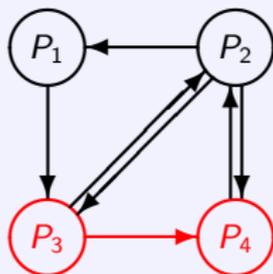
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2$			

## esempio con $n = 4$

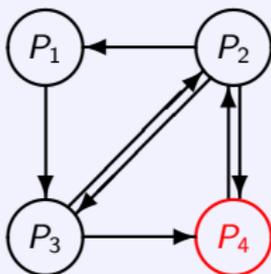
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2$	$+x_3$		

## esempio con $n = 4$

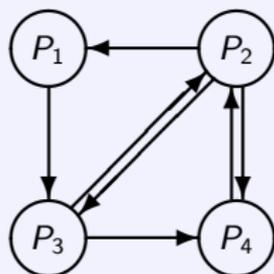
Vediamo i link **entranti** in ciascuna pagina (regola n.3):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2$	$+x_3$	0	

## esempio con $n = 4$

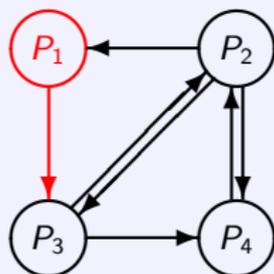
Contiamo i link **uscanti** da ciascuna pagina (regola n.2):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2$	$+x_3$	0	

## esempio con $n = 4$

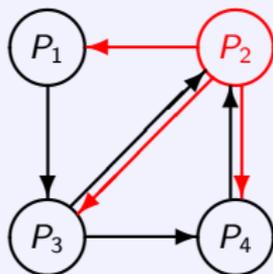
Contiamo i link **uscanti** da ciascuna pagina (regola n.2):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2$	$+x_3$	0	

## esempio con $n = 4$

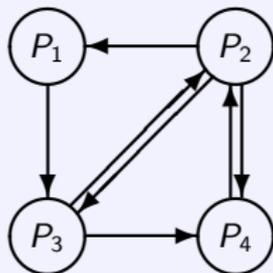
Contiamo i link **uscanti** da ciascuna pagina (regola n.2):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2$	$+x_3$	0	

## esempio con $n = 4$

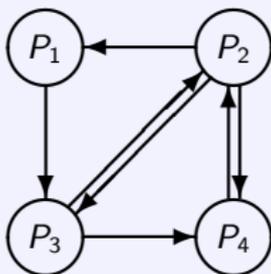
Contiamo i link **uscanti** da ciascuna pagina (regola n.2):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3$	0	
			$/3$			

## esempio con $n = 4$

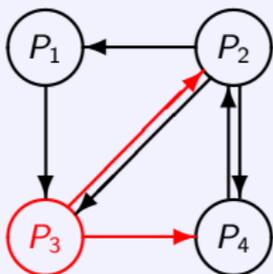
Contiamo i link **uscanti** da ciascuna pagina (regola n.2):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3$	0	
			/3			

## esempio con $n = 4$

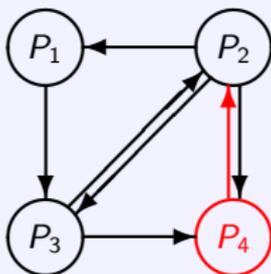
Contiamo i link **uscanti** da ciascuna pagina (regola n.2):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	
			$/3$	$/2$		

## esempio con $n = 4$

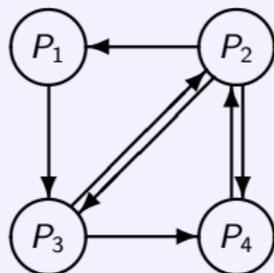
Contiamo i link **uscanti** da ciascuna pagina (regola n.2):



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	
			$/3$	$/2$		

## esempio con $n = 4$

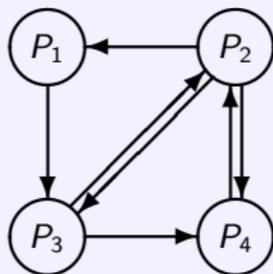
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+ x_4$	
$x_3$	=	$+ x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+ x_2/3$	$+ x_3/2$	0	

## esempio con $n = 4$

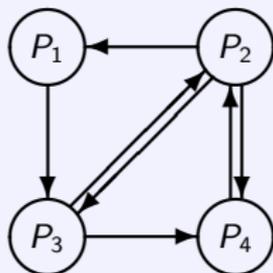
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	

## esempio con $n = 4$

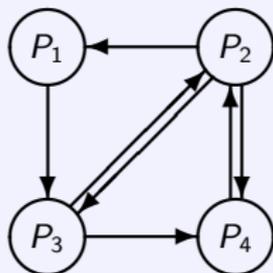
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+ x_4$	
$x_3$	=	$+ x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+ x_2/3$	$+ x_3/2$	0	

## esempio con $n = 4$

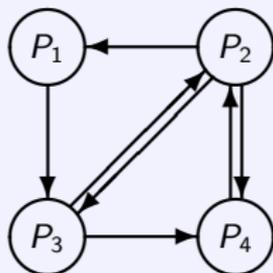
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	

esempio con  $n = 4$

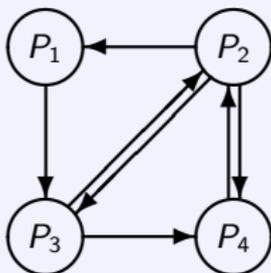
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	$\times 2$
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	

esempio con  $n = 4$

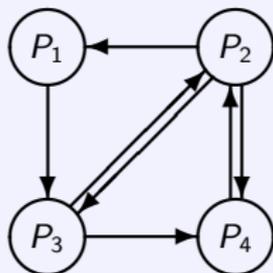
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	$\times 2$
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	

## esempio con $n = 4$

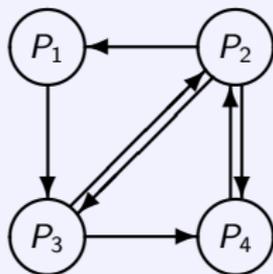
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	$\times 2$
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	

## esempio con $n = 4$

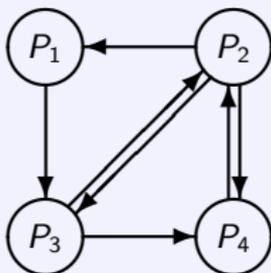
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	$\times 2$
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$x_4$	=	0	$+ x_2/3$	$+ x_3/2$	0	

esempio con  $n = 4$

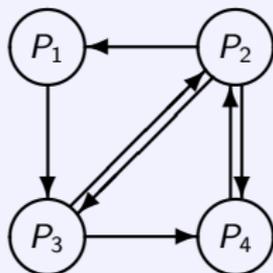
Non ci piacciono le frazioni...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	$\times 2$
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	$\times 6$

esempio con  $n = 4$

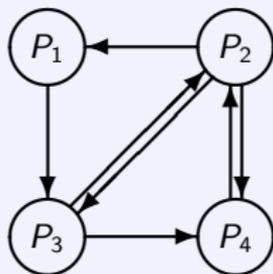
“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	

esempio con  $n = 4$

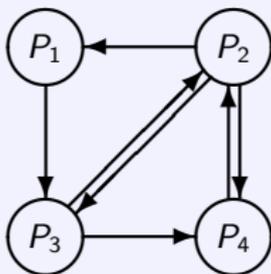
“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	

esempio con  $n = 4$

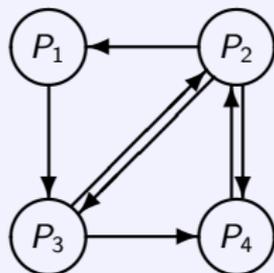
“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$0$	$=$	$-3x_1$	$+x_2$	$0$	$0$	
$2x_2$	$=$	$0$	$0$	$+x_3$	$+2x_4$	
$3x_3$	$=$	$+3x_1$	$+x_2$	$0$	$0$	
$6x_4$	$=$	$0$	$+2x_2$	$+3x_3$	$0$	

esempio con  $n = 4$

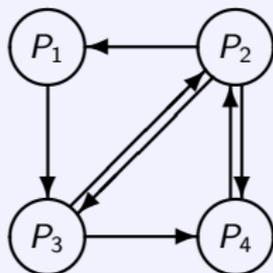
“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	

