Il ruolo della matematica nella analisi e nella sintesi di “oggetti sonori”

Prof. Elio Toppano – Università di Udine

Scaletta

- Prima parte
  - Gli oggetti sonori
  - L’elaborazione e il montaggio sonoro
  - Le applicazioni sonore

- Seconda parte
  - Segnali e modelli
  - Analisi e sintesi del suono
  - Analisi e Sintesi di Fourier

- Terza parte
  - Trasformata di Fourier (TF)
  - Trasformate di segnali a tempo discreto
  - Limitazioni della TF: la STFT
  - Sonogrammi
  - Altri approcci alla sintesi

Esercizi di analisi e sintesi

Gli strumenti

- Audacity 1.2.6 : editor per l'audio digitale
  http://audacity.sourceforge.net/

- Software Pratt 5.0.38: programma per l'analisi e la sintesi del parlato
  http://www.fon.hum.uva.nl/praat/

Prima Parte

I punti di vista sul suono

- *Acustica*: Che cosa sono i suoni?
- *Psicoacustica*: Come vengono percepiti i suoni?
- *Semantica*: Che significato hanno i suoni?
- *Estetica*: Come e perché (certi) suoni piacciono?

Gli “oggetti sonori”

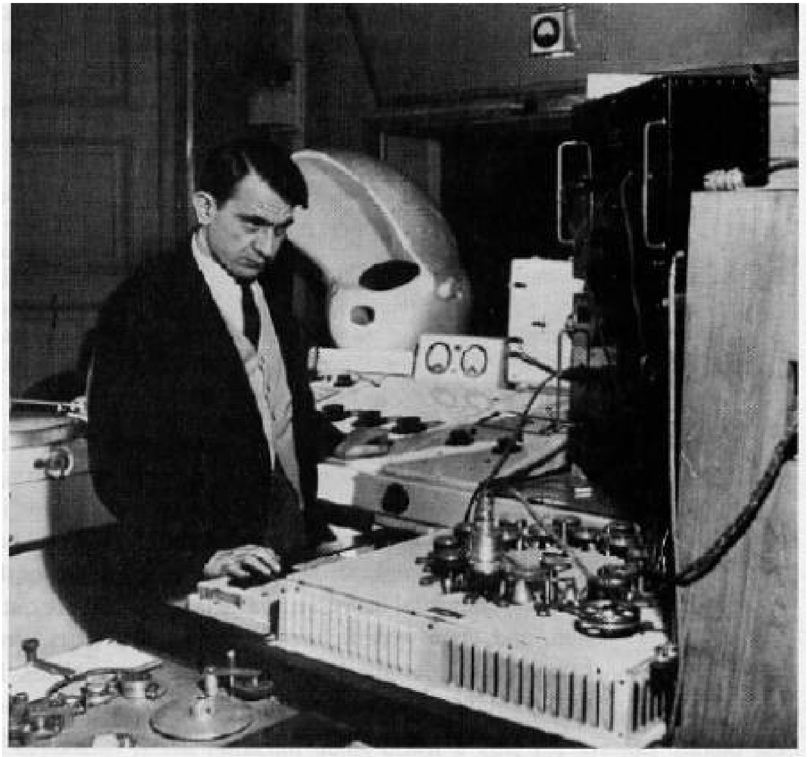
L’Universo Sonoro

- La musica del novecento si caratterizza anzitutto per la ricerca di nuove sonorità che si manifesta con l’esigenza di un ampliamento dei materiali sonori utilizzabili in ambito compositivo, al di là dei classici suoni strumentali fin’ora utilizzati (Esempio: “Asturias” di Albeniz)

- Il confine tra i suoni musicalmente accettati e quelli designati col termine dispregiativo “rumore” diventa sempre più labile (Esempio: “Poeme electronique” di Varese)

Gli “oggetti sonori”

- Il termine “*oggetto sonoro*” è stato coniato da Pierre Schaeffer per definire gli elementi sonori (es. rumori) per i quali non era facile trovare una denominazione facendo riferimento al lessico utilizzato per la musica strumentale
- Nasce la *musica concreta.*
- “Cinq études de bruits” Radio Francese (giugno 1948)



Pierre Schaeffer

Il paesaggio sonoro

- Raymond Murray Schafer fondatore del “World Soundscape Project”

- Studio comparato di suoni ambientali: *toniche, segnali e impronte*

Raymond Murray Schafer, musicista e teorico fondatore del World Soundscape Project

I suoni di sintesi

- Nel 1951 viene fondato a Colonia lo “Studio fur Elektronische Musik” (vi lavorerà Karlheinz Stockhausen)

- Creazione di nuovi elementi sonori complessi utilizzando suoni elettronici semplici (segnali sinusoidali)

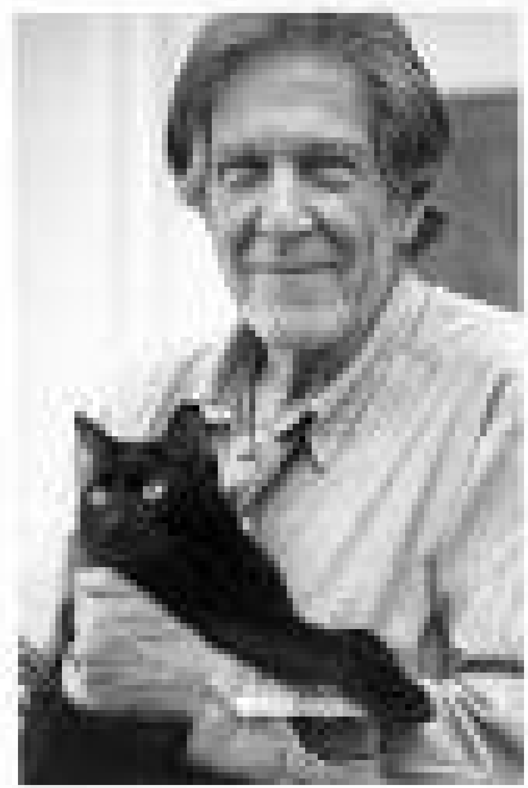
- Nasce la *musica elettronica*

Musiche di musiche e silenzio

- John Cage: *Imaginary Landscape n.5* (1952) utilizza come materiale sonoro di base i suoni di 42 dischi qualsiasi

- Il ruolo del "silenzio"

  John Cage: *4'33"* per pianoforte



Oggetto sonoro

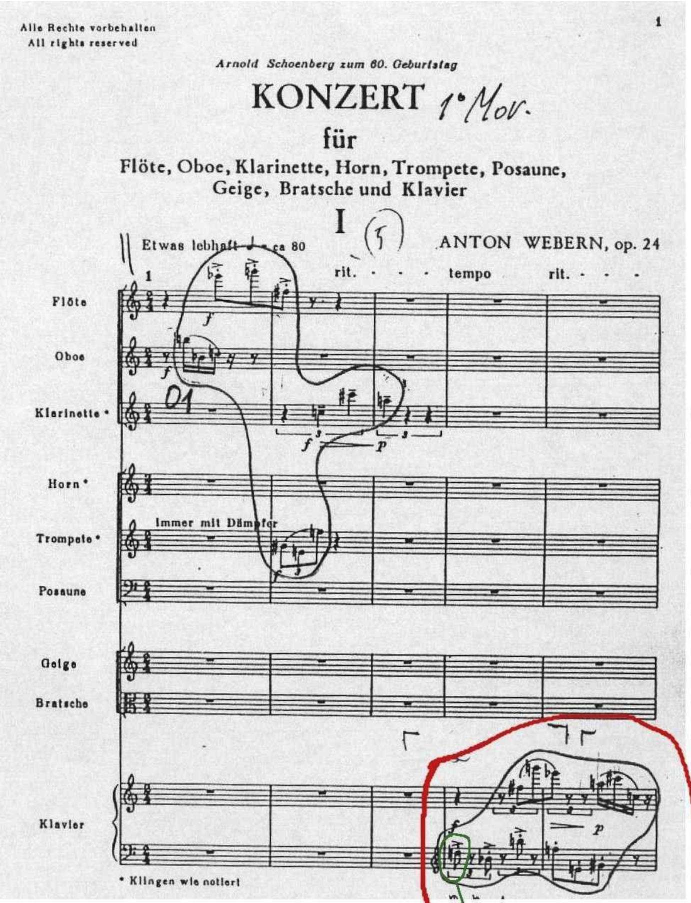
- “ Si chiama oggetto sonoro ogni fenomeno ed avvenimento sonoro percepito come un insieme, come un tutto coerente e inteso con *un ascolto ridotto* che lo coglie per lui stesso, indipendentemente dalla sua provenienza e dalla sua significazione” (Chion)
- Esempi: sillaba, nota, cigolio di una porta,rumore del vento, ...nell’ascolto ridotto
- Ascolto ridotto: finalizzato a cogliere le caratteristiche spettromorfologiche del suono

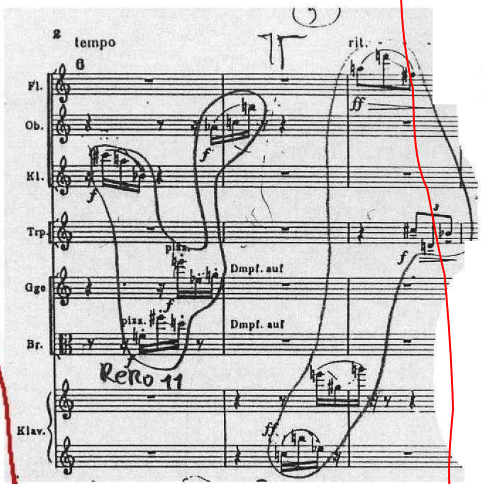
Spettromorfologia dell'oggetto sonoro

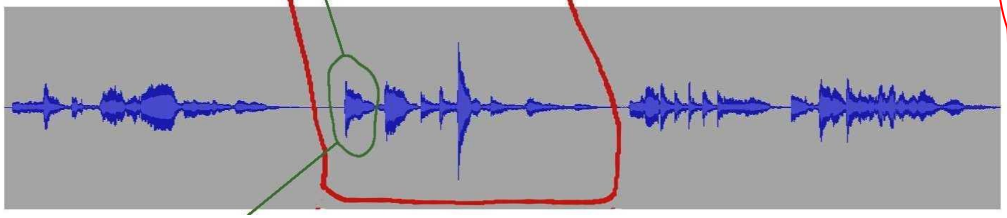
- *Spettromorfologia dell'oggetto sonoro*: termine coniato da Denis Smalley (1997) per riassumere i tratti che compongono la fisionomia di ciascun suono. Il termine evidenzia due elementi importanti di un suono:

1. lo *spettro*, le componenti (es. suoni sinusoidali) che lo compongono

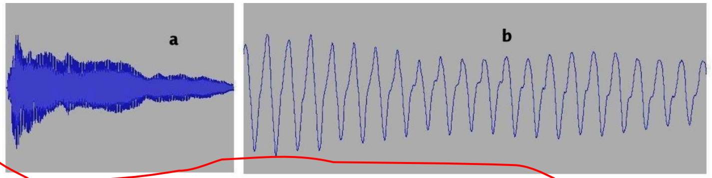
1. la *morfologia*, la forma, la sua articolazione temporale

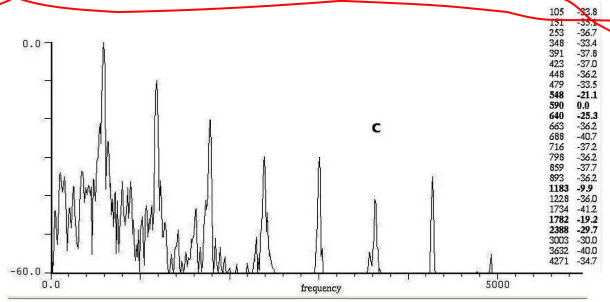




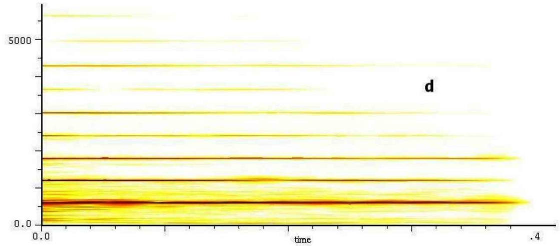


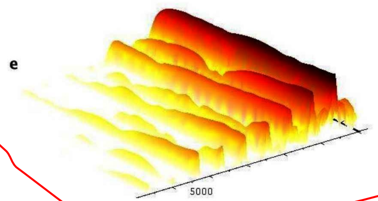
Re4: analisi nel tempo (forma)





Re4: analisi in frequenza (spettro)





Tipologie di oggetti sonori

- Oggetti sonori: suoni strumentali, rumori, suoni ambientali, suoni di sintesi

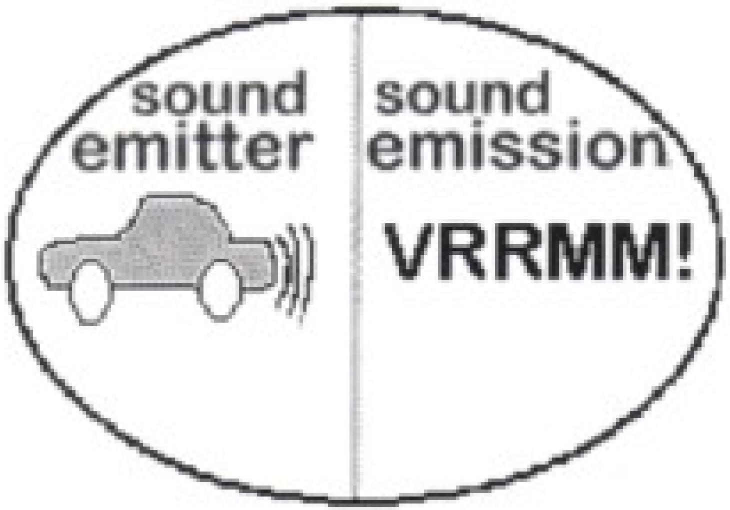
- In “Traité des objects musicaux” Pierre Schaeffer propone una classificazione degli oggetti sonori (Tipologia) e una caratterizzazione della forma (Morfologia) in base ad un certo numero di caratteristiche percettive sia macroscopiche che microscopiche (es. massa, durata, sostegno, grana, allure)

  Vedi esempi

Registrazione, elaborazione e montaggio sonoro

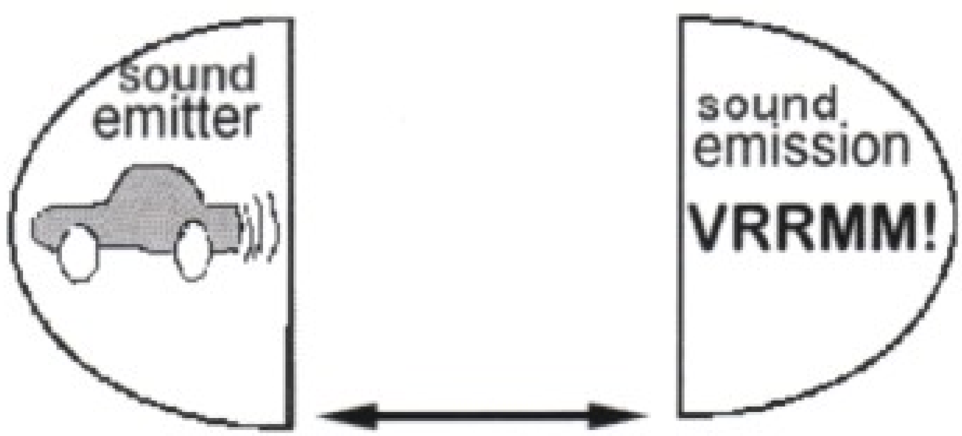
Il suono nella realtà

- Il suono è strettamente legato alla sorgente/causa. E' un evento che ha una collocazione spaziale e temporale precisa.