esempio con  $n = 4$

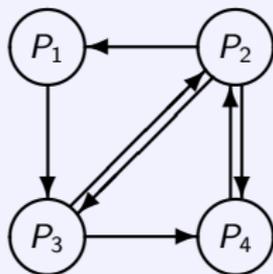
“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	

esempio con  $n = 4$

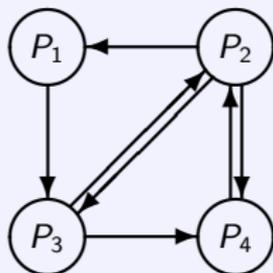
“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	

esempio con  $n = 4$

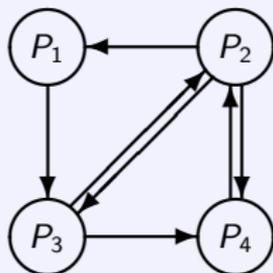
“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	$+3x_1$	$+x_2$	$-3x_3$	0	
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	

esempio con  $n = 4$

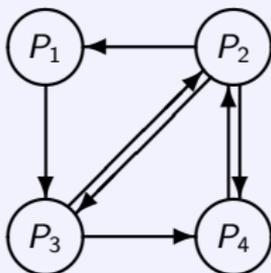
“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	$+3x_1$	$+x_2$	$-3x_3$	0	
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	

esempio con  $n = 4$

“Spostiamo” tutto a destra dell'uguale...



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	$+3x_1$	$+x_2$	$-3x_3$	0	
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	

## esempio con $n = 4$

Riassumendo, siamo partiti da:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2$	$+x_3$	0	

a cui corrisponde il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ x_3 = x_1 + x_2 \\ x_4 = x_2 + x_3 \end{cases}$$

## esempio con $n = 4$

...abbiamo ripartito equamente il pagerank di ogni pagina:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	
			$/3$	$/2$		

a cui corrisponde il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 = x_2/3 \\ x_2 = x_3/2 + x_4 \\ x_3 = x_1 + x_2/3 \\ x_4 = x_2/3 + x_3/2 \end{cases}$$

## esempio con $n = 4$

...abbiamo ripartito equamente il pagerank di ogni pagina:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0	
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+x_4$	
$x_3$	=	$+x_1$	$+x_2/3$	0	0	
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0	
			$/3$	$/2$		

a cui corrisponde il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 = x_2/3 \\ x_2 = x_3/2 + x_4 \\ x_3 = x_1 + x_2/3 \\ x_4 = x_2/3 + x_3/2 \end{cases}$$

**NB: RICORDIAMOCI** che nella notazione vista prima possiamo scrivere

$$x = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

## esempio con $n = 4$

...non ci piacevano le frazioni:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
$3x_1$	=	0	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$2x_2$	=	0	0	$+x_3$	$+2x_4$	$\times 2$
$3x_3$	=	$+3x_1$	$+x_2$	0	0	$\times 3$
$6x_4$	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	0	$\times 6$

a cui corrisponde il sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x_1 = x_2 \\ 2x_2 = x_3 + 2x_4 \\ 3x_3 = 3x_1 + x_2 \\ 6x_4 = 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

## esempio con $n = 4$

...infine abbiamo spostato tutto a destra:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	$\times 3$
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	$\times 2$
0	=	$+3x_1$	$+x_2$	$-3x_3$	0	$\times 3$
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	$\times 6$

a cui corrisponde il sistema lineare:

$$\begin{cases} 0 = -3x_1 + x_2 \\ 0 = -2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 0 = 3x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 0 = 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \end{cases}$$

esempio con  $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	$+3x_1$	$+x_2$	$-3x_3$	0	
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	

esempio con  $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	$+3x_1$	$+x_2$	$-3x_3$	0	
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	

esempio con  $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	+
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	$+3x_1$	$+x_2$	$-3x_3$	0	+
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	

esempio con  $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	+
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	$+2x_2$	$-3x_3$	0	+
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	

## esempio con $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	$+2x_2$	$-3x_3$	0	
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	

## esempio con $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	+
0	=	0	$+2x_2$	$-3x_3$	0	+
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	

esempio con  $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	+
0	=	0	0	$-2x_3$	$2x_4$	+
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	

esempio con  $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	+
0	=	0	0	$-2x_3$	$2x_4$	
0	=	0	$+2x_2$	$+3x_3$	$-6x_4$	+

## esempio con $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	+
0	=	0	0	$-2x_3$	$2x_4$	
0	=	0	0	$+4x_3$	$-4x_4$	+

esempio con  $n = 4$

Applichiamo quindi il metodo di eliminazione di Gauss:

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	0	$-2x_3$	$2x_4$	
0	=	0	0	$+4x_3$	$-4x_4$	

## esempio con $n = 4$

- Osserviamo il sistema lineare composto dalle ultime due equazioni:

$$\begin{cases} 0 = -2x_3 + 2x_4 \\ 0 = +4x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

## esempio con $n = 4$

- Osserviamo il sistema lineare composto dalle ultime due equazioni:

$$\begin{cases} 0 = -2x_3 + 2x_4 \\ 0 = +4x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

- Le due equazioni sono **equivalenti**, cioè hanno le stesse soluzioni!

## esempio con $n = 4$

- Osserviamo il sistema lineare composto dalle ultime due equazioni:

$$\begin{cases} 0 = -2x_3 + 2x_4 \\ 0 = +4x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

- Le due equazioni sono **equivalenti**, cioè hanno le stesse soluzioni!
- Ci sono quindi **infinite** coppie di soluzioni  $(x_3, x_4)$ , basta che valga

$$x_3 = x_4$$

## esempio con $n = 4$

- Osserviamo il sistema lineare composto dalle ultime due equazioni:

$$\begin{cases} 0 = -2x_3 + 2x_4 \\ 0 = +4x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

- Le due equazioni sono **equivalenti**, cioè hanno le stesse soluzioni!
- Ci sono quindi **infinite** coppie di soluzioni  $(x_3, x_4)$ , basta che valga

$$x_3 = x_4$$

- Quale coppia scegliamo?

## esempio con $n = 4$

- Osserviamo il sistema lineare composto dalle ultime due equazioni:

$$\begin{cases} 0 = -2x_3 + 2x_4 \\ 0 = +4x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

- Le due equazioni sono **equivalenti**, cioè hanno le stesse soluzioni!
- Ci sono quindi **infinite** coppie di soluzioni  $(x_3, x_4)$ , basta che valga

$$x_3 = x_4$$

- Quale coppia scegliamo?
- Invece di scegliere direttamente una particolare coppia, scambiamo l'ultima equazione con

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

e ripetiamo il procedimento di eliminazione di Gauss (alla fine capiremo perché...).

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	0	$-2x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	0	$+4x_3$	$-4x_4$	

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	0	$-2x_3$	$+2x_4$	
1	=	$x_1$	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	0	$-2x_3$	$+2x_4$	
3	=	$3x_1$	$+3x_2$	$+3x_3$	$+3x_4$	$\times 3$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	+
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	0	$-2x_3$	$+2x_4$	
3	=	$3x_1$	$+3x_2$	$+3x_3$	$+3x_4$	+

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-2x_2$	$+x_3$	$+2x_4$	
0	=	0	0	$-2x_3$	$+2x_4$	
3	=	0	$+4x_2$	$+3x_3$	$+3x_4$	

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	$\times 2$
0	=	0	0	$-2x_3$	$+2x_4$	
3	=	0	$+4x_2$	$+3x_3$	$+3x_4$	

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	+
0	=	0	0	$-2x_3$	$+2x_4$	
3	=	0	$+4x_2$	$+3x_3$	$+3x_4$	+

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-2x_3$	$+2x_4$	
3	=	0	0	$+5x_3$	$+7x_4$	

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	$\times 5$
6	=	0	0	$+10x_3$	$+14x_4$	$\times 2$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	+
6	=	0	0	$+10x_3$	$+14x_4$	+

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$24x_4 = 6$$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$24x_4 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 1/4$$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned}
 -10x_3 + 10 \cdot \frac{1}{4} &= 0 \\
 24x_4 &= 6 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned}
 -10x_3 + 10 \cdot 1/4 &= 0 &\Rightarrow x_3 &= 1/4 \\
 24x_4 &= 6 &\Rightarrow x_4 &= 1/4
 \end{aligned}$$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned}
 -4x_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} &= 0 \\
 -10x_3 + 10 \cdot \frac{1}{4} &= 0 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4} \\
 24x_4 &= 6 \quad \Rightarrow x_4 = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned}
 -4x_2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 &= 0 &\Rightarrow x_2 &= 3/8 \\
 -10x_3 + 10 \cdot 1/4 &= 0 &\Rightarrow x_3 &= 1/4 \\
 24x_4 &= 6 &\Rightarrow x_4 &= 1/4
 \end{aligned}$$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned}
 -3x_1 + 3/8 &= 0 \\
 -4x_2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 &= 0 \quad \Rightarrow x_2 = 3/8 \\
 -10x_3 + 10 \cdot 1/4 &= 0 \quad \Rightarrow x_3 = 1/4 \\
 24x_4 &= 6 \quad \Rightarrow x_4 = 1/4
 \end{aligned}$$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned}
 -3x_1 + 3/8 &= 0 &\Rightarrow x_1 &= 1/8 \\
 -4x_2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 &= 0 &\Rightarrow x_2 &= 3/8 \\
 -10x_3 + 10 \cdot 1/4 &= 0 &\Rightarrow x_3 &= 1/4 \\
 24x_4 &= 6 &\Rightarrow x_4 &= 1/4
 \end{aligned}$$

## esempio con $n = 4$

Sostituiamo quindi l'ultima equazione e applichiamo nuovamente il metodo di eliminazione di Gauss, **facendo attenzione ai termini noti!!**

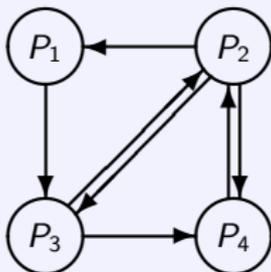
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	
0	=	$-3x_1$	$+x_2$	0	0	
0	=	0	$-4x_2$	$+2x_3$	$+4x_4$	
0	=	0	0	$-10x_3$	$+10x_4$	
6	=	0	0	0	$+24x_4$	

Ora applichiamo la sostituzione all'indietro:

$$\begin{aligned}
 -3x_1 + 3/8 = 0 &\Rightarrow x_1 = 1/8 \Rightarrow x_1 = 1/8 = 0.1250 \\
 -4x_2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/4 = 0 &\Rightarrow x_2 = 3/8 \Rightarrow x_2 = 3/8 = 0.3750 \\
 -10x_3 + 10 \cdot 1/4 = 0 &\Rightarrow x_3 = 1/4 \Rightarrow x_3 = 2/8 = 0.2500 \\
 24x_4 = 6 &\Rightarrow x_4 = 1/4 \Rightarrow x_4 = 2/8 = 0.2500
 \end{aligned}$$

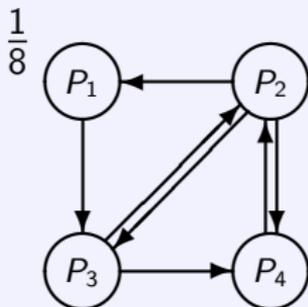
## esempio con $n = 4$

Il pagerank risulta dunque  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}\right)$ :



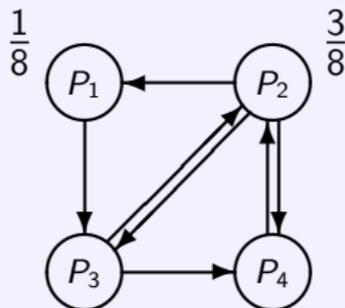
## esempio con $n = 4$

Il pagerank risulta dunque  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}\right)$ :



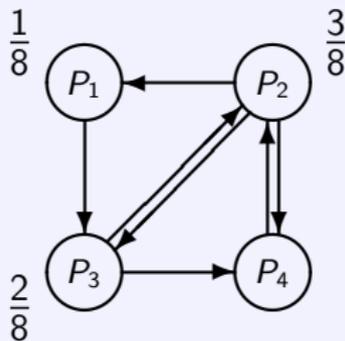
## esempio con $n = 4$

Il pagerank risulta dunque  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8})$ :



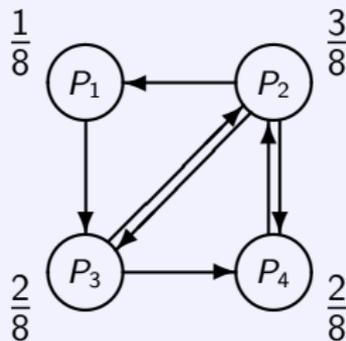
## esempio con $n = 4$

Il pagerank risulta dunque  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8})$ :



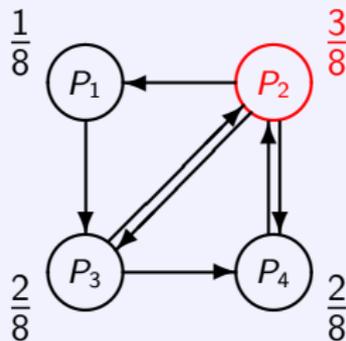
## esempio con $n = 4$

Il pagerank risulta dunque  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8})$ :



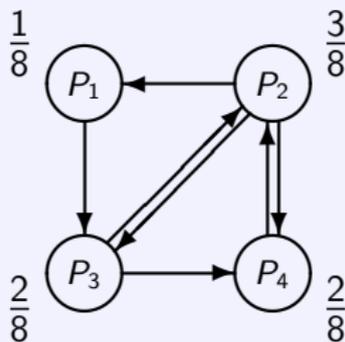
## esempio con $n = 4$

Il pagerank risulta dunque  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8})$ :



## esempio con $n = 4$

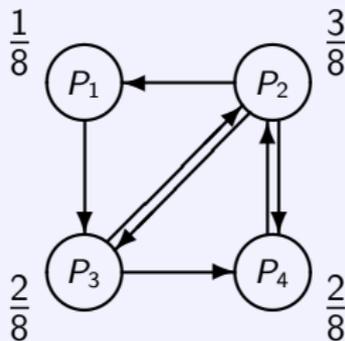
Il pagerank risulta dunque  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8})$ :



e, riordinato, diventa  $(x_2, x_3, x_4, x_1) = (\frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8})$

## esempio con $n = 4$

Il pagerank risulta dunque  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8})$ :



e, riordinato, diventa  $(x_2, x_3, x_4, x_1) = (\frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8})$

# Domande?

## problemi e soluzioni: il metodo delle potenze

torniamo alla realtà...

- Ricordiamo che  $n$  rappresenta il numero di pagine web esistenti.

torniamo alla realtà...

- Ricordiamo che  $n$  rappresenta il numero di pagine web esistenti.
- Quante sono?

torniamo alla realtà...

- Ricordiamo che  $n$  rappresenta il numero di pagine web esistenti.
- Quante sono?

Tante!

torniamo alla realtà...

- Ricordiamo che  $n$  rappresenta il numero di pagine web esistenti.
- Quante sono?

Tante!

- Ovviamente non si possono contare...

torniamo alla realtà...

- Ricordiamo che  $n$  rappresenta il numero di pagine web esistenti.
- Quante sono?

Tante!

- Ovviamente non si possono contare...
- ...ma se ne può stimare il numero.

torniamo alla realtà...

- Ricordiamo che  $n$  rappresenta il numero di pagine web esistenti.
- Quante sono?

## Tante!

- Ovviamente non si possono **contare**...
- ...ma se ne può **stimare** il numero.
- La stima odierna si aggira intorno a **8 miliardi!** (fonte: <http://www.worldwidewebsize.com>).

torniamo alla realtà...

- Ricordiamo che  $n$  rappresenta il numero di pagine web esistenti.
- Quante sono?