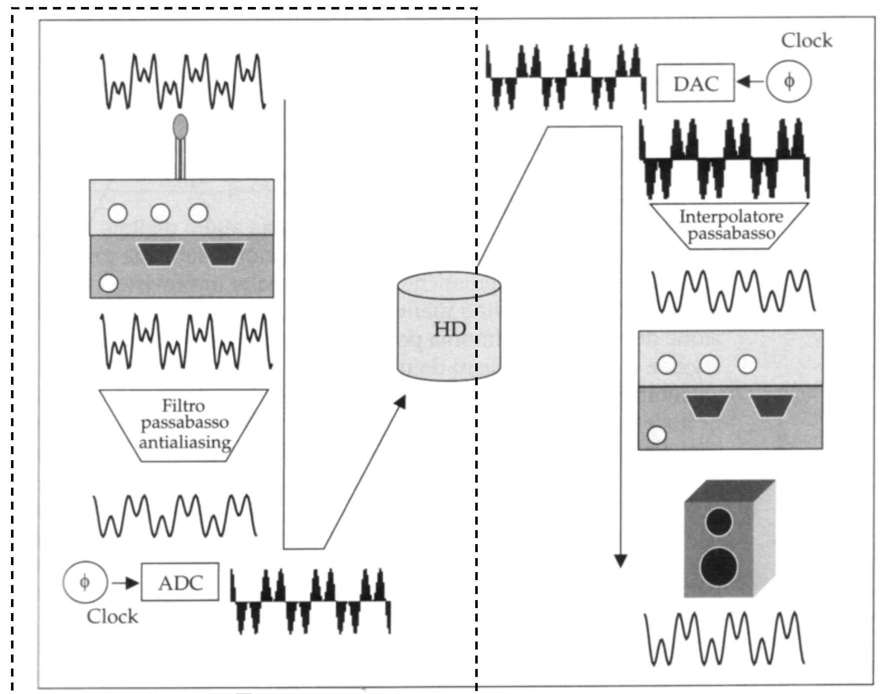
La registrazione

La registrazione (fonofissazione) su supporto (nastro, disco) provoca la separazione del suono dalla sua sorgente/causa. Il suono viene "decontestualizzato"; può essere riprodotto più volte (identico a se stesso) e in tempi diversi



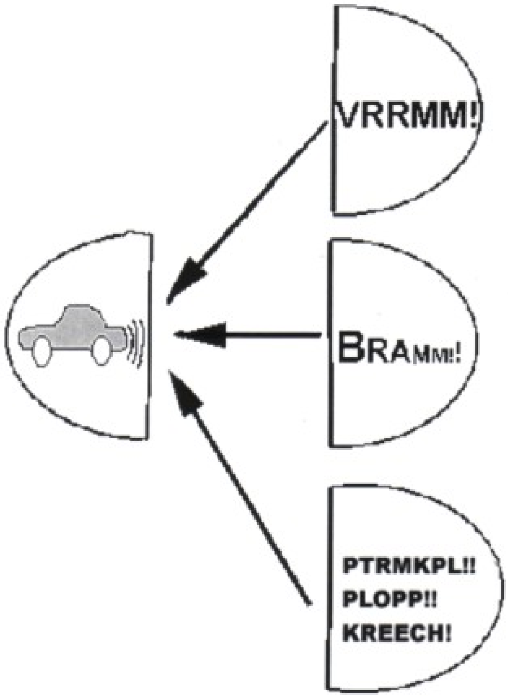
La registrazione digitale

- *Trasduzione* elettroacustica (microfono)
- *Amplificazione* del segnale elettrico
- *Filtraggio* passa basso (filtro antialiasing)
- *Conversione analogico-digitale* (ADC): a) ***campionamento***; b) ***quantizzazione***; c) ***codifica***
- *Formattazione*
- *Registrazione* su supporto



L’elaborazione e montaggio

- Il suono può essere trasformato e organizzato nel tempo e nello spazio (montaggio temporale e spaziale)



Prospettiva sonora: figura e sfondo

- Paesaggi sonori ad alta fedeltà (Hi-Fi). Presenza di prospettiva sonora

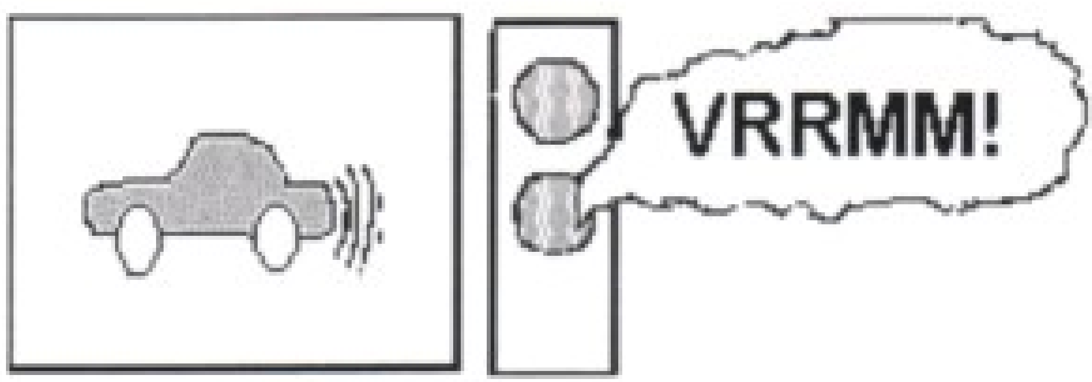
  (da “C’era una volta il West” di S. Leone, 1968. Tonica: ruota eolica)

- Paesaggi sonori a bassa fedeltà (Lo-Fi). Assenza di prospettiva sonora

  (Cocktail Party)

L’illusione audiovisiva

- Il suono può essere associato ad una immagine (fissa o in movimento
- *Effetto di Sincresi*: saldatura inevitabile spontanea che si produce tra un fenomeno sonoro e uno visivo puntuale quando questi accadono contemporaneamente (*sincr*onismo + sint*esi*)



Le applicazioni del suono

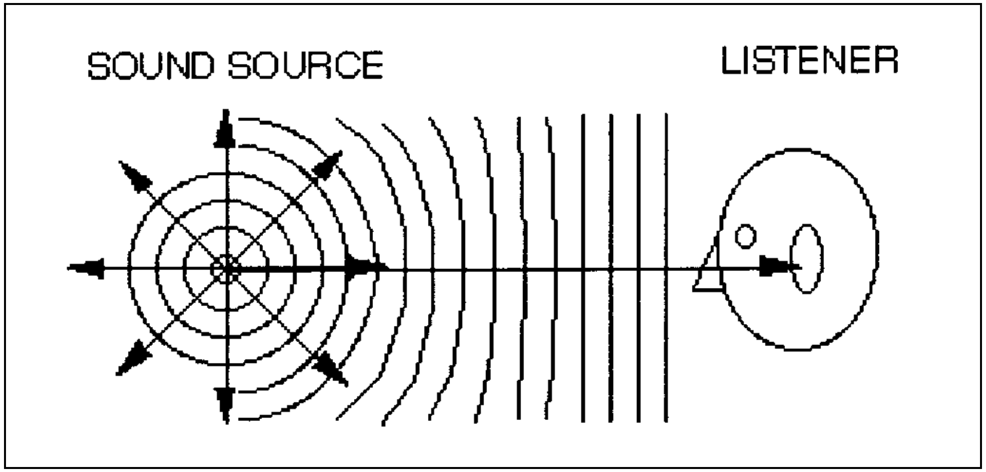
- *Multimedia*: raccontare le immagini fisse o in movimento
- *Sonificazione*: rappresentare l’informazione (dati)
- *Sound Branding*: costruire l’identità e l’immagine di una marca
- *Suono ambientale*: riempire lo spazio reale o virtuale
- *Il suono nel Design Industriale*: progettare il suono degli oggetti

Seconda Parte

Segnali e modelli

La natura fisica del suono

- La natura fisica del suono è di tipo ondulatorio: si tratta di onde meccaniche che trasportano energia lontano dalla sorgente sonora che è un oggetto in vibrazione



Segnali fisici

- *Segnale fisico*: grandezza fisica che varia nel tempo e/o nello spazio e che fornisce informazioni su un qualsiasi aspetto del mondo reale

- Nel caso del suono il segnale fisico è una variazione continua (nello spazio e nel tempo) della *pressione* del mezzo interposto tra sorgente e ascoltatore. Questo segnale "trasporta" informazioni sia sulla sorgente sia sull'ambiente in cui si propaga.

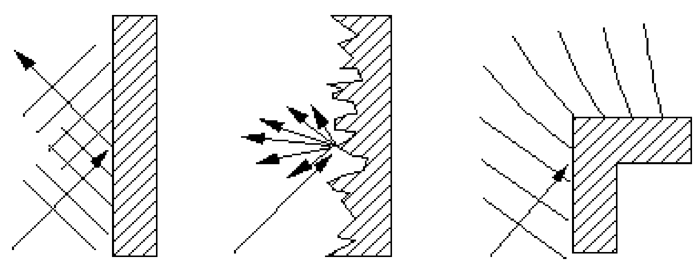
Caratteristiche della propagazione

- *Attenuazione*: una sorgente di suono puntiforme produce onde sferiche la cui ampiezza decresce allontanandosi dalla sorgente con il quadrato della distanza

- *Assorbimento*: l'assorbimento della energia dell'onda dipende dalle caratteristiche del mezzo e dalle condizioni fisiche in cui si trova (temperatura, umidità, ecc.) e dalle caratteristiche dei materiali degli oggetti e delle superfici incontrate durante la propagazione

- *Riflessione* e *diffusione*: le onde vengono riflesse quando incontrano delle superfici liscie, diffuse dalle superfici ruvide o scabre. Una superficie è considerata liscia se le dimensioni delle sue irregolarità sono piccole in relazione alla lunghezza d’onda incidente, scabra in caso contrario

- *Diffrazione*: le onde vengono diffratte quando incontrano degli oggetti o delle barriere. Se l’oggetto è piccolo (rispetto alla lunghezza d’onda) allora l’onda lo aggira. In caso contrario si forma una “ombra sonora” dietro l’oggetto e una considerevole quantità di energia viene riflessa all’indietro verso la sorgente

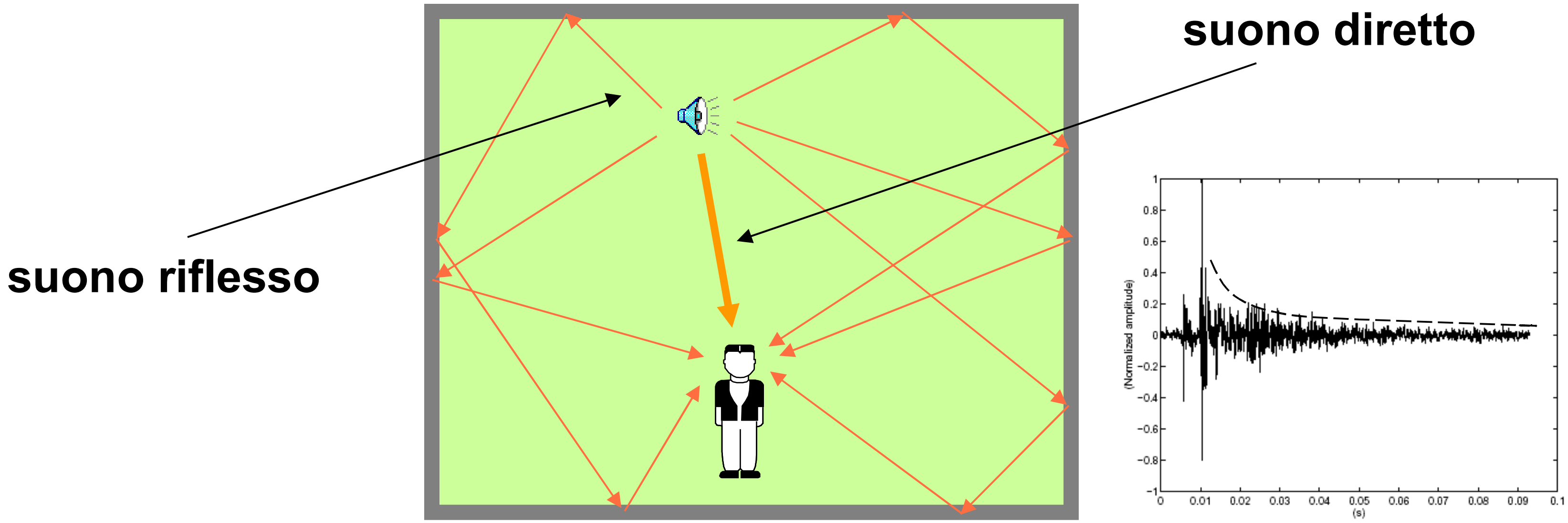


riflessione diffusione diffrazione

Riverbero

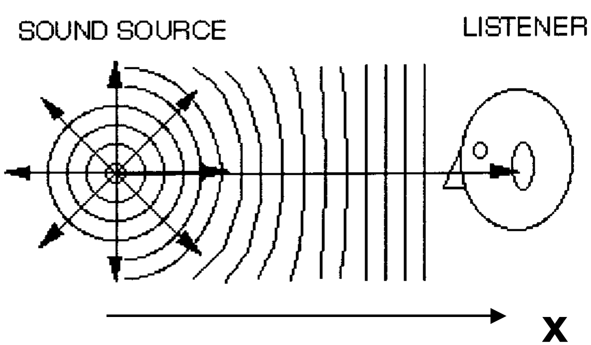
- Riverberazione: indica tutta l’energia riflessa

  Esempi



Modelli matematici dei segnali fisici

- Un modello è una descrizione astratta di una porzione di realtà fatta da qualcuno per un qualche scopo (es. risolvere problemi). Se la descrizione utilizza il linguaggio formale della matematica si parla di modello matematico



segnale fisico

$$y=s(x,t) = A*\sin[2\pi(x/\lambda + t/T)]$$

segnale (modello) matematico

Ipotesi di lavoro

- Rappresenteremo i segnali sonori con la funzione

$$y= s(t)$$

in cui

t è la variabile indipendente e rappresenta il *tempo*

y è la variabile dipendente e rappresenta l'*ampiezza* del segnale all'istante t

s(): D → R D è il dominio, R il codominio della funzione

Segnali continui-discreti

- In base al dominio D di s ( ) si distingue tra
  - segnali a *tempo continuo* (D : *R*)
  - segnali a *tempo discreto* (D : {nT| n in *Z*})

- In base al codominio R di s ( ) si distingue tra
  - segnali con *ampiezza continua* (R : *R* o *C*)
  - segnali con *ampiezza discreta* (R : {v1, v2, …vn})

Segnali periodici-aperiodici

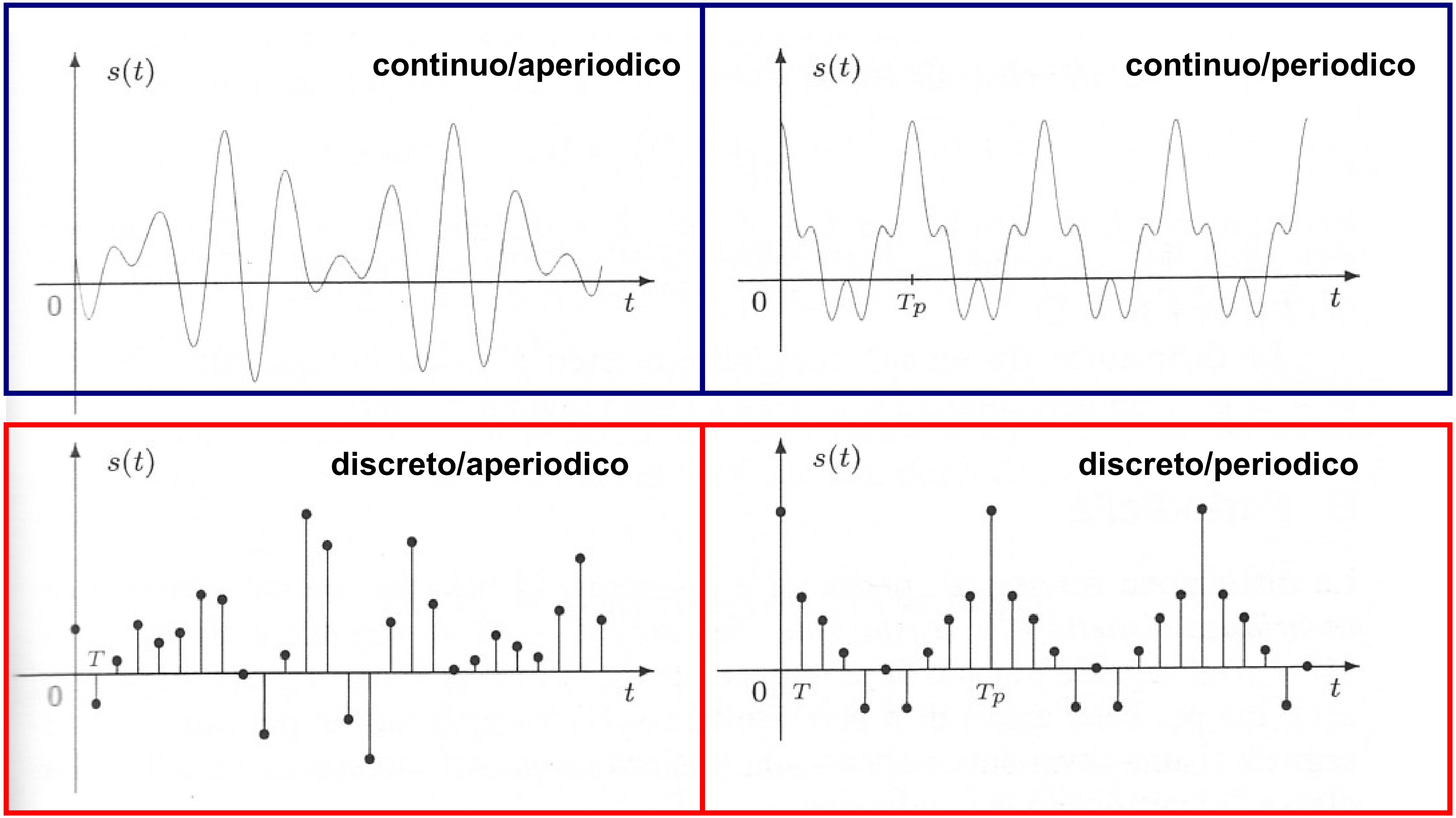
- Un segnale s(t) si dice *periodico* se esiste un valore Tp tale che:

$$\boxed{s(t) = s(t + Tp)}$$

- In altre parole l'andamento del segnale si ripete identico a se stesso a intervalli regolari Tp

- Se un segnale è periodico di periodo Tp lo è anche per k*Tp

Tipi di segnali



Analisi e Sintesi di Fourier

Analisi e sintesi di segnali audio

- *Sintesi*: generazione di segnali complessi a partire da segnali costituenti semplici scelti come base, mediante una operazione di composizione

- *Analisi*: scomposizione di un segnale complesso in termini di segnali più semplici in modo che la corrispondente sintesi ricostruisca esattamente il segnale originario

I segnali sinusoidali

- Un *segnale sinusoidale* è rappresentato dalla funzione:

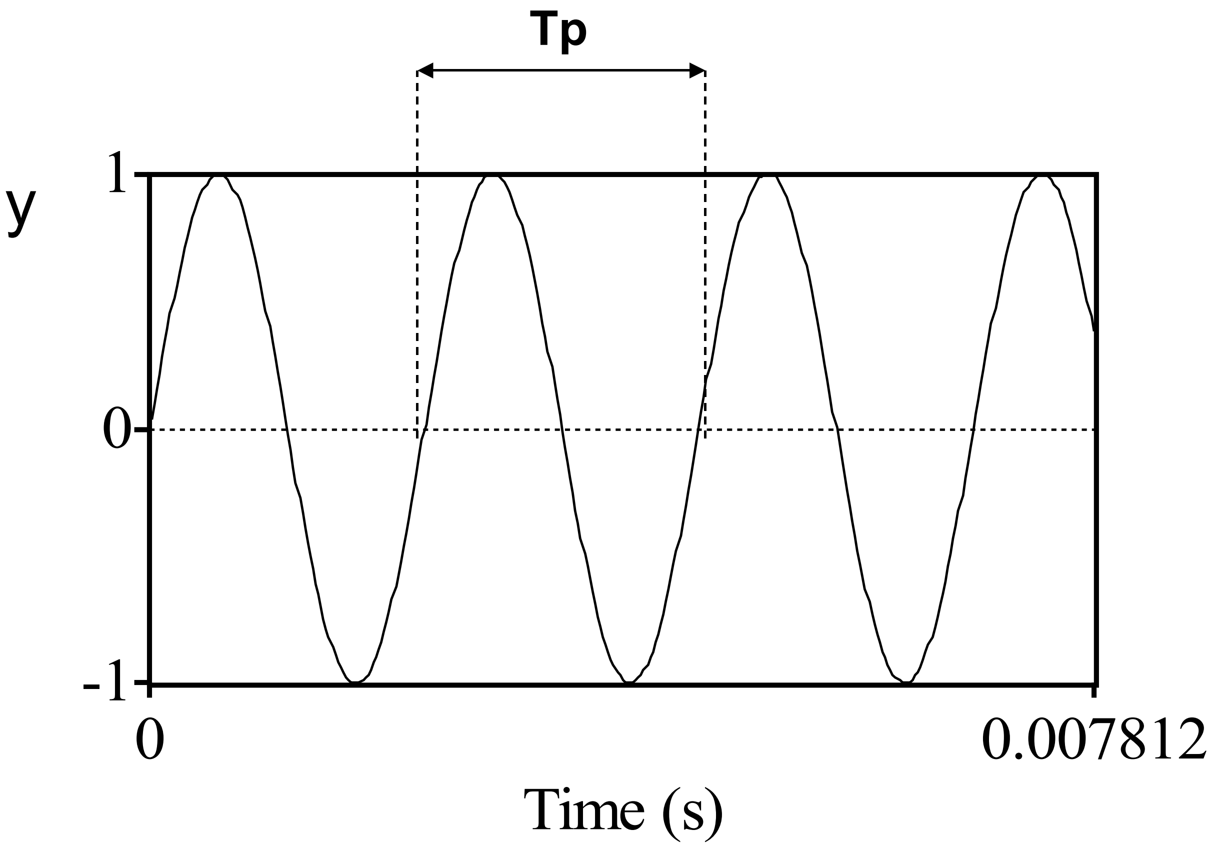
$$\boxed{y = \mathrm{sen}(\omega t + \theta)}$$

ω: pulsazione angolare (rad/s)

$\omega = 2\pi f$ con f: frequenza (cicli/s o Herz)

θ: fase iniziale (rad)

y=s(t)= sen(2*π*440*t)   f=440 Hz   Tp=1/f=0.00228s

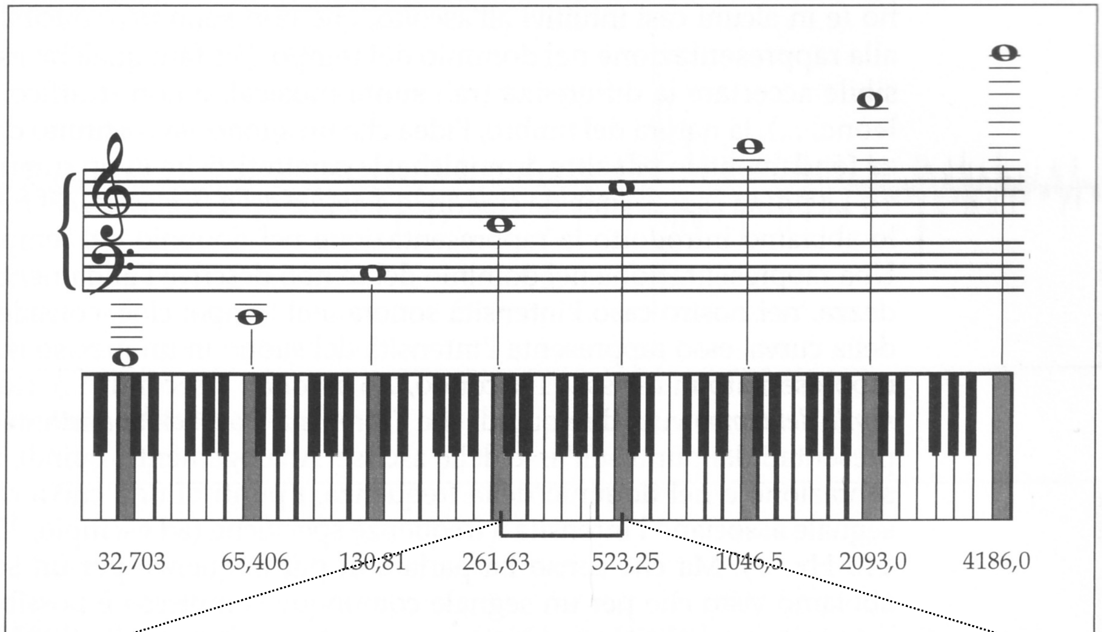


Suoni intonati

- I segnali sonori periodici (o quasi periodici) sono suoni intonati ossia sono dotati di *altezza* (pitch) e hanno come intonazione la nota corrispondente alla frequenza di ripetizione f=1/Tp

- L'altezza di un suono è un parametro percettivo. L'intonazione è percepibile se la frequenza f è in banda audio: da 20 Hz a 20000 Hz (Es2.4a)

Esempio: la tastiera del pianoforte



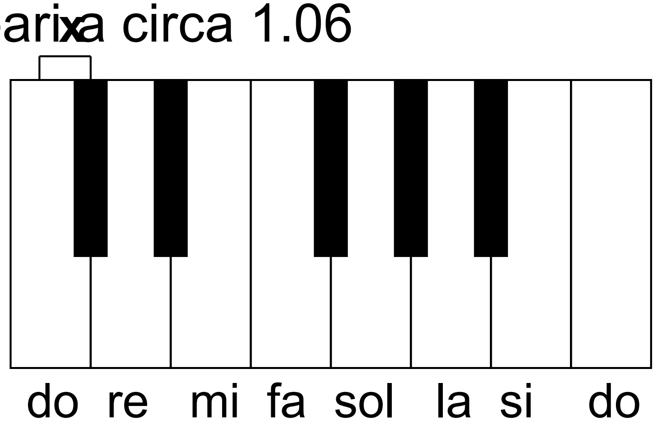
do_4	$do\#_4$	re_4	$re\#_4$	mi_4	fa_4	$fa\#_4$	sol_4	$sol\#_4$	la_4	$la\#_4$	si_4
261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23	369,99	392	415,30	440	466,16	493,88

Osservazioni

- La frequenza del *do4* è 261.6 Hz, quella del *do5* è 523.2 Hz (2*261.6). Lo spostamento di una ottava (superiore) corrisponde al raddoppio della frequenza

- Usando la *scala temperata equabile* si ha che lo spostamento di un semitono X corrisponde ad un rapporto delle frequenze pari a circa 1.06

$$\frac{re}{do} = \frac{re}{do\#} * \frac{do\#}{do}$$



$$X^{12} = 2$$

$$X = 1.0594631$$

Analisi e Sintesi additiva

- Si utilizzano come segnali costituenti le sinusoidi (o cosinusoidi) e come operazione per la loro composizione la combinazione lineare (miscelazione)

$$s(t) = a_1*s_1(t) + a_2*s_2(t) + \ldots.+ a_n*s_n(t)$$

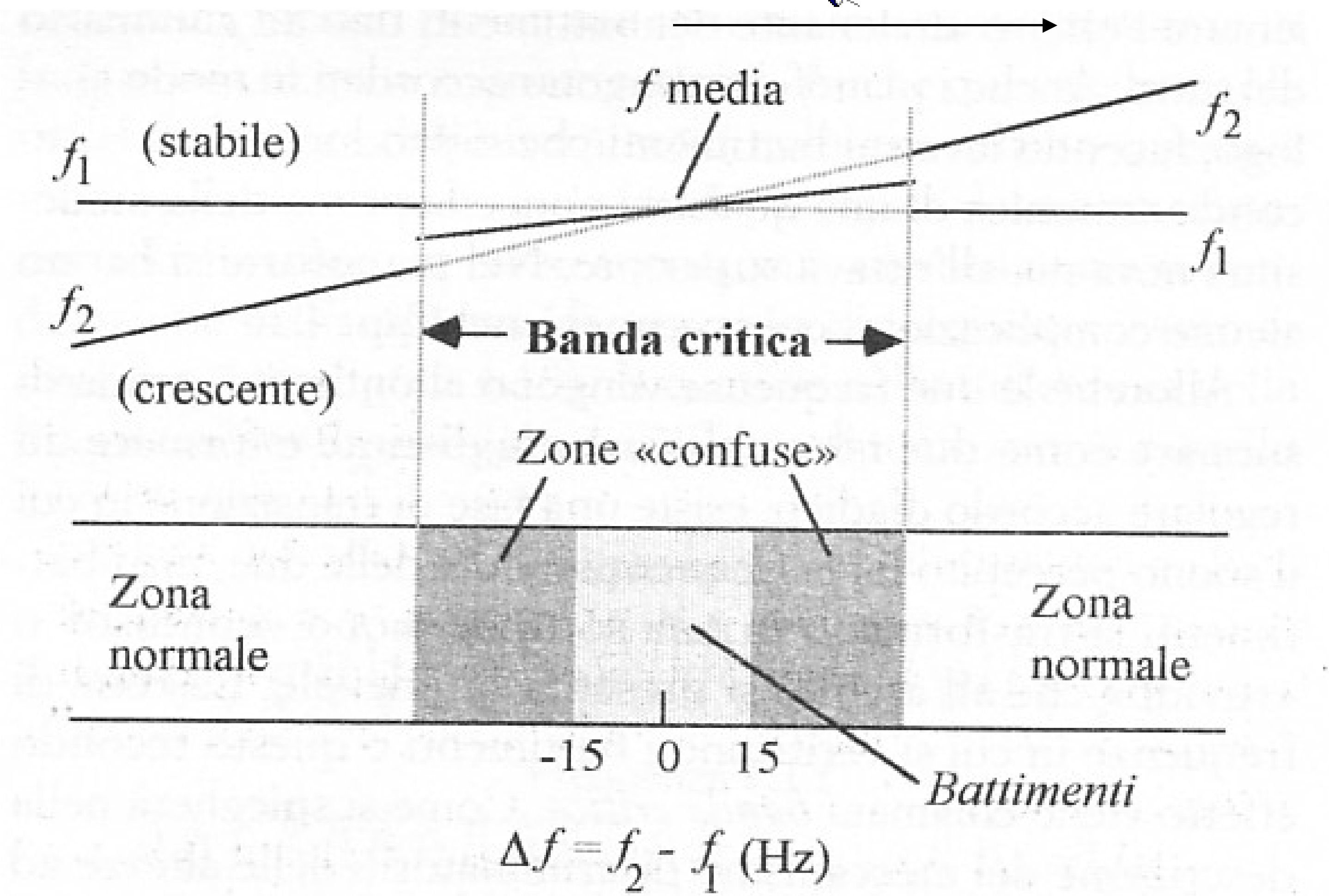
$s_i(t)$ sono i segnali costituenti di tipo sinusoidale

$$s_i(t)= \text{sen}(\omega_i*t + \theta_i) \text{ con } \omega_i=2\pi*f_i$$

Battimenti

- Fenomeno che si verifica quando si sommano due segnali sinusoidali di frequenza leggermente differente (es. fi e fi+Δf con $\Delta f<15$Hz)

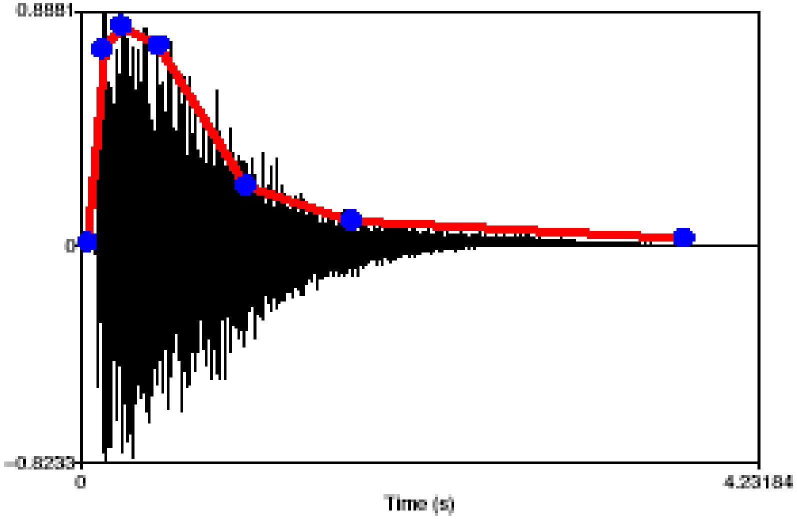
- Banda critica: è la regione (in frequenza) in cui due frequenze non si percepiscono distinte ma come una frequenza media con sovrapposti battimenti o altri effetti rumorosi.

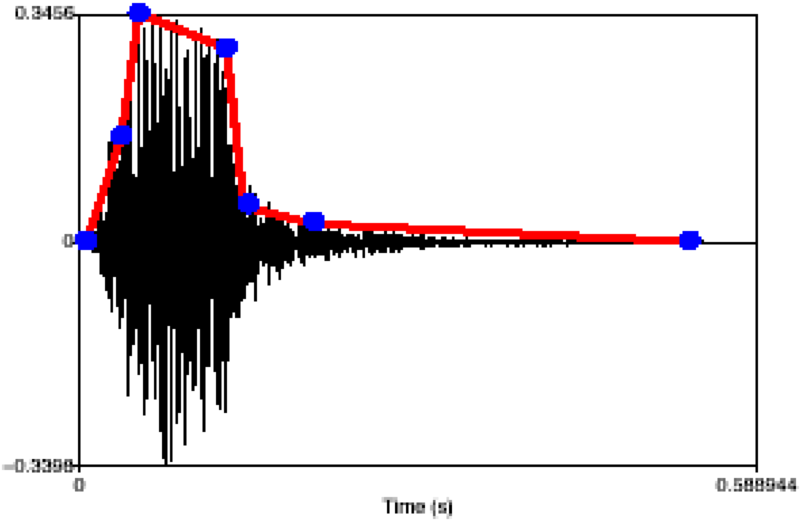


f media
f_1 (stabile)
f_2
f_1
f_2
Banda critica
(crescente)
Zone «confuse»
Zona normale
Zona normale
-15 0 15
Battimenti
$\Delta f = f_2 - f_1$ (Hz)