# Tante!

- Ovviamente non si possono **contare**...
- ...ma se ne può **stimare** il numero.
- La stima odierna si aggira intorno a **8 miliardi!** (fonte: <http://www.worldwidewebsize.com>).
- Quindi:

$$n = \underbrace{800 \dots 00}_{9 \text{ zeri}} = 8 \times 10^9$$

## ...quanti conti...

- Abbiamo visto che risolvere un sistema lineare di  $n$  equazioni con GE+BS richiede (circa...)

$$\frac{2}{3}n^3 \text{ operazioni}$$

## ...quanti conti...

- Abbiamo visto che risolvere un sistema lineare di  $n$  equazioni con GE+BS richiede (circa...)

$$\frac{2}{3}n^3 \text{ operazioni}$$

- quindi per calcolare il pagerank di tutto il web servirebbero

$$\frac{2}{3} \left(8 \times 10^9\right)^3 \simeq 341 \underbrace{00 \dots \dots \dots 00}_{27 \text{ zeri}} = 341 \times 10^{27} \text{ operazioni}$$

## ...quanti conti...

- Abbiamo visto che risolvere un sistema lineare di  $n$  equazioni con GE+BS richiede (circa...)

$$\frac{2}{3}n^3 \text{ operazioni}$$

- quindi per calcolare il pagerank di tutto il web servirebbero

$$\frac{2}{3} \left(8 \times 10^9\right)^3 \simeq 341 \underbrace{00 \dots 00}_{27 \text{ zeri}} = 341 \times 10^{27} \text{ operazioni}$$

- ovvero **341 miliardi di miliardi di miliardi** di operazioni!!

...quanti conti...

- Abbiamo visto che risolvere un sistema lineare di  $n$  equazioni con GE+BS richiede (circa...)

$$\frac{2}{3}n^3 \text{ operazioni}$$

- quindi per calcolare il pagerank di tutto il web servirebbero

$$\frac{2}{3} \left(8 \times 10^9\right)^3 \simeq 341 \underbrace{00 \dots \dots \dots 00}_{27 \text{ zeri}} = 341 \times 10^{27} \text{ operazioni}$$

- ovvero **341 miliardi di miliardi di miliardi** di operazioni!!

Sono tante?

...quanti conti...

- Abbiamo visto che risolvere un sistema lineare di  $n$  equazioni con GE+BS richiede (circa...)

$$\frac{2}{3}n^3 \text{ operazioni}$$

- quindi per calcolare il pagerank di tutto il web servirebbero

$$\frac{2}{3} \left(8 \times 10^9\right)^3 \simeq 341 \underbrace{00 \dots \dots \dots 00}_{27 \text{ zeri}} = 341 \times 10^{27} \text{ operazioni}$$

- ovvero **341 miliardi di miliardi di miliardi** di operazioni!!

Sono tante?

Dipende da **quanto veloce** sono a fare i conti...

il più veloce!

- Il calcolatore più potente in “circolazione” è il **K-computer** della Fujitsu (fonte: <http://www.top500.org>):



## il più veloce!

- Il calcolatore più potente in “circolazione” è il **K-computer** della Fujitsu (fonte: <http://www.top500.org>):



- riesce ad eseguire circa 10.51 *Pflop/s*, ovvero

$$1051 \underbrace{00 \dots 00}_{13 \text{ zeri}} = 10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}$$

## il più veloce!

- Il calcolatore più potente in “circolazione” è il **K-computer** della Fujitsu (fonte: <http://www.top500.org>):



- riesce ad eseguire circa 10.51 *Pflop/s*, ovvero

$$1051 \underbrace{00 \dots 00}_{13 \text{ zeri}} = 10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}$$

ovvero poco più di **10.5 milioni di miliardi** di operazioni al secondo!!

## il più veloce!

- Il calcolatore più potente in “circolazione” è il **K-computer** della Fujitsu (fonte: <http://www.top500.org>):



- riesce ad eseguire circa 10.51 *Pflop/s*, ovvero

$$1051 \underbrace{00 \dots 00}_{13 \text{ zeri}} = 10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}$$

ovvero poco più di **10.5 milioni di miliardi** di operazioni al secondo!!

...è abbastanza veloce?

riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.

## riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.
- Il K-computer esegue  $10.51 \times 10^{15}$  flop/s,

## riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.
- Il K-computer esegue  $10.51 \times 10^{15}$  flop/s,
- quindi ci servono

$$\frac{341 \times 10^{27} \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}}$$

## riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.
- Il K-computer esegue  $10.51 \times 10^{15}$  flop/s,
- quindi ci servono

$$\frac{341 \times 10^{27} \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}} \simeq 3.24... \times 10^{13} \text{ secondi}$$

## riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.
- Il K-computer esegue  $10.51 \times 10^{15}$  flop/s,
- quindi ci servono

$$\frac{341 \times 10^{27} \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}} \simeq 3.24... \times 10^{13} \text{ secondi}$$

- ovvero **32400 miliardi** di **secondi** (e spiccioli...),

## riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.
- Il K-computer esegue  $10.51 \times 10^{15}$  flop/s,
- quindi ci servono

$$\frac{341 \times 10^{27} \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}} \simeq 3.24... \times 10^{13} \text{ secondi}$$

- ovvero **32400 miliardi** di **secondi** (e spiccioli...),
- che sono poco più di **540 miliardi** di **minuti**,

## riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.
- Il K-computer esegue  $10.51 \times 10^{15}$  flop/s,
- quindi ci servono

$$\frac{341 \times 10^{27} \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}} \simeq 3.24... \times 10^{13} \text{ secondi}$$

- ovvero **32400 miliardi** di **secondi** (e spiccioli...),
- che sono poco più di **540 miliardi** di **minuti**,
- che sono poco più di **9 miliardi** di **ore**,

## riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.
- Il K-computer esegue  $10.51 \times 10^{15}$  flop/s,
- quindi ci servono

$$\frac{341 \times 10^{27} \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}} \simeq 3.24... \times 10^{13} \text{ secondi}$$

- ovvero **32400 miliardi** di **secondi** (e spiccioli...),
- che sono poco più di **540 miliardi** di **minuti**,
- che sono poco più di **9 miliardi** di **ore**,
- che sono circa **375 milioni** di **giorni**,

riassumiamo...

- Dobbiamo eseguire  $341 \times 10^{27}$  flop.
- Il K-computer esegue  $10.51 \times 10^{15}$  flop/s,
- quindi ci servono

$$\frac{341 \times 10^{27} \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}} \simeq 3.24... \times 10^{13} \text{ secondi}$$

- ovvero **32400 miliardi** di **secondi** (e spiccioli...),
- che sono poco più di **540 miliardi** di **minuti**,
- che sono poco più di **9 miliardi** di **ore**,
- che sono circa **375 milioni** di **giorni**,
- che sono circa

**1 milione di anni!!**

non ce la faremo mai...

- 1 milione di anni sono un tempo che non abbiamo.

non ce la faremo mai...

- 1 milione di anni sono un tempo che non abbiamo.
- A dire il vero non abbiamo neanche il K-computer.

## non ce la faremo mai...

- 1 milione di anni sono un tempo che non abbiamo.
- A dire il vero non abbiamo neanche il K-computer.
- Se ci può consolare non ce l'hanno neanche Page e Brin (è proprietà del governo giapponese e si trova al RIKEN Advanced Institute for Computational Science a Kobe).

## non ce la faremo mai...

- 1 milione di anni sono un tempo che non abbiamo.
- A dire il vero non abbiamo neanche il K-computer.
- Se ci può consolare non ce l'hanno neanche Page e Brin (è proprietà del governo giapponese e si trova al RIKEN Advanced Institute for Computational Science a Kobe).
- Anche se avessimo a disposizione un computer mille o un milione di volte più potente ci vorrebbe comunque troppo tempo.

## non ce la faremo mai...

- 1 milione di anni sono un tempo che non abbiamo.
- A dire il vero non abbiamo neanche il K-computer.
- Se ci può consolare non ce l'hanno neanche Page e Brin (è proprietà del governo giapponese e si trova al RIKEN Advanced Institute for Computational Science a Kobe).
- Anche se avessimo a disposizione un computer mille o un milione di volte più potente ci vorrebbe comunque troppo tempo.
- Eppure Page e Brin dichiarano di aggiornare il pagerank di [tutto il web](#) all'incirca [una volta al mese...](#)

## non ce la faremo mai...

- 1 milione di anni sono un tempo che non abbiamo.
- A dire il vero non abbiamo neanche il K-computer.
- Se ci può consolare non ce l'hanno neanche Page e Brin (è proprietà del governo giapponese e si trova al RIKEN Advanced Institute for Computational Science a Kobe).
- Anche se avessimo a disposizione un computer mille o un milione di volte più potente ci vorrebbe comunque troppo tempo.
- Eppure Page e Brin dichiarano di aggiornare il pagerank di [tutto il web](#) all'incirca [una volta al mese...](#)

...come fanno?

non ce la faremo mai...

- 1 milione di anni sono un tempo che non abbiamo.
- A dire il vero non abbiamo neanche il K-computer.
- Se ci può consolare non ce l'hanno neanche Page e Brin (è proprietà del governo giapponese e si trova al RIKEN Advanced Institute for Computational Science a Kobe).
- Anche se avessimo a disposizione un computer mille o un milione di volte più potente ci vorrebbe comunque troppo tempo.
- Eppure Page e Brin dichiarano di aggiornare il pagerank di [tutto il web](#) all'incirca [una volta al mese...](#)

...come fanno?

NB: attenzione a non confondere il tempo di ricerca di Google con il tempo per il calcolo del pagerank!

non ce la faremo mai...

- 1 milione di anni sono un tempo che non abbiamo.
- A dire il vero non abbiamo neanche il K-computer.
- Se ci può consolare non ce l'hanno neanche Page e Brin (è proprietà del governo giapponese e si trova al RIKEN Advanced Institute for Computational Science a Kobe).
- Anche se avessimo a disposizione un computer mille o un milione di volte più potente ci vorrebbe comunque troppo tempo.
- Eppure Page e Brin dichiarano di aggiornare il pagerank di [tutto il web](#) all'incirca [una volta al mese...](#)

...come fanno?

NB: attenzione a non confondere il tempo di ricerca di Google con il tempo per il calcolo del pagerank!

...allora c'è o no una bella differenza tra  
"sapere come risolvere" e "risolvere"?

## la fortuna di Google...

la fortuna di Google...

...viene dalla matematica!

- Ritorniamo all'esempio con  $n = 4$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_2/3 \\ x_2 = x_3/2 + x_4 \\ x_3 = x_1 + x_2/3 \\ x_4 = x_2/3 + x_3/2 \end{cases}$$

- Ritorniamo all'esempio con  $n = 4$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_2/3 \\ x_2 = x_3/2 + x_4 \\ x_3 = x_1 + x_2/3 \\ x_4 = x_2/3 + x_3/2 \end{cases}$$

- Fissiamo un pagerank iniziale a piacere, ad esempio supponendo che inizialmente le pagine web abbiano la stessa importanza:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = (0.2500, 0.2500, 0.2500, 0.2500)$$

(che corrisponde a  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1!$ ).

- Ritorniamo all'esempio con  $n = 4$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_2/3 \\ x_2 = x_3/2 + x_4 \\ x_3 = x_1 + x_2/3 \\ x_4 = x_2/3 + x_3/2 \end{cases}$$

- Fissiamo un pagerank iniziale a piacere, ad esempio supponendo che inizialmente le pagine web abbiano la stessa importanza:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) = (0.2500, 0.2500, 0.2500, 0.2500)$$

(che corrisponde a  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1!$ ).

- Inseriamo questi valori nel sistema a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.2500/3 \\ x_2 = 0.2500/2 + 0.2500 \\ x_3 = 0.2500 + 0.2500/3 \\ x_4 = 0.2500/3 + 0.2500/2 \end{cases}$$

- Ritorniamo all'esempio con  $n = 4$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_2/3 \\ x_2 = x_3/2 + x_4 \\ x_3 = x_1 + x_2/3 \\ x_4 = x_2/3 + x_3/2 \end{cases}$$

- Fissiamo un pagerank iniziale a piacere, ad esempio supponendo che inizialmente le pagine web abbiano la stessa importanza:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = (0.2500, 0.2500, 0.2500, 0.2500)$$

(che corrisponde a  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1!$ ).

- Inseriamo questi valori nel sistema a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.2500/3 \\ x_2 = 0.2500/2 + 0.2500 \\ x_3 = 0.2500 + 0.2500/3 \\ x_4 = 0.2500/3 + 0.2500/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.0833 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.3333 \\ x_4 = 0.2083 \end{cases}$$

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases}$$

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases}$$

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.2500
$x_2$	=	0.3750	0.2500
$x_3$	=	0.2500	0.2500
$x_4$	=	0.2500	0.2500

0

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.0833
$x_2$	=	0.3750	0.3750
$x_3$	=	0.2500	0.3333
$x_4$	=	0.2500	0.2083

1

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1250
$x_2$	=	0.3750	0.3750
$x_3$	=	0.2500	0.2083
$x_4$	=	0.2500	0.2917

2

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1250
$x_2$	=	0.3750	0.3958
$x_3$	=	0.2500	0.2500
$x_4$	=	0.2500	0.2292

3

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1319
$x_2$	=	0.3750	0.3542
$x_3$	=	0.2500	0.2569
$x_4$	=	0.2500	0.2569

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1181
$x_2$	=	0.3750	0.3854
$x_3$	=	0.2500	0.2500
$x_4$	=	0.2500	0.2465

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1285
$x_2$	=	0.3750	0.3715
$x_3$	=	0.2500	0.2465
$x_4$	=	0.2500	0.2535

6

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1238
$x_2$	=	0.3750	0.3767
$x_3$	=	0.2500	0.2523
$x_4$	=	0.2500	0.2471

7

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1256
$x_2$	=	0.3750	0.3733
$x_3$	=	0.2500	0.2494
$x_4$	=	0.2500	0.2517

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1244
$x_2$	=	0.3750	0.3764
$x_3$	=	0.2500	0.2500
$x_4$	=	0.2500	0.2491

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1255
$x_2$	=	0.3750	0.3741
$x_3$	=	0.2500	0.2499
$x_4$	=	0.2500	0.2505

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1247
$x_2$	=	0.3750	0.3754
$x_3$	=	0.2500	0.2502
$x_4$	=	0.2500	0.2497

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1251
$x_2$	=	0.3750	0.3748
$x_3$	=	0.2500	0.2499
$x_4$	=	0.2500	0.2502

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1249
$x_2$	=	0.3750	0.3752
$x_3$	=	0.2500	0.2501
$x_4$	=	0.2500	0.2498

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1251
$x_2$	=	0.3750	0.3749
$x_3$	=	0.2500	0.2500
$x_4$	=	0.2500	0.2501

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1250
$x_2$	=	0.3750	0.3751
$x_3$	=	0.2500	0.2500
$x_4$	=	0.2500	0.2499

- Inseriamo i nuovi valori sempre a destra dell'uguale:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.3333/2 + 0.2083 \\ x_3 = 0.0833 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.3333/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3750 \\ x_3 = 0.2083 \\ x_4 = 0.2917 \end{cases}$$

- Ripetiamo ancora:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3750/3 \\ x_2 = 0.2083/2 + 0.2917 \\ x_3 = 0.1250 + 0.3750/3 \\ x_4 = 0.3750/3 + 0.2083/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.1250 \\ x_2 = 0.3958 \\ x_3 = 0.2500 \\ x_4 = 0.2292 \end{cases}$$

- Ancora, ancora, ancora...ma confrontiamo con la **soluzione esatta**:

pagerank	=	esatto	calcolato
$x_1$	=	0.1250	0.1250
$x_2$	=	0.3750	0.3750
$x_3$	=	0.2500	0.2500
$x_4$	=	0.2500	0.2500

Il procedimento usato per approssimare il pagerank  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  può essere schematizzato come segue, ricordando che il sistema lineare si scrive anche come

$$x = Ax$$

Il procedimento usato per approssimare il pagerank  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  può essere schematizzato come segue, ricordando che il sistema lineare si scrive anche come

$$x = Ax_{\text{vecchio}}$$

- 1 scegliamo un pagerank iniziale  $x_{\text{vecchio}}$

Il procedimento usato per approssimare il pagerank  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  può essere schematizzato come segue, ricordando che il sistema lineare si scrive anche come

$$x_{\text{nuovo}} = Ax_{\text{vecchio}}$$

- 1 scegliamo un pagerank iniziale  $x_{\text{vecchio}}$
- 2 calcoliamo  $x_{\text{nuovo}}$  da  $x_{\text{vecchio}}$  con il sistema lineare

Il procedimento usato per approssimare il pagerank  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  può essere schematizzato come segue, ricordando che il sistema lineare si scrive anche come

$$x_{\text{nuovo}} = Ax_{\text{vecchio}}$$

- 1 scegliamo un pagerank iniziale  $x_{\text{vecchio}}$
- 2 calcoliamo  $x_{\text{nuovo}}$  da  $x_{\text{vecchio}}$  con il sistema lineare
- 3 se  $x_{\text{nuovo}}$  è "sufficientemente vicino" a  $x_{\text{vecchio}}$  allora ci fermiamo e prendiamo  $x_{\text{nuovo}}$  come approssimazione della soluzione esatta

Il procedimento usato per approssimare il pagerank  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  può essere schematizzato come segue, ricordando che il sistema lineare si scrive anche come

$$x_{\text{nuovo}} = Ax_{\text{vecchio}}$$

- 1 scegliamo un pagerank iniziale  $x_{\text{vecchio}}$
- 2 calcoliamo  $x_{\text{nuovo}}$  da  $x_{\text{vecchio}}$  con il sistema lineare
- 3 se  $x_{\text{nuovo}}$  è "sufficientemente vicino" a  $x_{\text{vecchio}}$  allora ci fermiamo e prendiamo  $x_{\text{nuovo}}$  come approssimazione della soluzione esatta
- 4 altrimenti poniamo  $x_{\text{vecchio}} = x_{\text{nuovo}}$  e ripetiamo dal passo 2.