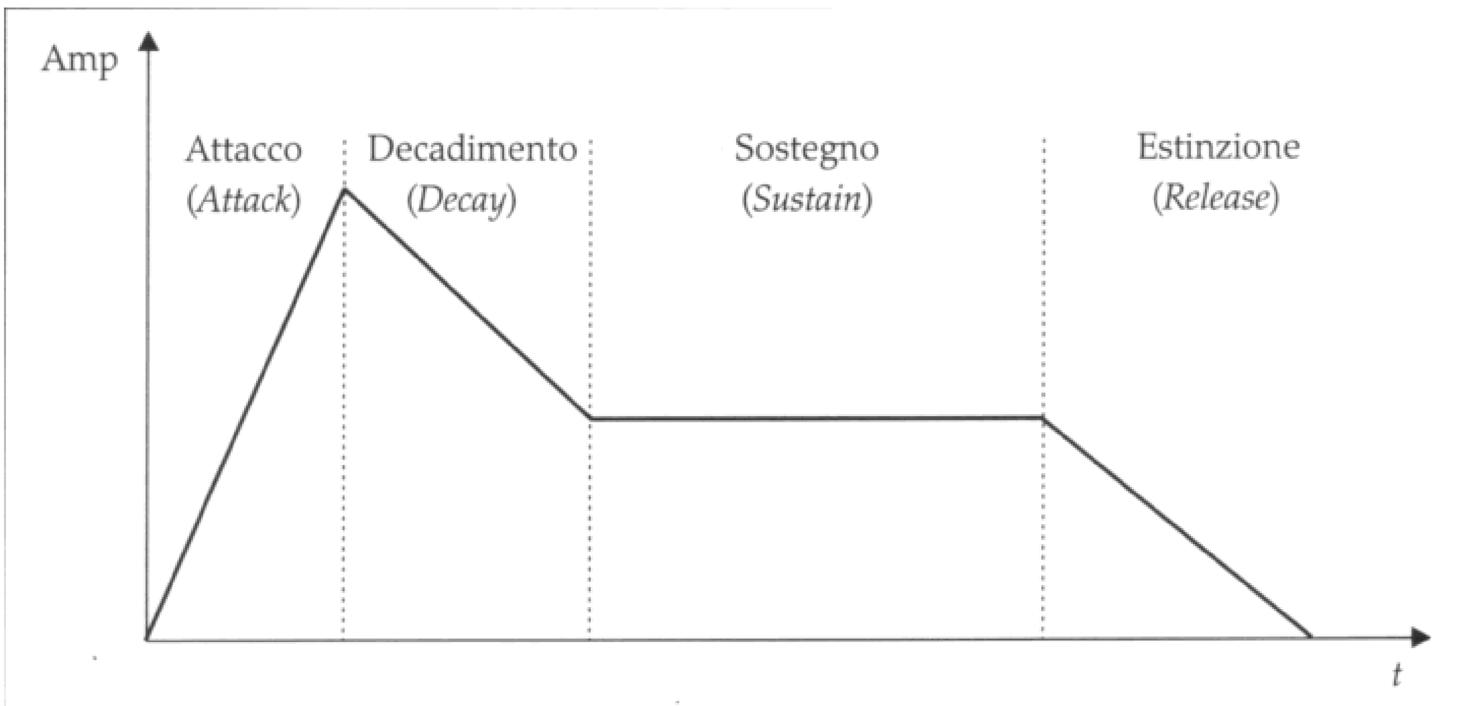
Morfologia: l’inviluppo di un suono

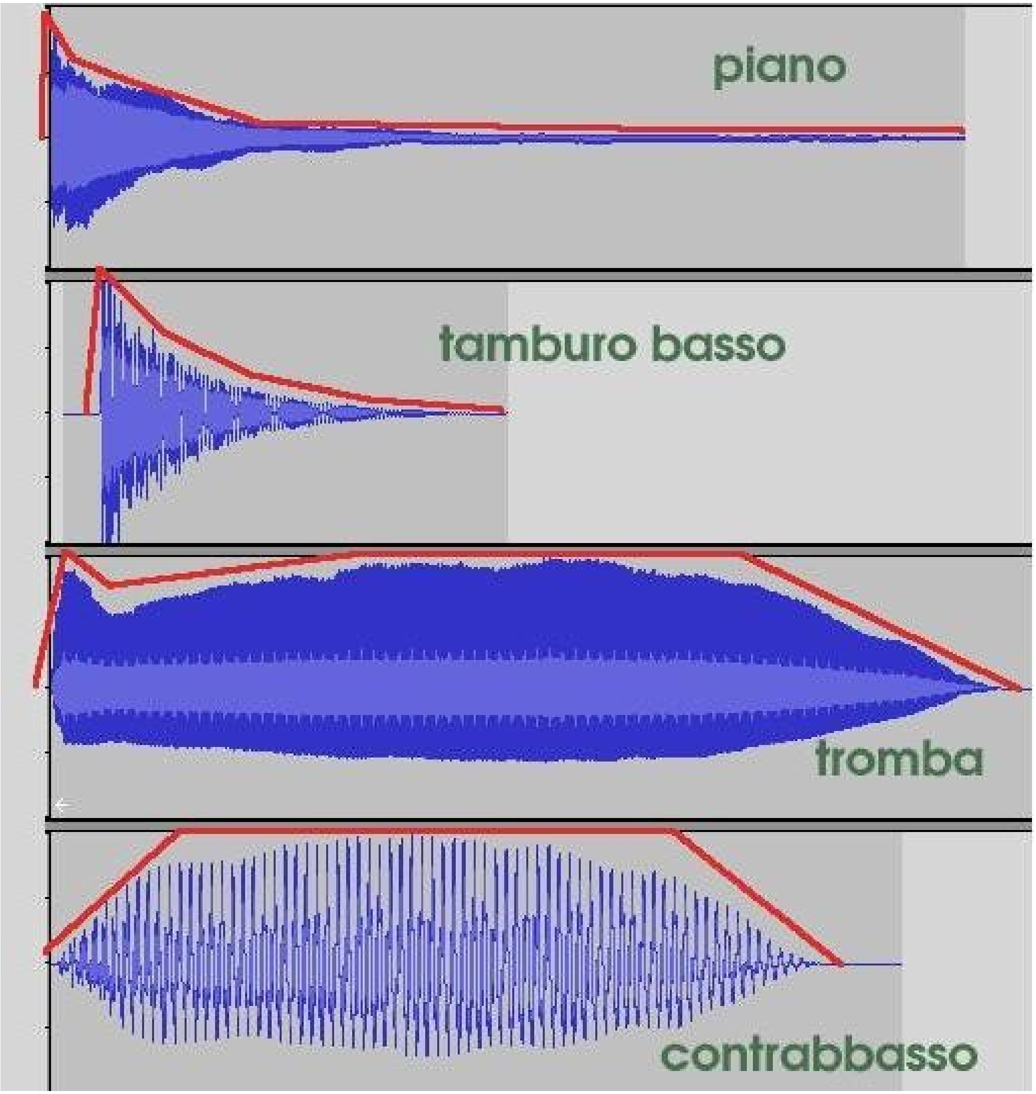
- L’inviluppo descrive il profilo temporale del suono





- All'interno dell'inviluppo vengono definite quattro fasi correlate ciascuna ad un momento temporale: ADSR





Es1.29

Es1.28

Es1.32

Analisi di Fourier

- Teorema di Fourier:

Qualunque <u>segnale di periodo</u> Tp può essere espresso come combinazione lineare di segnali sinusoidali semplici (eventualmente in numero infinito) le cui frequenze sono multiple della frequenza fondamentale f=1/Tp del segnale. Questa combinazione lineare è unica ovvero ad ogni segnale periodico corrisponde una e una sola possibilità di analisi in termini di Fourier

Serie di Fourier

- Se il segnale s(t) è <u>reale</u> e <u>periodico</u> di periodo Tp allora:

$$s(t) = \Sigma_{[n:\ 0,+\mathrm{inf}]}\ a_n * \sin(\omega_0 * n * t + \phi_n)$$
$$= \Sigma_{[n:\ 0,+\mathrm{inf}]}\ a_n * \sin(2\pi f_0 * n * t + \phi_n)$$

$\omega_0 = 2\pi f_0$ $\quad f_0 = 1/Tp$ $\quad f_0$: frequenza fondamentale

Osservazione

- Applicando le formule di addizione:

$$\sin(\alpha + \beta)=\sin(\alpha)*\cos(\beta) + \cos(\alpha)*\sin(\beta)$$

- Pertanto:

$a_n*\sin(2\pi f_0*n*t + \phi_n) =$

$a_n*\sin(2\pi f_0*n*t)*\cos(\phi_n) + a_n*\cos(2\pi f_0*n*t)*\sin(\phi_n) =$

$A_n*\sin(2\pi f_0*n*t) + B_n*\cos(2\pi f_0*n*t)$

Serie di Fourier (caso generale)

- Sia s(t) un segnale periodico di periodo Tp. Sotto opportune condizioni (continuità, esistenza di derivata I e II) il segnale è rappresentabile come:

$$s(t) = \sum_{(n:\ -\mathrm{inf};\ +\mathrm{inf})} S_n \exp\,(j2\pi\, n\, f_0\, t) \qquad f_0=1/Tp$$

dove i coefficienti di Fourier S_n (numeri complessi!) sono dati da

$$S_n = 1/Tp \int_{(t:\ 0;\ Tp)} s(t) \exp\,(-j2\pi\, n\, f_0\, t)\, dt \qquad n \in Z$$

Formule di Eulero

$\exp(jx)=\cos(x) + j\ \mathrm{sen}(x)$

$\exp(-jx)=\cos(x) - j\ \mathrm{sen}(x)$

$\cos(x) = [\exp(jx) + \exp(-jx)]/2$

$\mathrm{sen}(x) = [\exp(jx) - \exp(-jx)]/2j$

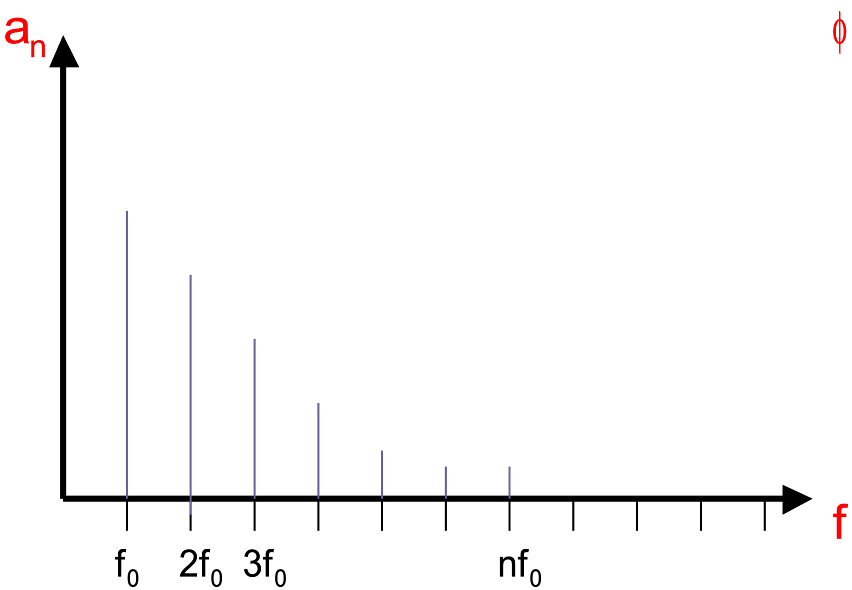
Esempio:

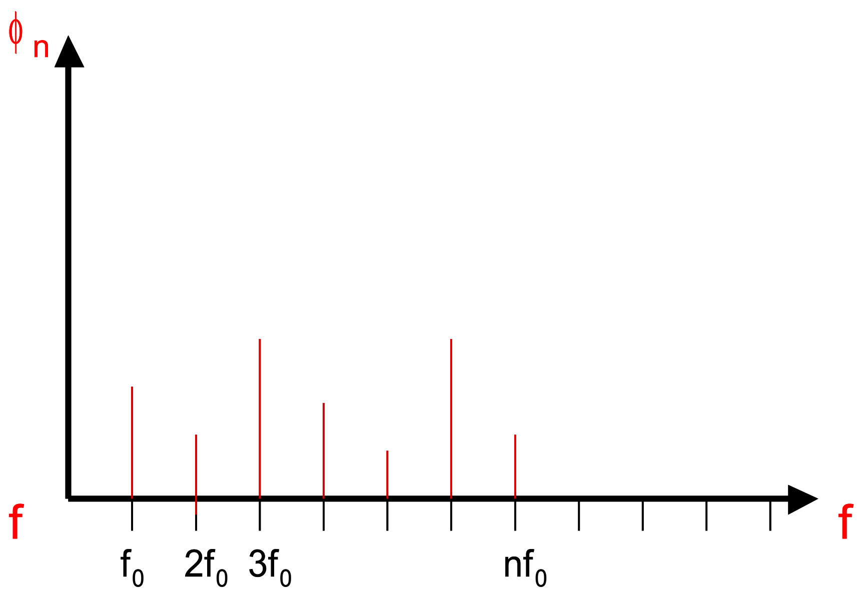
$s(t)=\exp(j\pi t^2)= \cos(\pi t^2)+j*\mathrm{sen}(\pi t^2)$

Lo "spettro" di un segnale periodico

- Rappresentazione grafica dei coefficienti a_n e ϕ_n in funzione della frequenza $n*f_0$

$$s(t)= \Sigma_{[n:\ 0,+inf]}\ a_n * \sin(2\pi\ f_0 * n * t + \phi_n)$$





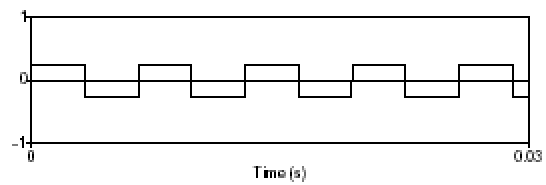
“Spettro” di un segnale (in generale)

- Lo “spettro” rappresenta il contenuto armonico di un suono: specifica quali componenti armoniche formano il suono, che intensità hanno e che relazioni di fase hanno tra di loro

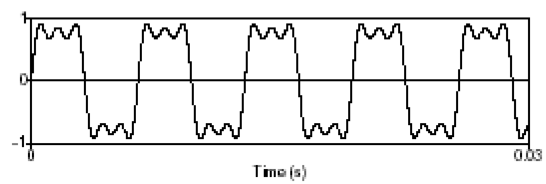
- Per i segnali non periodici si usa la Trasformata di Fourier

Esempio-1: onda quadra

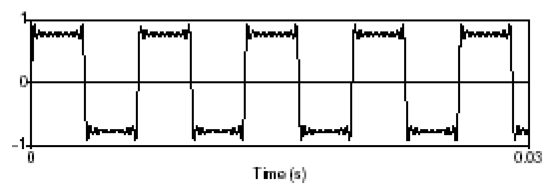
- Solo armoniche *dispari* (n: 1,3,5,7, …)
- Ampiezza proporzionale all'inverso del numero d'onda
- f_0x1, f_3 x 1/3, f_5 x 1/5, f_7 x 1/7, …



3 componenti

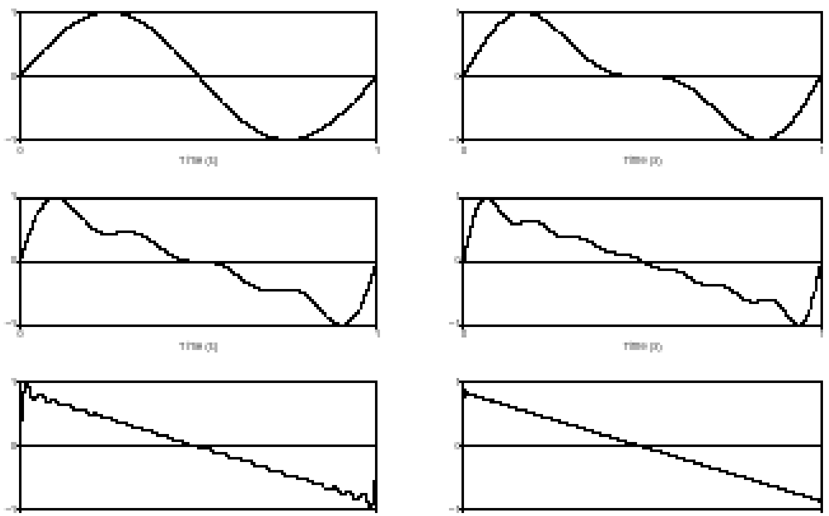


10 componenti



Esempio-2: onda a dente di sega

- Tutte le armoniche (n:1,2,3,4, …)
- Decrescente in rapporto 1/n
- f_1x1, f_2 x 1/2, f_3 x 1/3, f_4 x 1/4, …



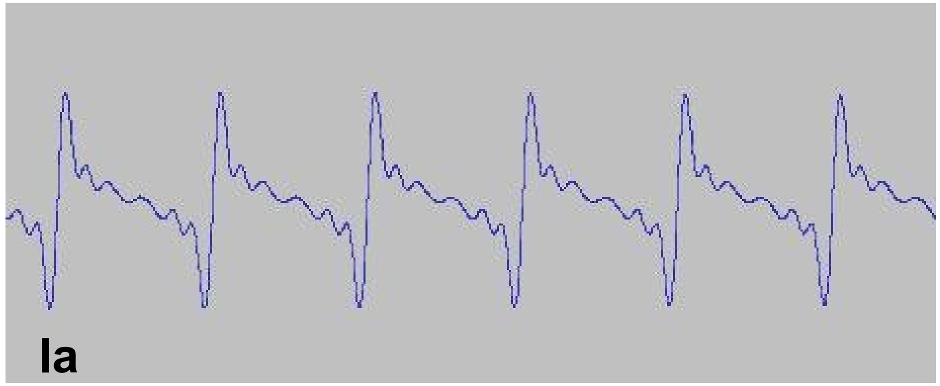
N. Armoniche: 1,2,4,8,25, 1000,

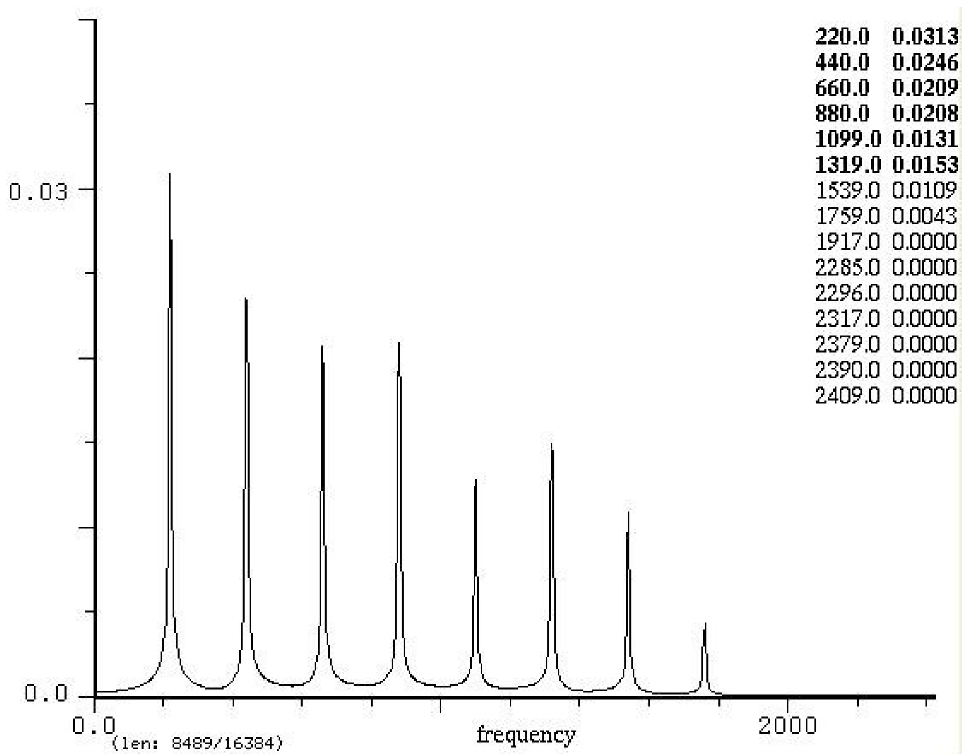
Relazione tra spettro e forma d’onda

- Le funzioni sinusoidali hanno determinate caratteristiche: sono continue (cioè prive di salti) e prive di spigoli vivi
- Fissata una determinata frequenza, la sinusoide di ampiezza unitaria ha una sua massima “ripidezza” (massima derivata, corrispondente al punto di attraversamento dello 0) e una sua massima curvatura (corrispondente ai punti di massimo e minimo)
- Una discontinuità è un salto istantaneo da un valore ad un altro e quindi da luogo ad una pendenza infinita in quel punto. Un punto angoloso (spigolo vivo) è un punto in cui la curvatura è infinita
- Per riprodurre discontinuità o punti angolosi è necessario utilizzare sinusoidi con frequenze elevate (infinite armoniche)