Il procedimento usato per approssimare il pagerank  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  può essere schematizzato come segue, ricordando che il sistema lineare si scrive anche come

$$x_{\text{nuovo}} = Ax_{\text{vecchio}}$$

- 1 scegliamo un pagerank iniziale  $x_{\text{vecchio}}$
- 2 calcoliamo  $x_{\text{nuovo}}$  da  $x_{\text{vecchio}}$  con il sistema lineare
- 3 se  $x_{\text{nuovo}}$  è "sufficientemente vicino" a  $x_{\text{vecchio}}$  allora ci fermiamo e prendiamo  $x_{\text{nuovo}}$  come approssimazione della soluzione esatta
- 4 altrimenti poniamo  $x_{\text{vecchio}} = x_{\text{nuovo}}$  e ripetiamo dal passo 2.

Si parla di **METODO DELLE POTENZE** (C.L. Muntz - 1913)

## funziona sempre?

- In generale non è detto che, partendo da un pagerank iniziale qualunque, il metodo delle potenze produca una sequenza di valori **convergenti** alla soluzione esatta.

## funziona sempre?

- In generale non è detto che, partendo da un pagerank iniziale qualunque, il metodo delle potenze produca una sequenza di valori **convergenti** alla soluzione esatta.
- **Convergenza** significa che se potessi fare un numero **infinito** di passi otterrei la soluzione esatta partendo da **qualunque** valore iniziale.

## funziona sempre?

- In generale non è detto che, partendo da un pagerank iniziale qualunque, il metodo delle potenze produca una sequenza di valori **convergenti** alla soluzione esatta.
- **Convergenza** significa che se potessi fare un numero **infinito** di passi otterrei la soluzione esatta partendo da **qualunque** valore iniziale.
- Ma se aggiustiamo un po' il nostro modello di web, allora possiamo assicurarci

## funziona sempre?

- In generale non è detto che, partendo da un pagerank iniziale qualunque, il metodo delle potenze produca una sequenza di valori **convergenti** alla soluzione esatta.
- **Convergenza** significa che se potessi fare un numero **infinito** di passi otterrei la soluzione esatta partendo da **qualunque** valore iniziale.
- Ma se aggiustiamo un po' il nostro modello di web, allora possiamo assicurarci
  - la **convergenza** alla soluzione esatta

## funziona sempre?

- In generale non è detto che, partendo da un pagerank iniziale qualunque, il metodo delle potenze produca una sequenza di valori **convergenti** alla soluzione esatta.
- **Convergenza** significa che se potessi fare un numero **infinito** di passi otterrei la soluzione esatta partendo da **qualunque** valore iniziale.
- Ma se aggiustiamo un po' il nostro modello di web, allora possiamo assicurarci
  - la **convergenza** alla soluzione esatta
  - e che la soluzione esatta sia **unica**.

## il modello finale: il navigatore casuale

## il modello generale

- Ricordiamo che il pagerank di ciascuna pagina è la **somma** delle **frazioni** di pagerank delle pagine che **puntano** ad essa (regola n.3).

## il modello generale

- Ricordiamo che il pagerank di ciascuna pagina è la **somma** delle **frazioni** di pagerank delle pagine che **puntano** ad essa (regola n.3).
- Se consideriamo la  $j$ -esima pagina, il suo pagerank sarà dunque

$$x_j = h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n$$

## il modello generale

- Ricordiamo che il pagerank di ciascuna pagina è la **somma** delle **frazioni** di pagerank delle pagine che **puntano** ad essa (regola n.3).
- Se consideriamo la  $j$ -esima pagina, il suo pagerank sarà dunque

$$x_j = h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n$$

dove

$$h_{i,j} = \begin{cases} 1/r_i & \text{se esiste il link } P_i \rightarrow P_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed  $r_i$  è il numero totale di link uscenti dall' $i$ -esima pagina (frazione di pagerank!).

## il modello generale

- Ricordiamo che il pagerank di ciascuna pagina è la **somma** delle **frazioni** di pagerank delle pagine che **puntano** ad essa (regola n.3).
- Se consideriamo la  $j$ -esima pagina, il suo pagerank sarà dunque

$$x_j = h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n$$

dove

$$h_{i,j} = \begin{cases} 1/r_i & \text{se esiste il link } P_i \rightarrow P_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed  $r_i$  è il numero totale di link uscenti dall' $i$ -esima pagina (frazione di pagerank!).

- **Ma ci sono pagine che non hanno link uscenti (penzolanti)!!**

## il modello generale

- Ricordiamo che il pagerank di ciascuna pagina è la **somma** delle **frazioni** di pagerank delle pagine che **puntano** ad essa (regola n.3).
- Se consideriamo la  $j$ -esima pagina, il suo pagerank sarà dunque

$$x_j = h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n$$

dove

$$h_{i,j} = \begin{cases} 1/r_i & \text{se esiste il link } P_i \rightarrow P_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed  $r_i$  è il numero totale di link uscenti dall' $i$ -esima pagina (frazione di pagerank!).

- **Ma ci sono pagine che non hanno link uscenti (penzolanti)!!**
- Per queste pagine si ha  $r_i = 0$  e quindi non possiamo calcolare la frazione di pagerank...

## il modello generale

- Ricordiamo che il pagerank di ciascuna pagina è la **somma** delle **frazioni** di pagerank delle pagine che **puntano** ad essa (regola n.3).
- Se consideriamo la  $j$ -esima pagina, il suo pagerank sarà dunque

$$x_j = h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n$$

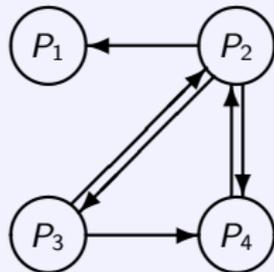
dove

$$h_{i,j} = \begin{cases} 1/r_i & \text{se esiste il link } P_i \rightarrow P_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ed  $r_i$  è il numero totale di link uscenti dall' $i$ -esima pagina (frazione di pagerank!).

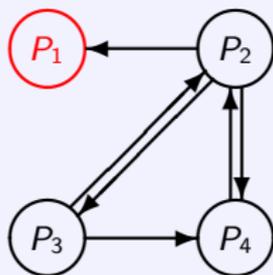
- **Ma ci sono pagine che non hanno link uscenti (penzolanti)!!**
- Per queste pagine si ha  $r_i = 0$  e quindi non possiamo calcolare la frazione di pagerank...
- Allora se  $r_i = 0$  poniamo  $h_{i,j}x_i = 1/n$ .

esempio con  $n = 4$



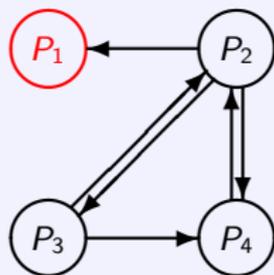
		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+x_4$
$x_3$	=	0	$+x_2/3$	0	0
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0

esempio con  $n = 4$



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$x_1$	=	0	$+x_2/3$	0	0
$x_2$	=	0	0	$+x_3/2$	$+x_4$
$x_3$	=	0	$+x_2/3$	0	0
$x_4$	=	0	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0

esempio con  $n = 4$



		$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$x_1$	=	$1/4$	$+x_2/3$	0	0
$x_2$	=	$1/4$	0	$+x_3/2$	$+x_4$
$x_3$	=	$1/4$	$+x_2/3$	0	0
$x_4$	=	$1/4$	$+x_2/3$	$+x_3/2$	0

non basta...

- La modifica precedente ci assicura che esiste **almeno una** soluzione, ma per avere anche l'**unicità** dobbiamo cambiare ancora...

## non basta...

- La modifica precedente ci assicura che esiste **almeno una** soluzione, ma per avere anche l'**unicità** dobbiamo cambiare ancora...
- Consideriamo sempre la  $j$ -esima pagina, il cui pagerank è dato da

$$x_j = h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n$$

dove ogni addendo  $h_{i,j}x_i$  rappresenta la frazione di pagerank che arriva dall' $i$ -esima pagina, oppure vale  $1/n$  se questa è penzolante.

## non basta...

- La modifica precedente ci assicura che esiste **almeno una** soluzione, ma per avere anche l'**unicità** dobbiamo cambiare ancora...
- Consideriamo sempre la  $j$ -esima pagina, il cui pagerank è dato da

$$x_j = h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n$$

dove ogni addendo  $h_{i,j}x_i$  rappresenta la frazione di pagerank che arriva dall' $i$ -esima pagina, oppure vale  $1/n$  se questa è penzolante.

- Adesso prendiamo un numero  $\alpha \in [0, 1]$  e modifichiamo come segue:

$$x_j = \alpha (h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n) + (1 - \alpha) \cdot 1/n$$

## non basta...

- La modifica precedente ci assicura che esiste **almeno una** soluzione, ma per avere anche l'**unicità** dobbiamo cambiare ancora...
- Consideriamo sempre la  $j$ -esima pagina, il cui pagerank è dato da

$$x_j = h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n$$

dove ogni addendo  $h_{i,j}x_i$  rappresenta la frazione di pagerank che arriva dall' $i$ -esima pagina, oppure vale  $1/n$  se questa è penzolante.

- Adesso prendiamo un numero  $\alpha \in [0, 1]$  e modifichiamo come segue:

$$x_j = \alpha (h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n) + (1 - \alpha) \cdot 1/n$$

Con questo modello **esiste un unico** pagerank che può essere **approssimato** (bene quanto si vuole) con il metodo delle potenze!

## il navigatore casuale

- Il nuovo modello

$$x_j = \alpha (h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n) + (1 - \alpha) \cdot 1/n$$

si presta ad una **interpretazione probabilistica**.

## il navigatore casuale

- Il nuovo modello

$$x_j = \alpha (h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n) + (1 - \alpha) \cdot 1/n$$

si presta ad una **interpretazione probabilistica**.

- Consideriamo un navigatore ipotetico che ad ogni istante cambia pagina secondo le seguenti regole:

## il navigatore casuale

- Il nuovo modello

$$x_j = \alpha (h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n) + (1 - \alpha) \cdot 1/n$$

si presta ad una **interpretazione probabilistica**.

- Consideriamo un navigatore ipotetico che ad ogni istante cambia pagina secondo le seguenti regole:
  - con probabilità  $\alpha$

## il navigatore casuale

- Il nuovo modello

$$x_j = \alpha (h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n) + (1 - \alpha) \cdot 1/n$$

si presta ad una **interpretazione probabilistica**.

- Consideriamo un navigatore ipotetico che ad ogni istante cambia pagina secondo le seguenti regole:
  - con probabilità  $\alpha$ 
    - se ci sono link uscenti dalla pagina corrente, allora ne sceglie uno (a caso con ugual probabilità)

## il navigatore casuale

- Il nuovo modello

$$x_j = \alpha (h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n) + (1 - \alpha) \cdot 1/n$$

si presta ad una **interpretazione probabilistica**.

- Consideriamo un navigatore ipotetico che ad ogni istante cambia pagina secondo le seguenti regole:
  - con probabilità  $\alpha$ 
    - se ci sono link uscenti dalla pagina corrente, allora ne sceglie uno (a caso con ugual probabilità)
    - se non ci sono link uscenti dalla pagina corrente, allora immette un'indirizzo nuovo (a caso con ugual probabilità)

## il navigatore casuale

- Il nuovo modello

$$x_j = \alpha (h_{1,j}x_1 + h_{2,j}x_2 + \dots + h_{n,j}x_n) + (1 - \alpha) \cdot 1/n$$

si presta ad una **interpretazione probabilistica**.

- Consideriamo un navigatore ipotetico che ad ogni istante cambia pagina secondo le seguenti regole:
  - con probabilità  $\alpha$ 
    - se ci sono link uscenti dalla pagina corrente, allora ne sceglie uno (a caso con ugual probabilità)
    - se non ci sono link uscenti dalla pagina corrente, allora immette un'indirizzo nuovo (a caso con ugual probabilità)
  - con probabilità  $1 - \alpha$  immette un'indirizzo nuovo (a caso con ugual probabilità).

allora...

...secondo questa interpretazione probabilistica, il pagerank  $x_j$  rappresenta la probabilità che il navigatore casuale ha di trovarsi nella pagina  $P_j$  dopo infiniti istanti di navigazione.

allora...

...secondo questa interpretazione probabilistica, il pagerank  $x_j$  rappresenta la probabilità che il navigatore casuale ha di trovarsi nella pagina  $P_j$  dopo infiniti istanti di navigazione.

Inoltre osserviamo che

allora...

...secondo questa interpretazione probabilistica, il pagerank  $x_j$  rappresenta la probabilità che il navigatore casuale ha di trovarsi nella pagina  $P_j$  dopo infiniti istanti di navigazione.

Inoltre osserviamo che

- se  $\alpha = 1$ , allora il navigatore segue la struttura a link effettiva del web e salta solo se non ci sono link uscenti;

allora...

...secondo questa interpretazione probabilistica, il pagerank  $x_j$  rappresenta la probabilità che il navigatore casuale ha di trovarsi nella pagina  $P_j$  dopo infiniti istanti di navigazione.

Inoltre osserviamo che

- se  $\alpha = 1$ , allora il navigatore segue la struttura a link effettiva del web e salta solo se non ci sono link uscenti;
- più  $\alpha$  si allontana da 1 avvicinandosi a 0, meno il navigatore segue la struttura a link effettiva del web, saltando a caso sempre più.

allora...

...secondo questa interpretazione probabilistica, il pagerank  $x_j$  rappresenta la probabilità che il navigatore casuale ha di trovarsi nella pagina  $P_j$  dopo infiniti istanti di navigazione.

Inoltre osserviamo che

- se  $\alpha = 1$ , allora il navigatore segue la struttura a link effettiva del web e salta solo se non ci sono link uscenti;
- più  $\alpha$  si allontana da 1 avvicinandosi a 0, meno il navigatore segue la struttura a link effettiva del web, saltando a caso sempre più.

Quindi dovremmo scegliere  $\alpha$  abbastanza vicino a 1, però

allora...

...secondo questa interpretazione probabilistica, il **pagerank**  $x_j$  rappresenta la **probabilità** che il **navigatore casuale** ha di trovarsi nella **pagina**  $P_j$  dopo **infiniti** istanti di navigazione.

Inoltre osserviamo che

- se  $\alpha = 1$ , allora il navigatore segue la struttura a link effettiva del web e salta solo se non ci sono link uscenti;
- più  $\alpha$  si allontana da 1 avvicinandosi a 0, meno il navigatore segue la struttura a link effettiva del web, saltando a caso sempre più.

Quindi dovremmo scegliere  $\alpha$  abbastanza vicino a 1, però

- più  $\alpha$  è vicino a 1, più il metodo delle potenze è **lento**,

allora...

...secondo questa interpretazione probabilistica, il **pagerank**  $x_j$  rappresenta la **probabilità** che il **navigatore casuale** ha di trovarsi nella **pagina**  $P_j$  dopo **infiniti** istanti di navigazione.

Inoltre osserviamo che

- se  $\alpha = 1$ , allora il navigatore segue la struttura a link effettiva del web e salta solo se non ci sono link uscenti;
- più  $\alpha$  si allontana da 1 avvicinandosi a 0, meno il navigatore segue la struttura a link effettiva del web, saltando a caso sempre più.

Quindi dovremmo scegliere  $\alpha$  abbastanza vicino a 1, però

- più  $\alpha$  è vicino a 1, più il metodo delle potenze è **lento**,
- più  $\alpha$  è vicino a 0, più il metodo delle potenze è **veloce**.

allora...