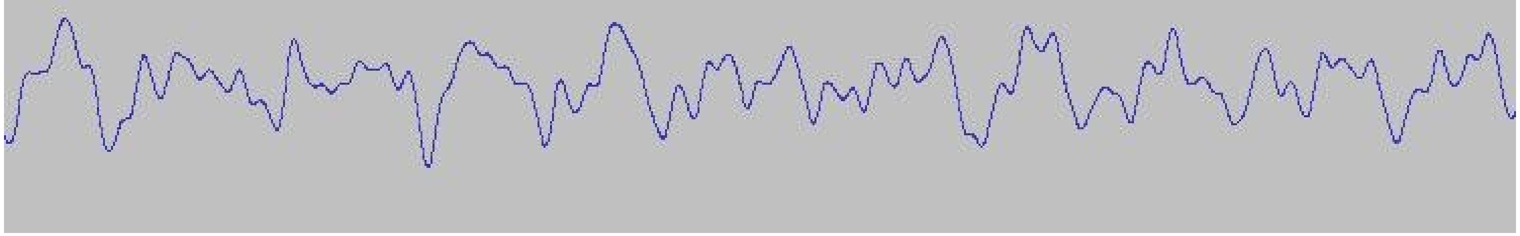
Tipi di spettro

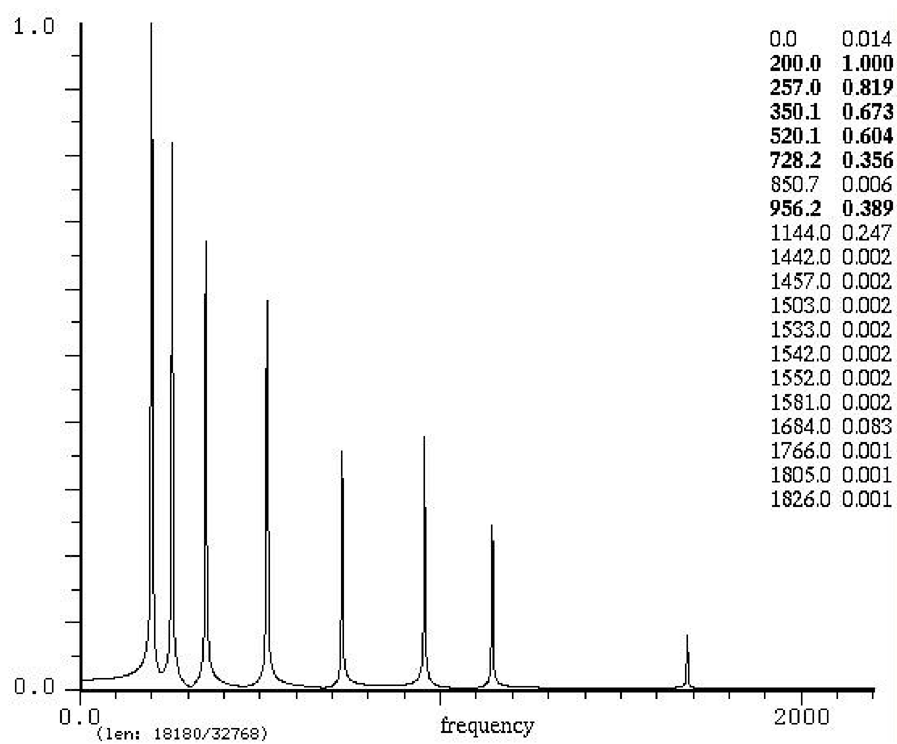
- E’ possibile classificare lo spettro di un suono in 4 categorie fondamentali:
  - *Spettro armonico*: spettro composto da una frequenza fondamentale f0 e dai suoi multipli interi 2*f0, 3*f0, 4*f0 … (fn=n*f0) con intensità variabili
  - *Spettro inarmonico*: spettro composto da una frequenza fondamentale f0 e da altre frequenze alcune multiple intere della fondamentale altre non multiple con intensità variabile
  - *Spettro nodale*: spettro complesso e irregolare, composto da un numero elevato (infinito) di frequenze appartenenti ad un intervallo continuo (banda di frequenza) in cui non è possibile individuare una frequenza fondamentale;
  - Spettro *rumore bianco*: spettro composto da tutte le frequenze (o da bande ampie di frequenze) con intensità costante


la

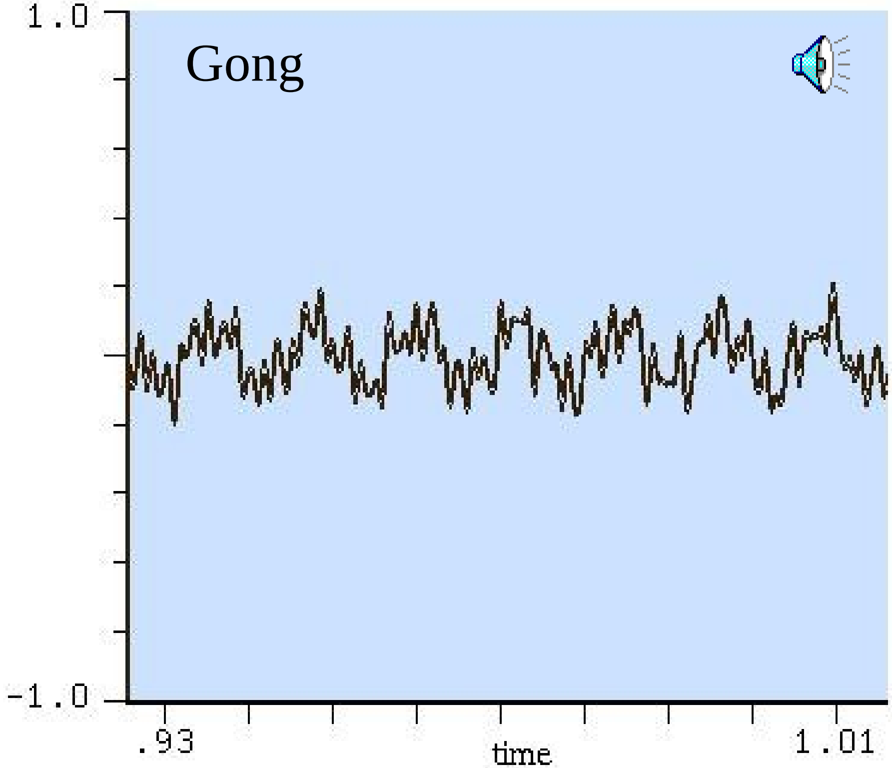

220.0 0.0313
440.0 0.0246
660.0 0.0209
880.0 0.0208
1099.0 0.0131
1319.0 0.0153
1539.0 0.0109
1759.0 0.0043
1917.0 0.0000
2285.0 0.0000
2296.0 0.0000
2317.0 0.0000
2379.0 0.0000
2390.0 0.0000
2409.0 0.0000
0.03
0.0
0.0
(len: 8489/16384)
frequency
2000

Campana

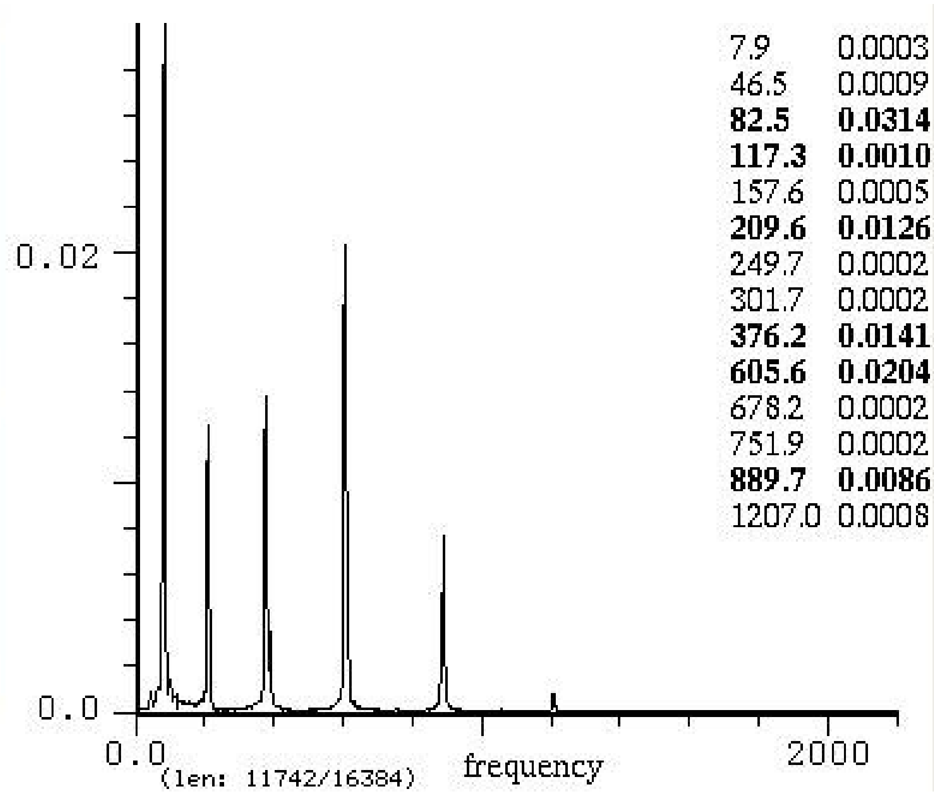




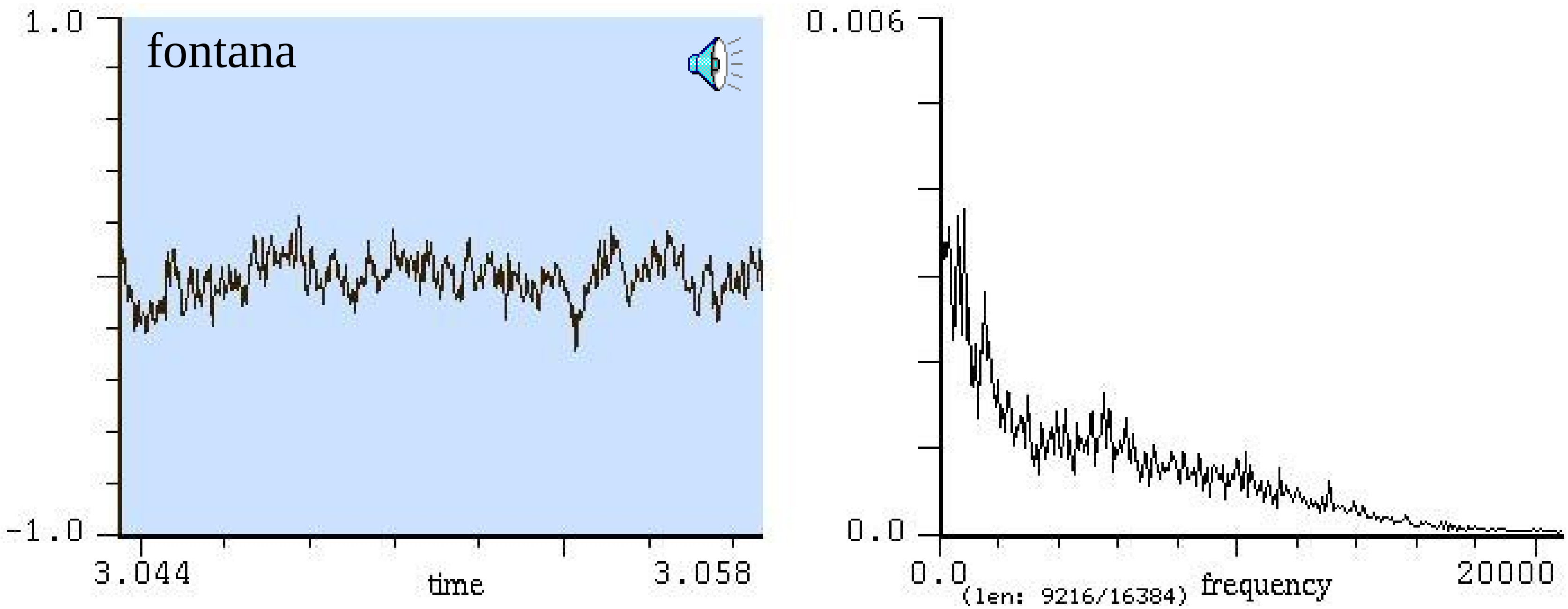
1.0
0.0
0.0
(len: 18180/32768)
frequency
2000
0.0 0.014
200.0 1.000
257.0 0.819
350.1 0.673
520.1 0.604
728.2 0.356
850.7 0.006
956.2 0.389
1144.0 0.247
1442.0 0.002
1457.0 0.002
1503.0 0.002
1533.0 0.002
1542.0 0.002
1552.0 0.002
1581.0 0.002
1684.0 0.083
1766.0 0.001
1805.0 0.001
1826.0 0.001

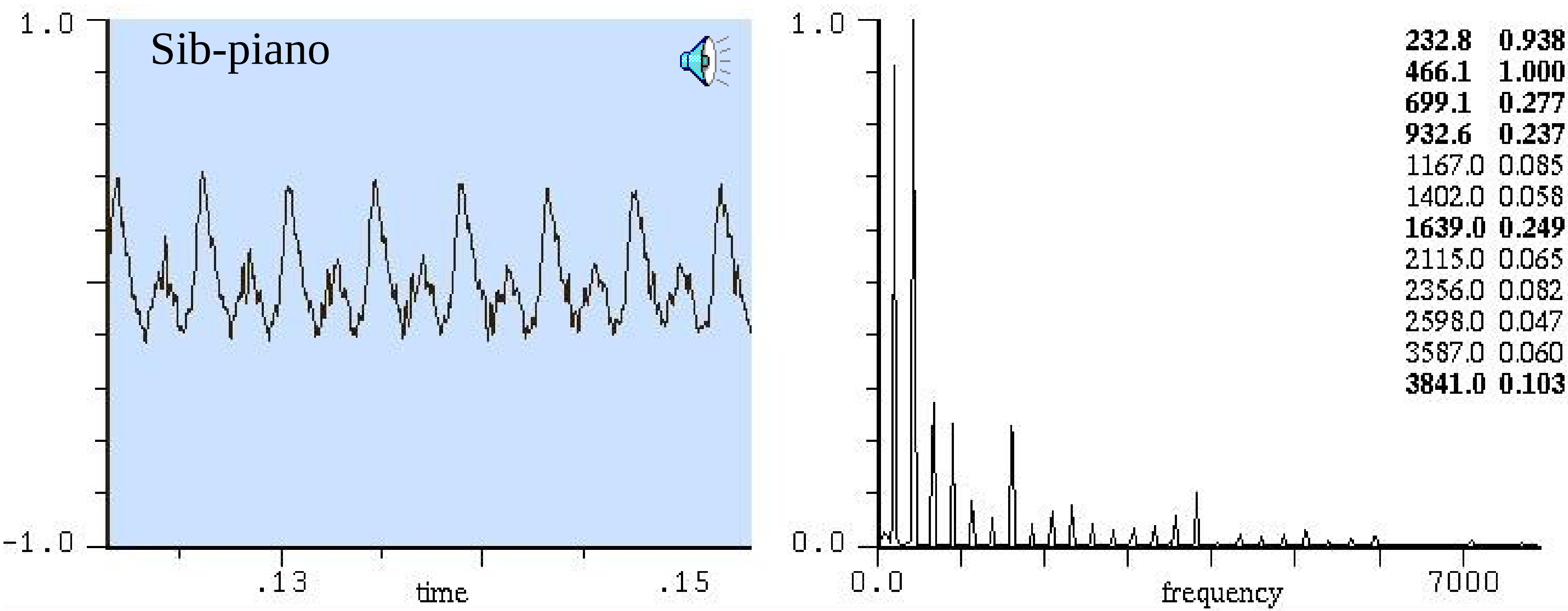


Gong
1.0
-1.0
.93
time
1.01



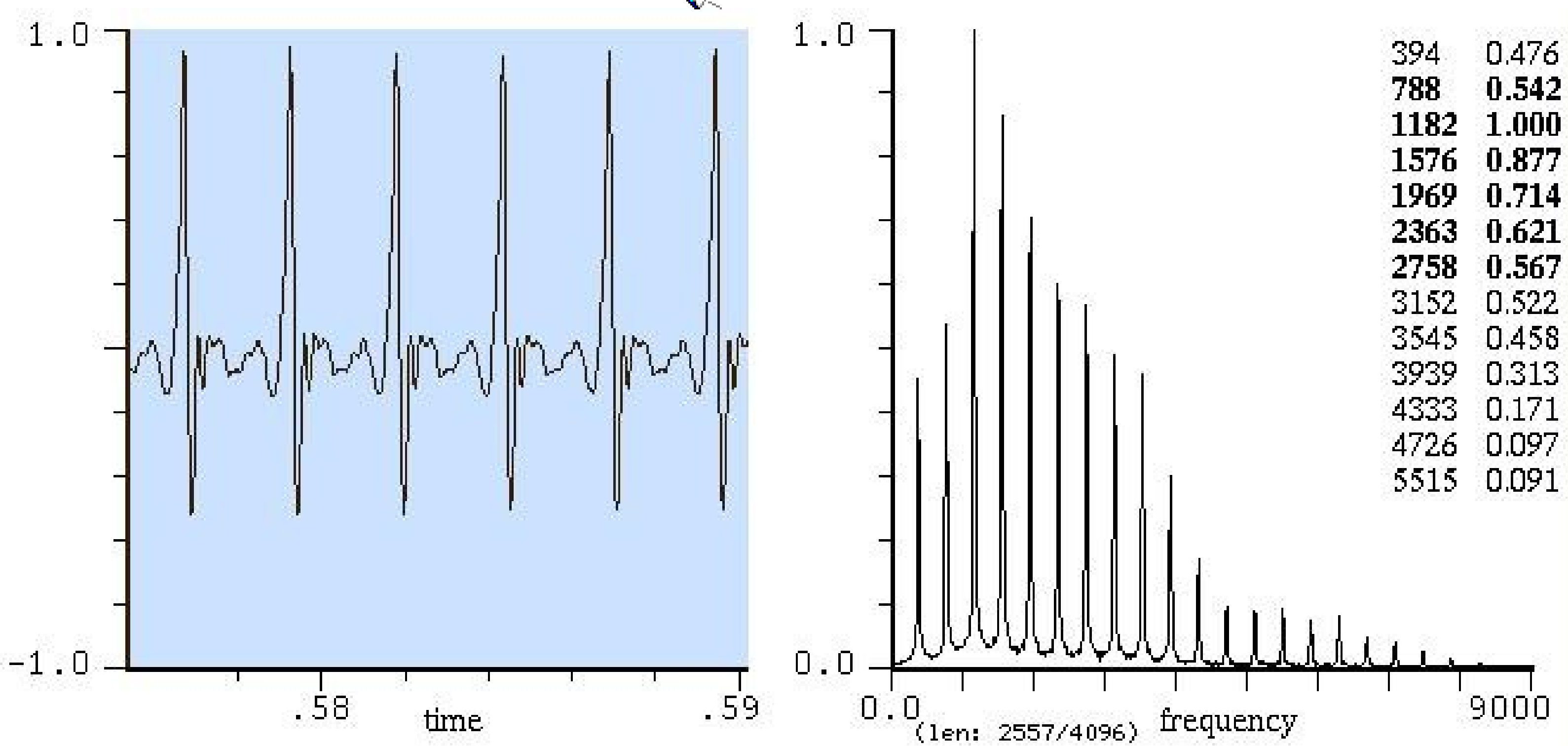
0.02
0.0
0.0
(len: 11742/16384)
frequency
2000
7.9 0.0003
46.5 0.0009
82.5 0.0314
117.3 0.0010
157.6 0.0005
209.6 0.0126
249.7 0.0002
301.7 0.0002
376.2 0.0141
605.6 0.0204
678.2 0.0002
751.9 0.0002
889.7 0.0086
1207.0 0.0008


fontana
1.0
-1.0
3.044
time
3.058
0.006
0.0
0.0
(len: 9216/16384)
frequency
20000

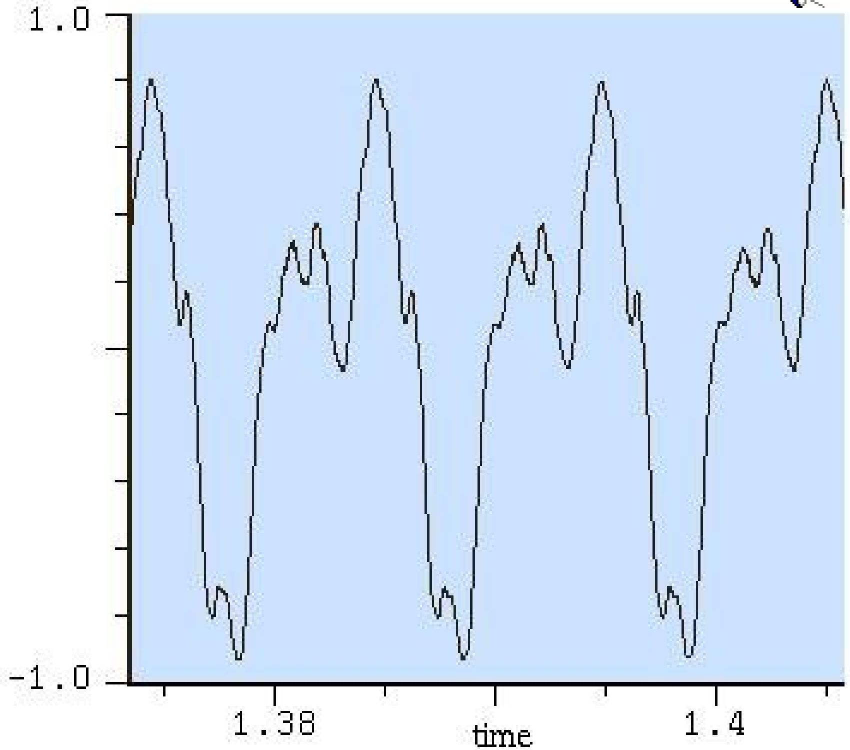


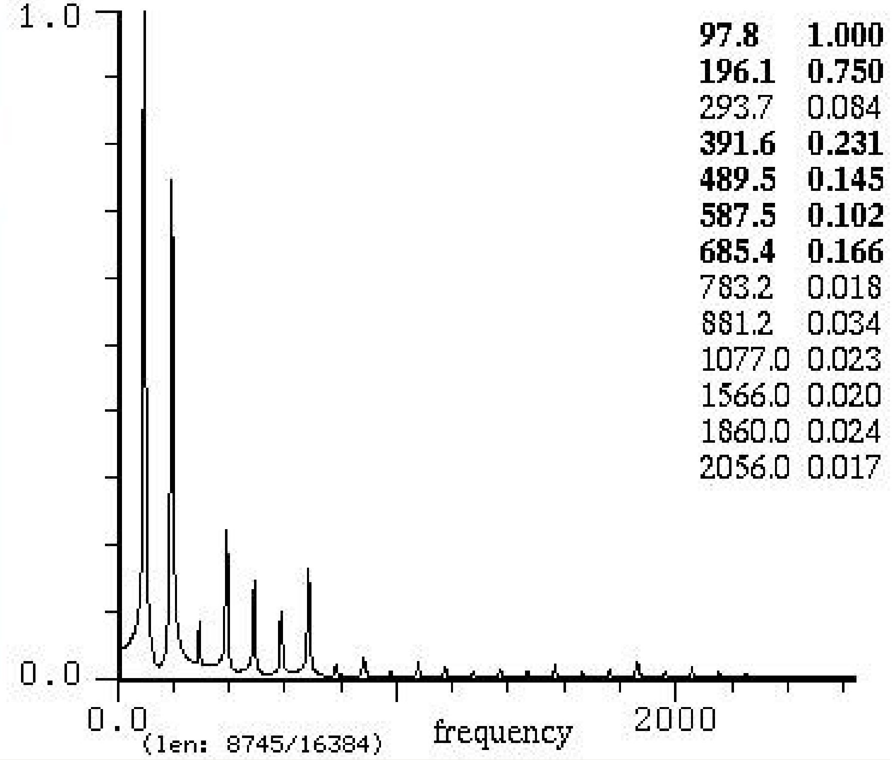
Sib-piano
1.0
-1.0
.13
time
.15
1.0
0.0
0.0
frequency
7000
232.8 0.938
466.1 1.000
699.1 0.277
932.6 0.237
1167.0 0.085
1402.0 0.058
1639.0 0.249
2115.0 0.065
2356.0 0.082
2598.0 0.047
3587.0 0.060
3841.0 0.103

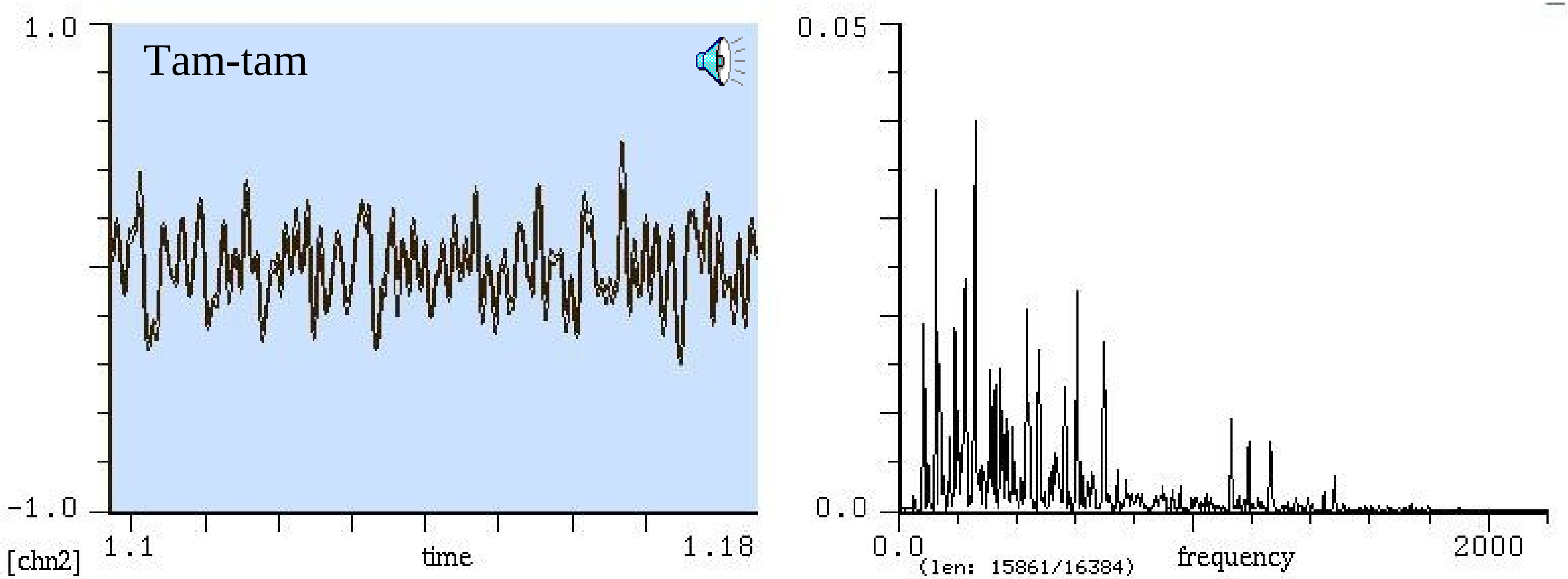
Sol-tromba


1.0
-1.0
.58
time
.59
1.0
0.0
0.0
(len: 2557/4096)
frequency
9000
394 0.476
788 0.542
1182 1.000
1576 0.877
1969 0.714
2363 0.621
2758 0.567
3152 0.522
3545 0.458
3939 0.313
4333 0.171
4726 0.097
5515 0.091

Sol-violoncello






Tam-tam
1.0
-1.0
[chn2]
1.1
time
1.18
0.05
0.0
0.0
(len: 15861/16384)
frequency
2000

Terza Parte

La Trasformata di Fourier

Trasformata di Fourier

- Trasformata di Fourier del segnale s(t) *aperiodico*:

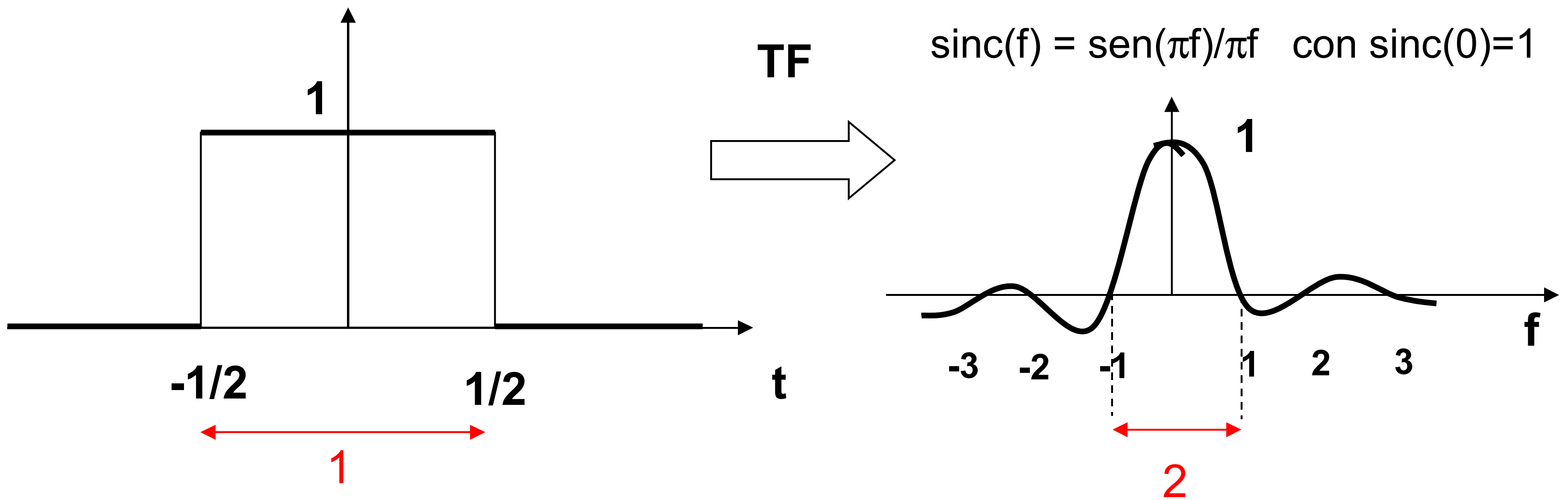
$$S(f) = TF[s(t)] = \int_{(t:-inf.\ +inf)} s(t) * \exp(-j2\pi\, ft)dt$$

- Antitrasformata di Fourier:

$$s(t) = TF^{-1}[S(f)] = \int_{(f:-inf.\ +inf)} S(f) * \exp(j2\pi\, ft)df$$

Esempio: Trasformata di Fourier di rect(t)

- La trasformata di Fourier di rect(t) è sinc(f). Simmetricamente la trasformata di sinc(t) e rect(f)



Dimostrazione

$$S(f)= \int_{(t:-inf.\ +inf)} rect(t) * exp(-j2\pi ft)dt$$

$$= \int_{(t:-1/2\ +1/2)} 1 * exp(-j2\pi ft)dt$$

$$= \int_{(t:-1/2\ +1/2)} cos(2\pi ft)\ dt - j \int_{(t:-1/2\ +1/2)} sen(2\pi ft)\ dt$$

$$= sen(2\pi ft)/2\pi f \Big|_{-1/2}^{1/2} + j\ cos(2\pi ft)/2\pi f \Big|_{-1/2}^{1/2}$$

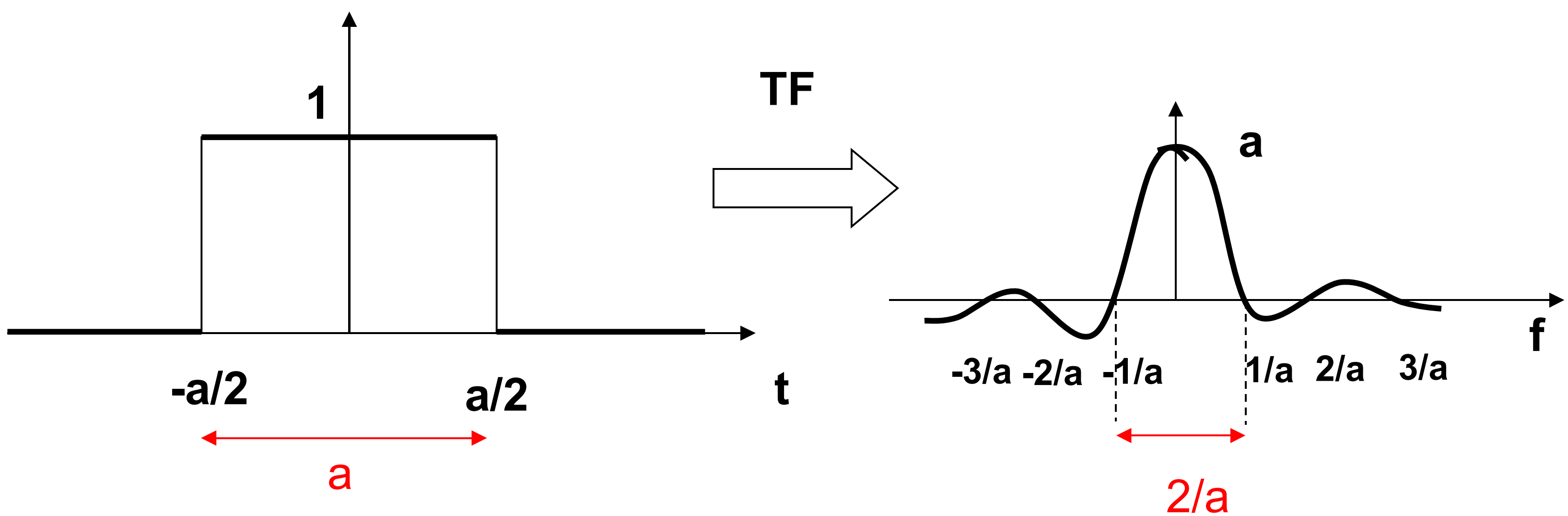
$$= sen(\pi f)/\pi f$$

Osservazione

- Cosa succede se si scala s(t)?

  s(t) → s(t/a) con a >0

  S(f) → a S(af)



rect(t/a)

a*sinc(af)

Altre proprietà della trasformata di Fourier

regola	*segnale*	*trasformata*
1. linearità	$a_1\, s_1(t) + a_2\, s_2(t)$	$a_1\, S_1(f) + a_2\, S_2(f)$
2. ribaltamento	$s(-t)$	$S(-f)$
3. coniugio	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
4. traslazione nel tempo	$s(t - t_0)$	$S(f)\, e^{-i2\pi f t_0}$
5. traslazione in frequenza	$s(t)\, e^{i2\pi f_0 t}$	$S(f - f_0)$
6. convoluzione nel tempo	$x * y(t)$	$X(f)\, Y(f)$
7. prodotto	$x(t)\, y(t)$	$X * Y(f)$

Esercizio

- Si voglia calcolare la TF del segnale

$x(t)= s(t) * \cos(2\pi f_0 t)$

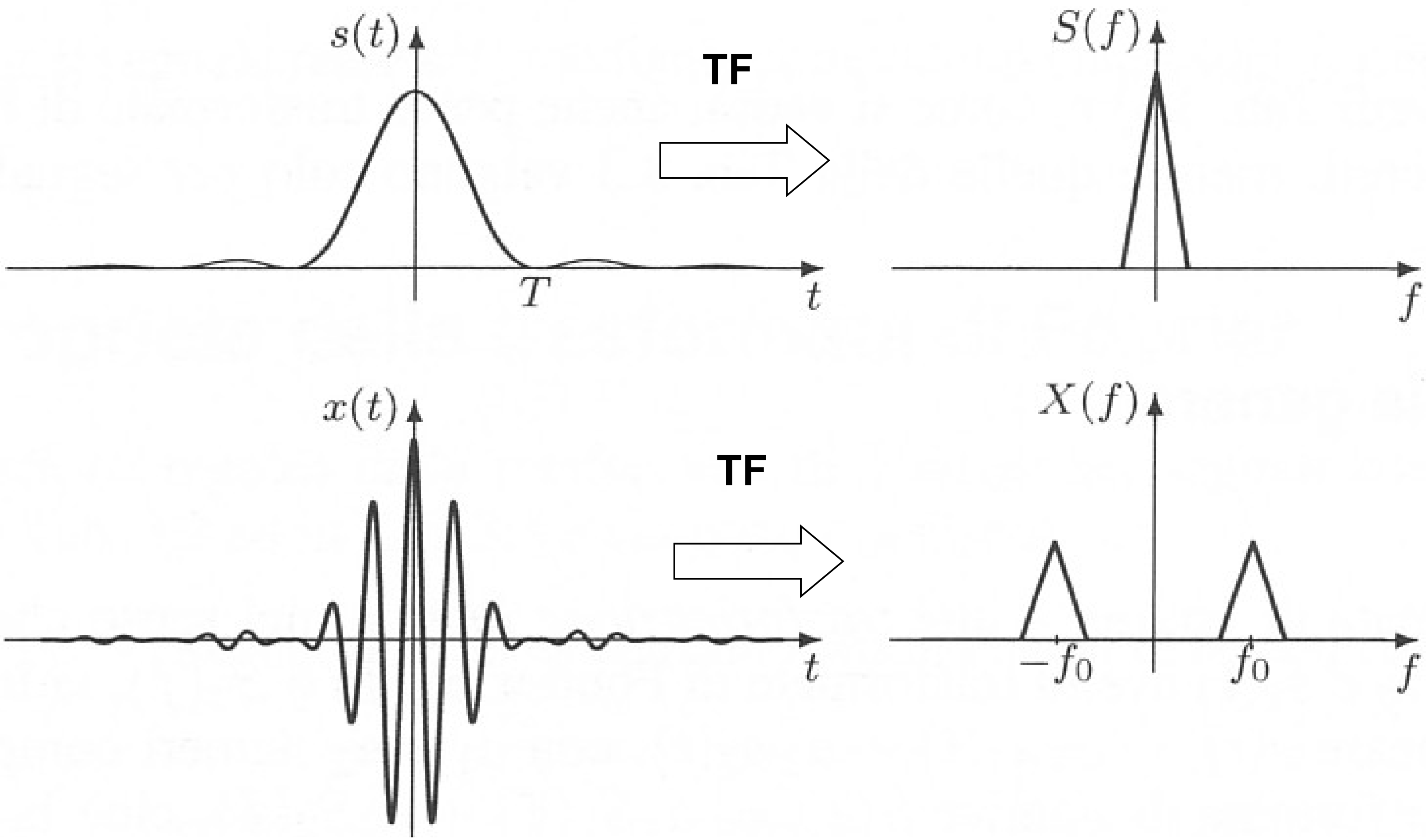
- Usano le relazioni di Eulero si ha:

$x(t)= ½\, s(t) \exp(j2\pi f_0 t) + ½\, s(t) \exp(-j2\pi f_0 t)$

- In virtù della linearità e della regola di traslazione in frequenza si ha

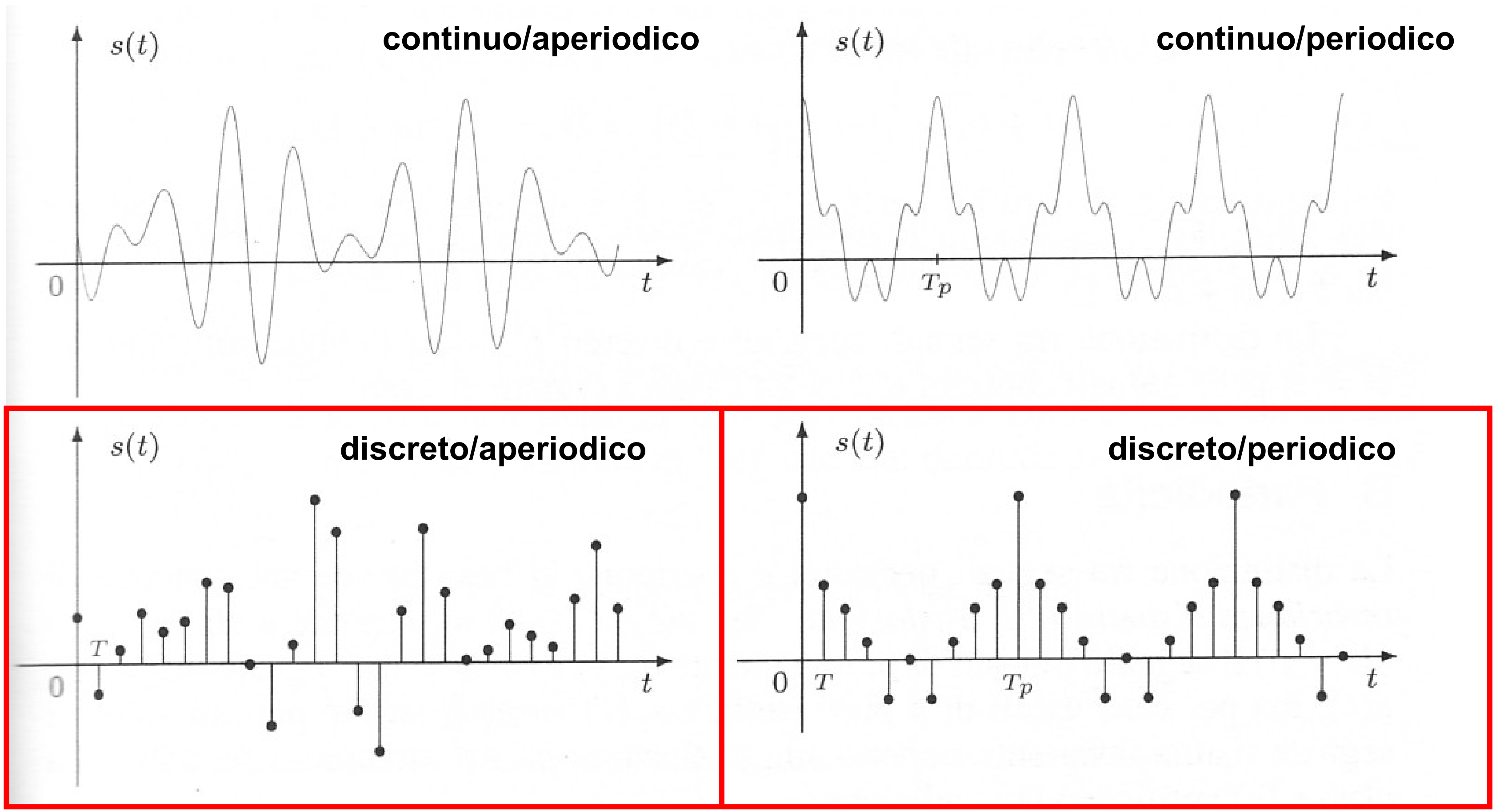
$$\boxed{X(f) = \tfrac{1}{2} S(f-f_0) + \tfrac{1}{2} S(f+f_0)}$$

L'esempio mostra una operazione di *modulazione*



$$x(t) = s(t) * \cos(2\pi f_0 t)$$

Segnali discreti

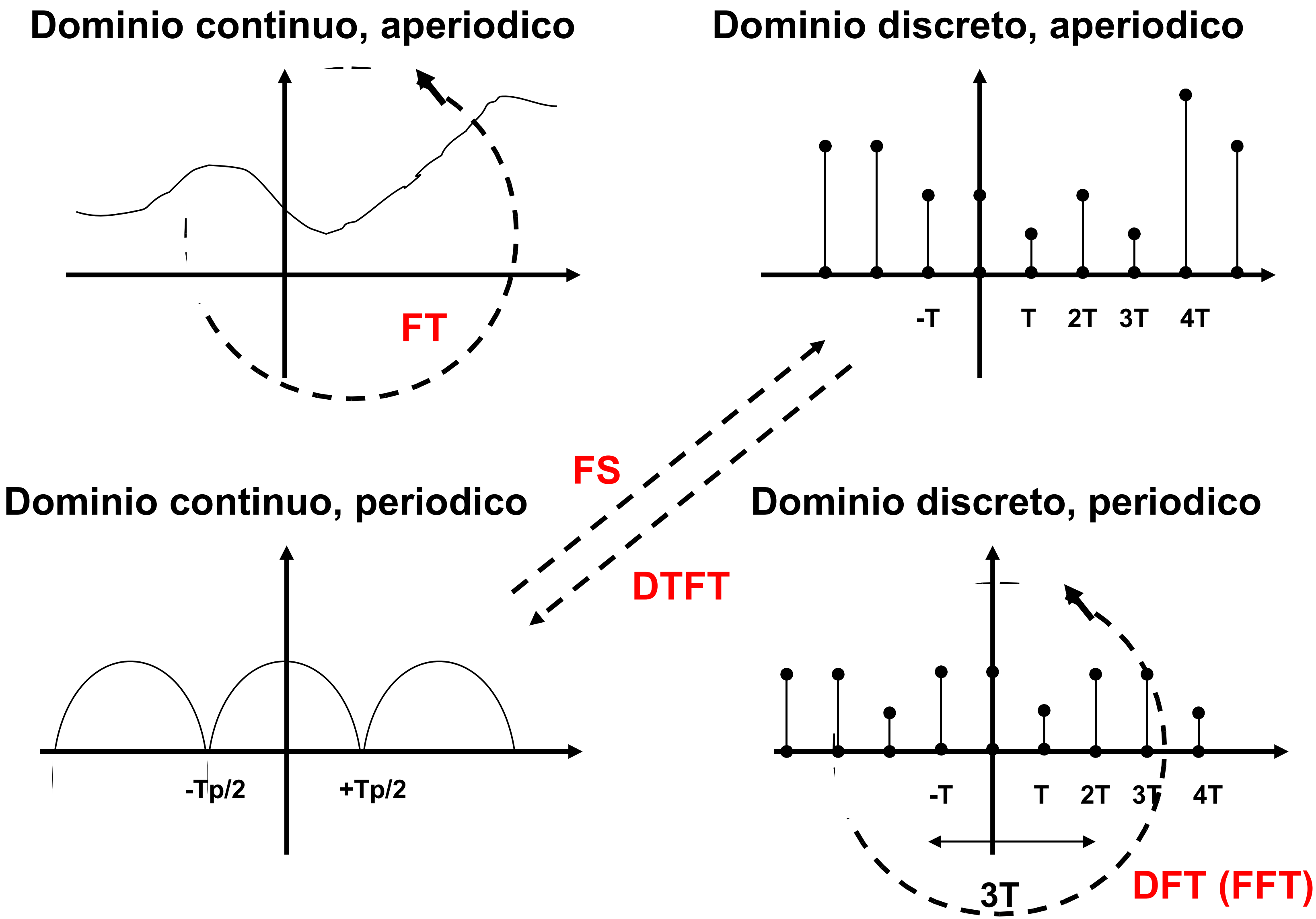


Tutte le Trasformate

- Forma delle trasformate:
  - $S(f) = \int_{(t:-inf. +inf)} s(t) * \exp(-j2\pi ft)dt$ (*FT*)
  - $S_n = 1/Tp \int_{(t: 0; Tp)} s(t) \exp(-j2\pi nFt)\, dt$ (*FS*)
  - $S(f) = \Sigma_{(n:-inf; +inf)} T\, s(nT) \exp(-j2\pi f\, nT)$ (*DTFT*)
  - $S(kF) = \Sigma_{(n:0;N-1)} T\, s(nT) \exp(-j2\pi kF\, nT)$ (*DFT*)

Tutte le Antitrasformate

- Forma delle antitrasformate
  - $s(t) = \int_{(f:-inf.\ +inf)} S(f) *exp(j2\pi ft)df$ $\qquad (FT^{-1})$
  - $s(t) = \sum_{(n:\ -inf;\ +inf)} S_n \exp(j2\pi nFt)$ $\qquad (FS^{-1})$
  - $s(nT)= \int_{(f:f0;\ f0+Fp)} S(f) \exp(j2\pi f\ nT)\ df$ $\qquad (DTFT^{-1})$
  - $s(nT)= \sum_{(k:0;N-1)} F\ S(kF) \exp(j2\pi kF\ nT)$ $\qquad (DFT^{-1})$


Dominio continuo, aperiodico
Dominio discreto, aperiodico
FT
-T
T
2T
3T
4T
FS
DTFT
Dominio continuo, periodico
Dominio discreto, periodico
-Tp/2
+Tp/2
-T
T
2T
3T
4T
3T
DFT (FFT)

- La trasformata di Fourier (FT) di un segnale a tempo continuo, aperiodico è un segnale a frequenza continua e aperiodico

- La serie di Fourier (FS) di un segnale a tempo continuo, periodico è un segnale a frequenza discreta e aperiodico

- La trasformata (DTFT: Discrete Time FT) di un segnale a tempo discreto, aperiodico è un segnale a frequenza continua e periodico

- La trasformata (DFT: Discrete FT) di un segnale a tempo discreto, periodico è un segnale a frequenza discreta e periodico

Discrete Fourier Transform (DFT)

- La trasformata di Fourier di un segnale *discreto* s(nT) *periodico* di periodo $T_p = NT$ è data da

$$S(kF) = \sum_{(n:0;N-1)} T\, s(nT) \exp(-j2\pi kF\, nT)$$
$$= \sum_{(n:0;N-1)} T\, s(nT) \exp(-j2\pi kn/N)$$

la trasformata è *discreta* e *periodica* di periodo $F_p = NF = 1/T$ con $F = 1/T_p$

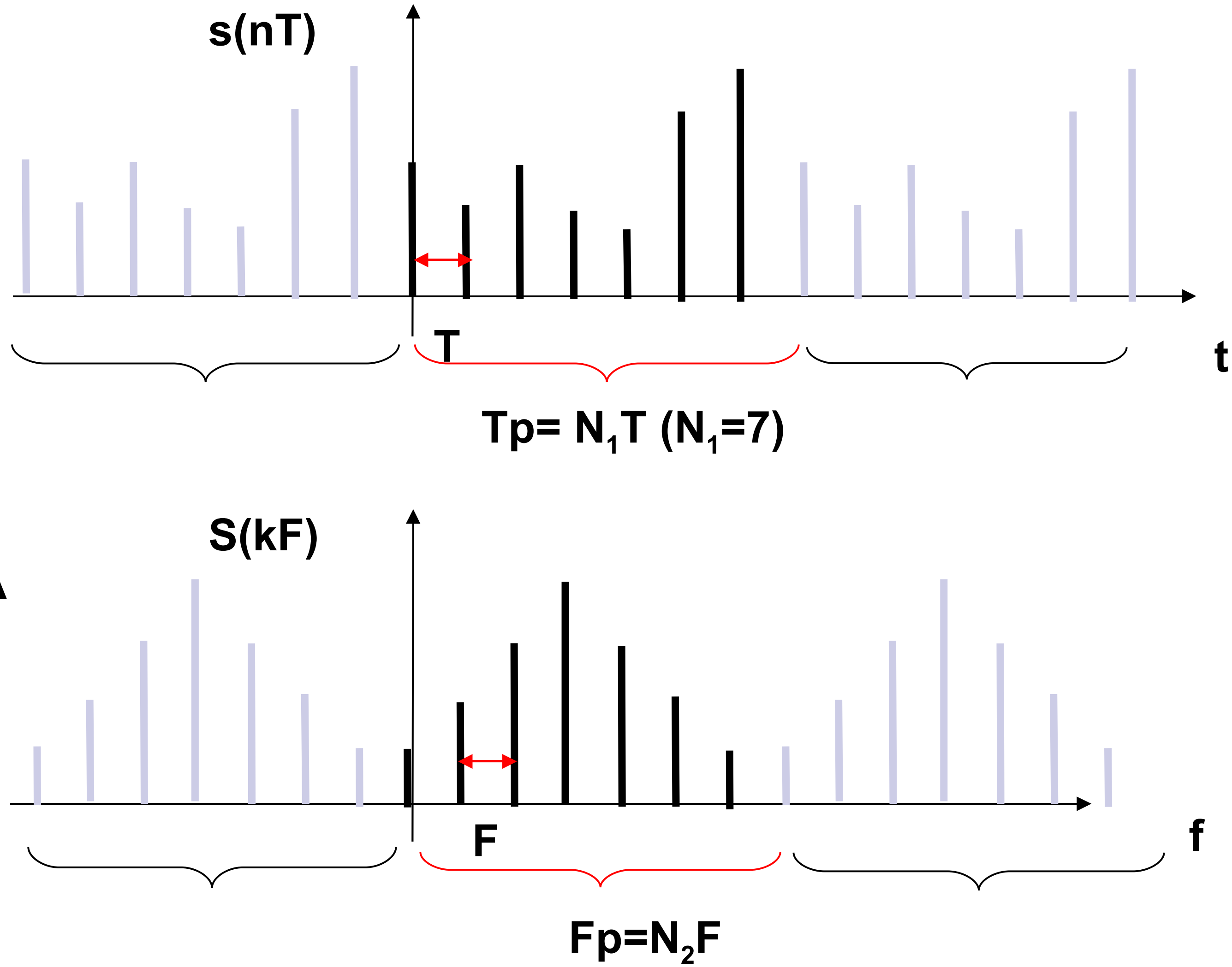
Antitrasformata (DFT^{-1})

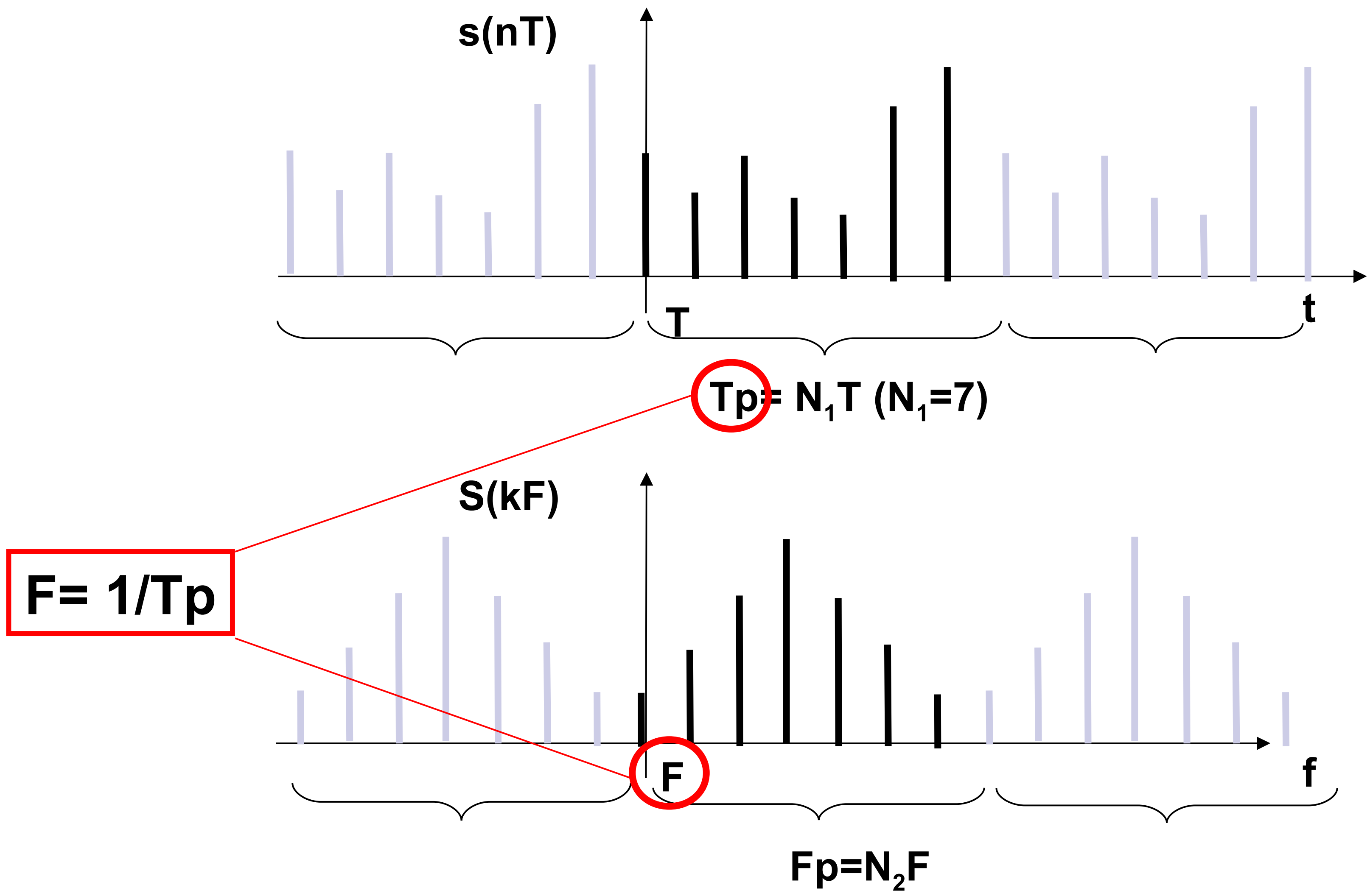
- Dalla trasformata di Fourier S(kF) si può ricostruire il segnale discreto s(nT) mediante la seguente antitrasformata di Fourier (DFT^{-1})

$$s(nT) = \Sigma_{(k:0;N-1)} F\, S(kF) \exp(j2\pi kF\, nT)$$
$$= \Sigma_{(k:0;N-1)} F\, S(kF) \exp(j2\pi kn/N)$$