...secondo questa interpretazione probabilistica, il **pagerank**  $x_j$  rappresenta la **probabilità** che il **navigatore casuale** ha di trovarsi nella **pagina**  $P_j$  dopo **infiniti** istanti di navigazione.

Inoltre osserviamo che

- se  $\alpha = 1$ , allora il navigatore segue la struttura a link effettiva del web e salta solo se non ci sono link uscenti;
- più  $\alpha$  si allontana da 1 avvicinandosi a 0, meno il navigatore segue la struttura a link effettiva del web, saltando a caso sempre più.

Quindi dovremmo scegliere  $\alpha$  abbastanza vicino a 1, però

- più  $\alpha$  è vicino a 1, più il metodo delle potenze è **lento**,
- più  $\alpha$  è vicino a 0, più il metodo delle potenze è **veloce**.

Google dichiara di usare  $\alpha = 0.85$

## ...e i conti?

- Per il calcolo di  $x_j$ , ogni passo del metodo delle potenze consiste (circa) in **tanti flop** quanti sono i **link entranti** nella pagina  $P_j$ .

## ...e i conti?

- Per il calcolo di  $x_j$ , ogni passo del metodo delle potenze consiste (circa) in **tanti flop** quanti sono i **link entranti** nella pagina  $P_j$ .
- In media, ciascuna pagina ha “pochi” link entranti (rispetto ad  $n$ ).

## ...e i conti?

- Per il calcolo di  $x_j$ , ogni passo del metodo delle potenze consiste (circa) in **tanti flop** quanti sono i **link entranti** nella pagina  $P_j$ .
- In media, ciascuna pagina ha “pochi” link entranti (rispetto ad  $n$ ).
- Se, ad esempio, il numero medio di link entranti fosse 100, allora il calcolo di tutto il pagerank (quindi per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$ ) richiederebbe  $100n$  flop.

## ...e i conti?

- Per il calcolo di  $x_j$ , ogni passo del metodo delle potenze consiste (circa) in **tanti flop** quanti sono i **link entranti** nella pagina  $P_j$ .
- In media, ciascuna pagina ha “pochi” link entranti (rispetto ad  $n$ ).
- Se, ad esempio, il numero medio di link entranti fosse 100, allora il calcolo di tutto il pagerank (quindi per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$ ) richiederebbe  $100n$  flop.
- Il **K-computer** impiegherebbe allora

$$\frac{100 \cdot 8 \times 10^9 \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}} \simeq 0.000076 \text{ secondi}$$

## ...e i conti?

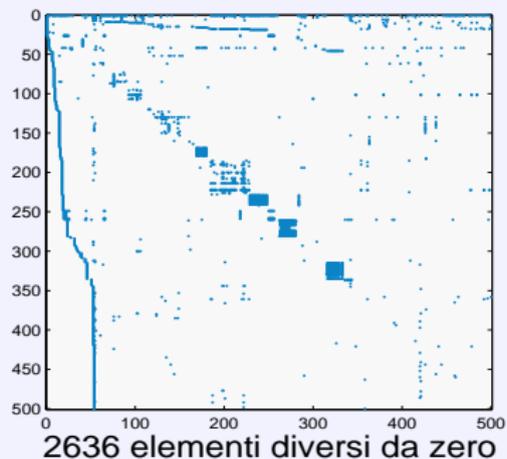
- Per il calcolo di  $x_j$ , ogni passo del metodo delle potenze consiste (circa) in **tanti flop** quanti sono i **link entranti** nella pagina  $P_j$ .
- In media, ciascuna pagina ha “pochi” link entranti (rispetto ad  $n$ ).
- Se, ad esempio, il numero medio di link entranti fosse 100, allora il calcolo di tutto il pagerank (quindi per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$ ) richiederebbe  $100n$  flop.
- Il **K-computer** impiegherebbe allora

$$\frac{100 \cdot 8 \times 10^9 \text{ flop}}{10.51 \times 10^{15} \text{ flop/s}} \simeq 0.000076 \text{ secondi}$$

- e se fossero necessari **mille** passi del metodo delle potenze per approssimare bene il pagerank, servirebbe **meno di 1 decimo di secondo!**

## un esempio reale: l'Università di Harvard

`http://www.harvard.edu`,  $n = 500$



Il calcolo del pagerank con il metodo delle potenze con una tolleranza inferiore a  $10^{-10}$  ha richiesto circa **0.6 secondi** su Intel Core 2 Duo 2.53GHz/4GbRAM.

## concludendo...

Un problema reale affrontato matematicamente comporta diverse fasi coinvolgenti diverse discipline (che molto spesso si intersecano positivamente)

## concludendo...

Un problema reale affrontato matematicamente comporta diverse fasi coinvolgenti diverse discipline (che molto spesso si intersecano positivamente)

- **formulazione del modello** (fisica matematica, biomatematica, ingegneria, chimica, economia...)

## concludendo...

Un problema reale affrontato matematicamente comporta diverse fasi coinvolgenti diverse discipline (che molto spesso si intersecano positivamente)

- **formulazione del modello** (fisica matematica, biomatematica, ingegneria, chimica, economia...)
- **analisi della soluzione**: esistenza, determinazione e proprietà (analisi matematica, algebra, geometria, probabilità, logica...)

## concludendo...

Un problema reale affrontato matematicamente comporta diverse fasi coinvolgenti diverse discipline (che molto spesso si intersecano positivamente)

- **formulazione del modello** (fisica matematica, biomatematica, ingegneria, chimica, economia...)
- **analisi della soluzione**: esistenza, determinazione e proprietà (analisi matematica, algebra, geometria, probabilità, logica...)
- **risoluzione efficiente** (**analisi numerica**, ricerca operativa, statistica, informatica...).

## concludendo...

Un problema reale affrontato matematicamente comporta diverse fasi coinvolgenti diverse discipline (che molto spesso si intersecano positivamente)

- **formulazione del modello** (fisica matematica, biomatematica, ingegneria, chimica, economia...)
- **analisi della soluzione**: esistenza, determinazione e proprietà (analisi matematica, algebra, geometria, probabilità, logica...)
- **risoluzione efficiente** (**analisi numerica**, ricerca operativa, statistica, informatica...).

Nella maggioranza delle applicazioni reali ci si riduce, prima o poi, alla risoluzione di **equazioni di primo grado**, d'altro canto è uno dei pochi casi che l'essere umano è realmente in grado di risolvere...

## concludendo...

Un problema reale affrontato matematicamente comporta diverse fasi coinvolgenti diverse discipline (che molto spesso si intersecano positivamente)

- **formulazione del modello** (fisica matematica, biomatematica, ingegneria, chimica, economia...)
- **analisi della soluzione**: esistenza, determinazione e proprietà (analisi matematica, algebra, geometria, probabilità, logica...)
- **risoluzione efficiente** (**analisi numerica**, ricerca operativa, statistica, informatica...).

Nella maggioranza delle applicazioni reali ci si riduce, prima o poi, alla risoluzione di **equazioni di primo grado**, d'altro canto è uno dei pochi casi che l'essere umano è realmente in grado di risolvere...

...e la tecnologia moderna è densa di problemi simili a Google: ascoltare un CD, guardare un DVD e scattare una foto digitale sono situazioni quotidiane che non potremmo vivere se qualcuno non sapesse risolvere equazioni in modo efficiente!

## concludendo...

Un problema reale affrontato matematicamente comporta diverse fasi coinvolgenti diverse discipline (che molto spesso si intersecano positivamente)

- **formulazione del modello** (fisica matematica, biomatematica, ingegneria, chimica, economia...)
- **analisi della soluzione**: esistenza, determinazione e proprietà (analisi matematica, algebra, geometria, probabilità, logica...)
- **risoluzione efficiente** (**analisi numerica**, ricerca operativa, statistica, informatica...).

Nella maggioranza delle applicazioni reali ci si riduce, prima o poi, alla risoluzione di **equazioni di primo grado**, d'altro canto è uno dei pochi casi che l'essere umano è realmente in grado di risolvere...

...e la tecnologia moderna è densa di problemi simili a Google: ascoltare un CD, guardare un DVD e scattare una foto digitale sono situazioni quotidiane che non potremmo vivere se qualcuno non sapesse risolvere equazioni in modo efficiente!

**voi rifletteteci sopra...**  
**...intanto vi ringrazio per l'attenzione!**