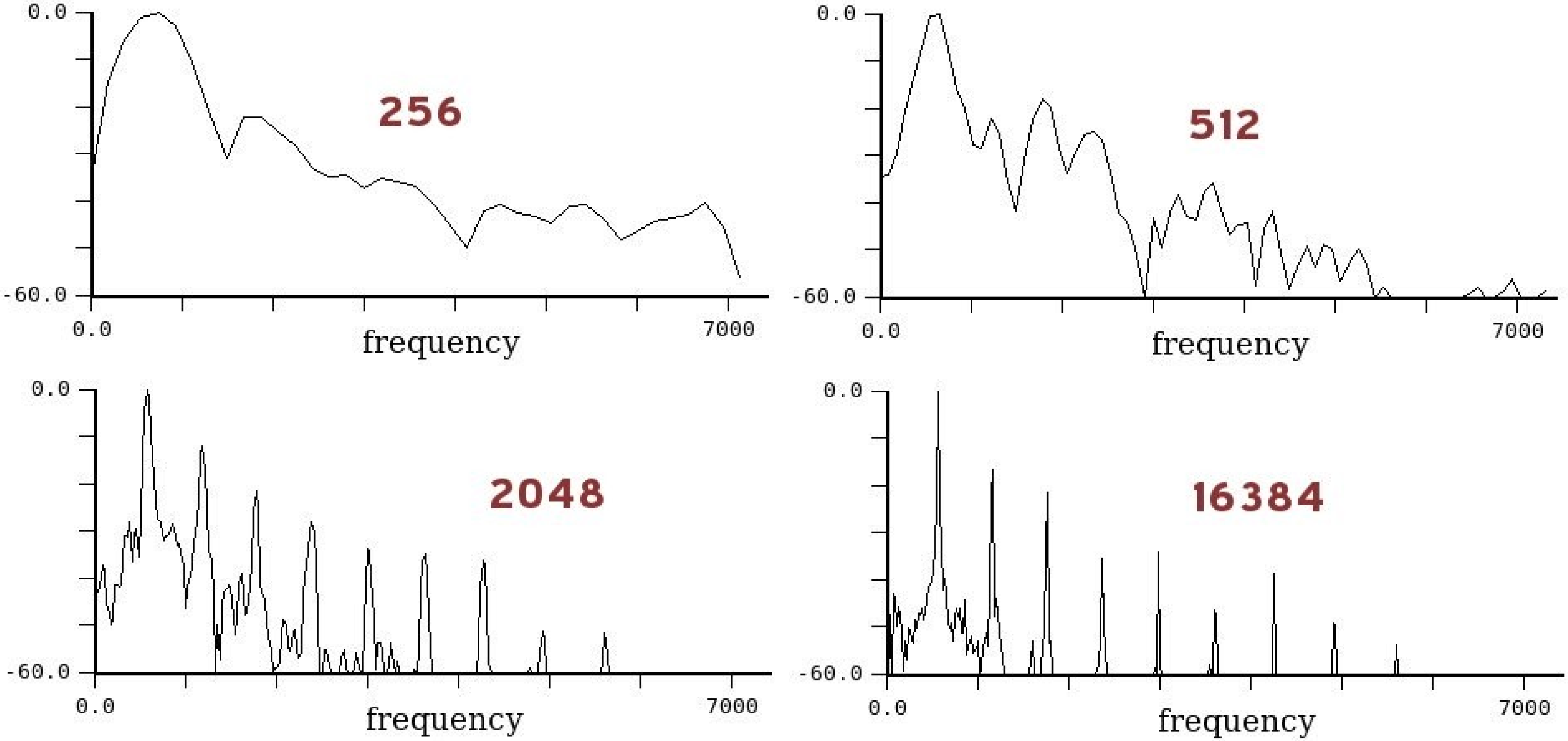
TEMPO

FREQUENZA (DFT)

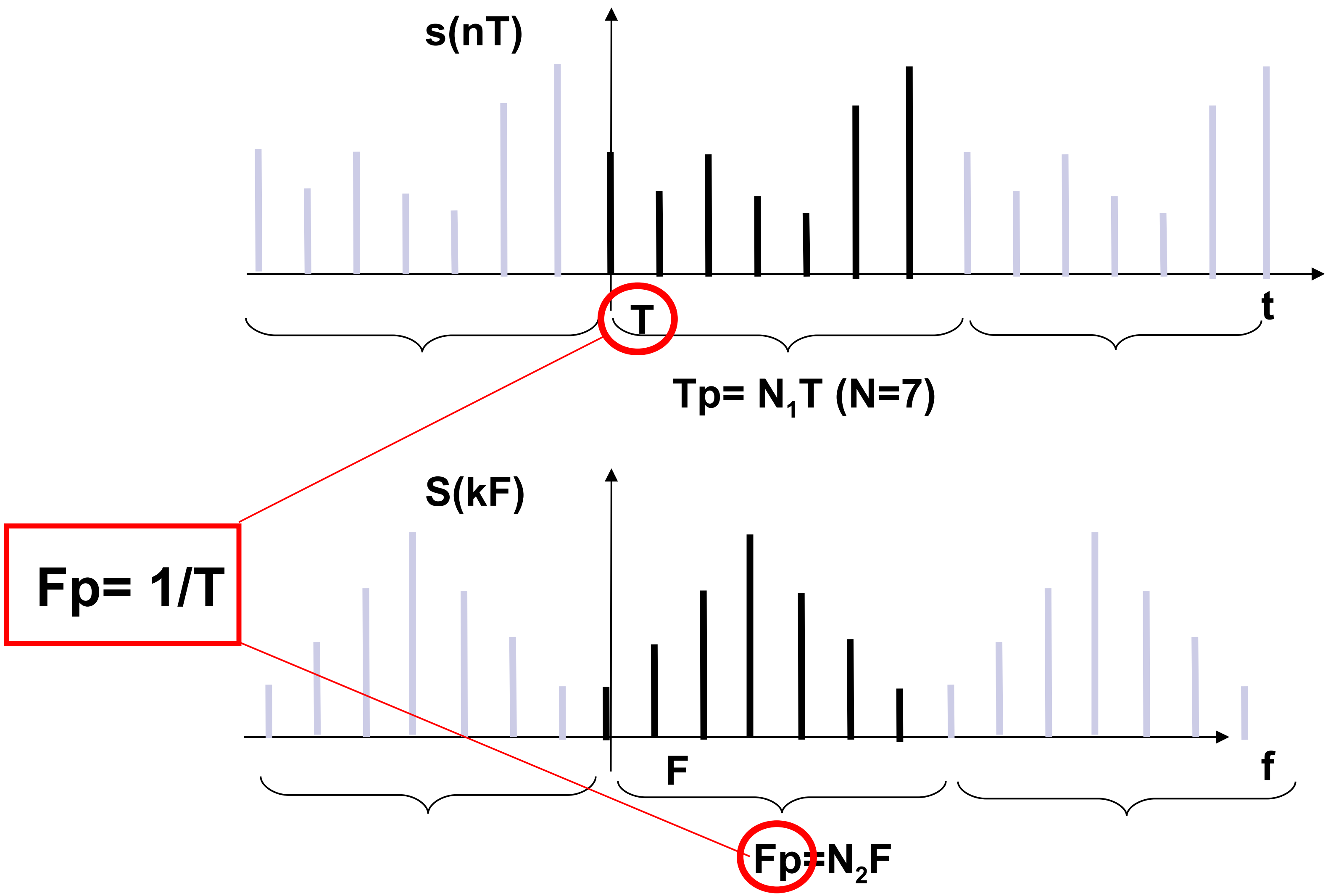



s(nT)
T
t
Tp= N1T (N1=7)
S(kF)
F= 1/Tp
F
f
Fp=N2F

Variazione della risoluzione in frequenza (F) al variare del numero N di campioni nel tempo



Nota di pianoforte: Re4


s(nT)
T
t
Tp= N$_1$T (N=7)
S(kF)
Fp= 1/T
F
f
Fp=N$_2$F

Riassumendo

- Il numero di campioni di s(nT) considerati (e quindi il periodo Tp del segnale) determina la risoluzione (F) dell'analisi in frequenza

- Il periodo di campionamento (T) determina l'ampiezza (Fp) della banda di frequenze analizzata

- Per Nyquist:

$fc = 2B = 2Fp$ quindi $T = 1/fc = 1/2Fp$

$Fp * T = ½$

$N_2 F * T = 1/2$ ma $F = 1/Tp$

$N_2 / Tp * T = 1/2$ ma $Tp = N_1 T$

$N2/N1 = 1/2$

Fast Fourier Transform (FFT)

- Per la DFT è stato sviluppato un algoritmo veloce, chiamato FFT (Fast Fourier Transform), che calcola la trasformata in un tempo $O(N\log N)$ anziché $O(N^2)$

Limitazioni della Trasformata di Fourier e STFT

Limitazioni della Trasformata di Fourier

- *Problema*: la Trasformata di Fourier identifica le componenti armoniche ma non permette di ricavare facilmente informazioni su *quando* e *come* tali frequenze siano effettivamente presenti

- Infatti la definizione di FT:

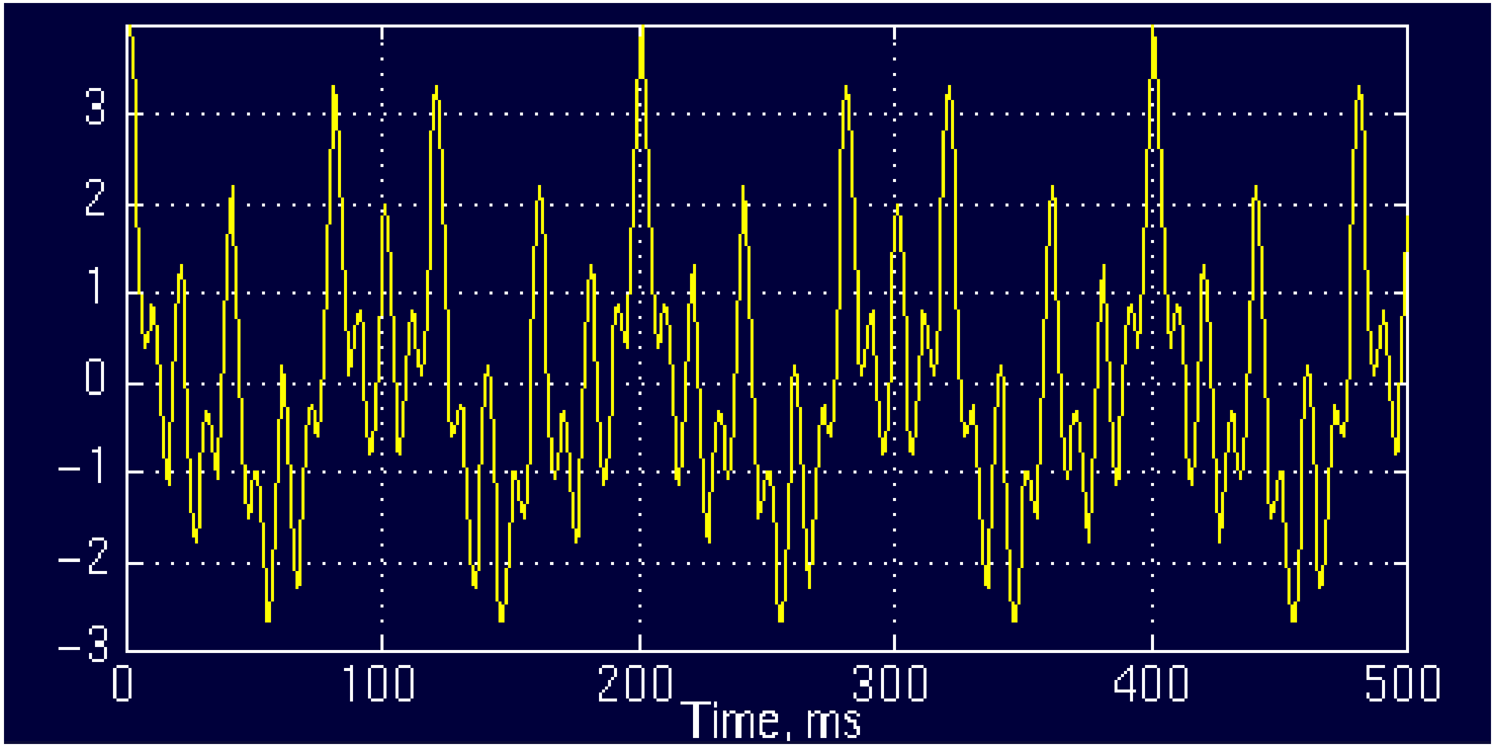
$$S(f) = \int_{(t:-\text{inf.}\ +\text{inf})} s(t) * \exp(-j2\pi f t)dt$$

è perfettamente <u>locale</u> in frequenza e <u>globale</u> nel tempo

- Questa trasformazione è adatta a *segnali stazionari*

Esempio

- **s(t)=cos(2π*10*t) + cos(2π*25*t) + cos(2π*50*t) +cos(2π*100*t)**



Esempio cont..

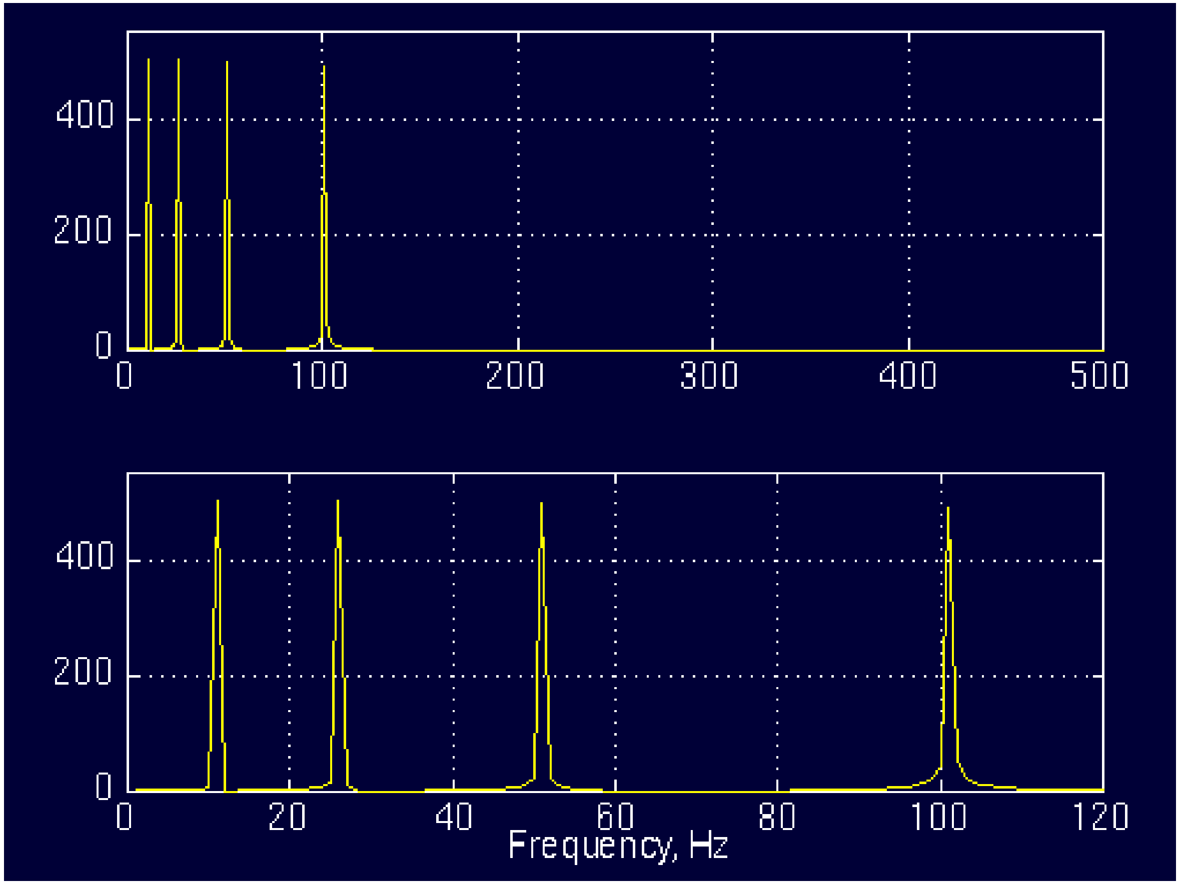
- Spettro di Fourier:

  f1= 10 Hz

  f2= 25 Hz

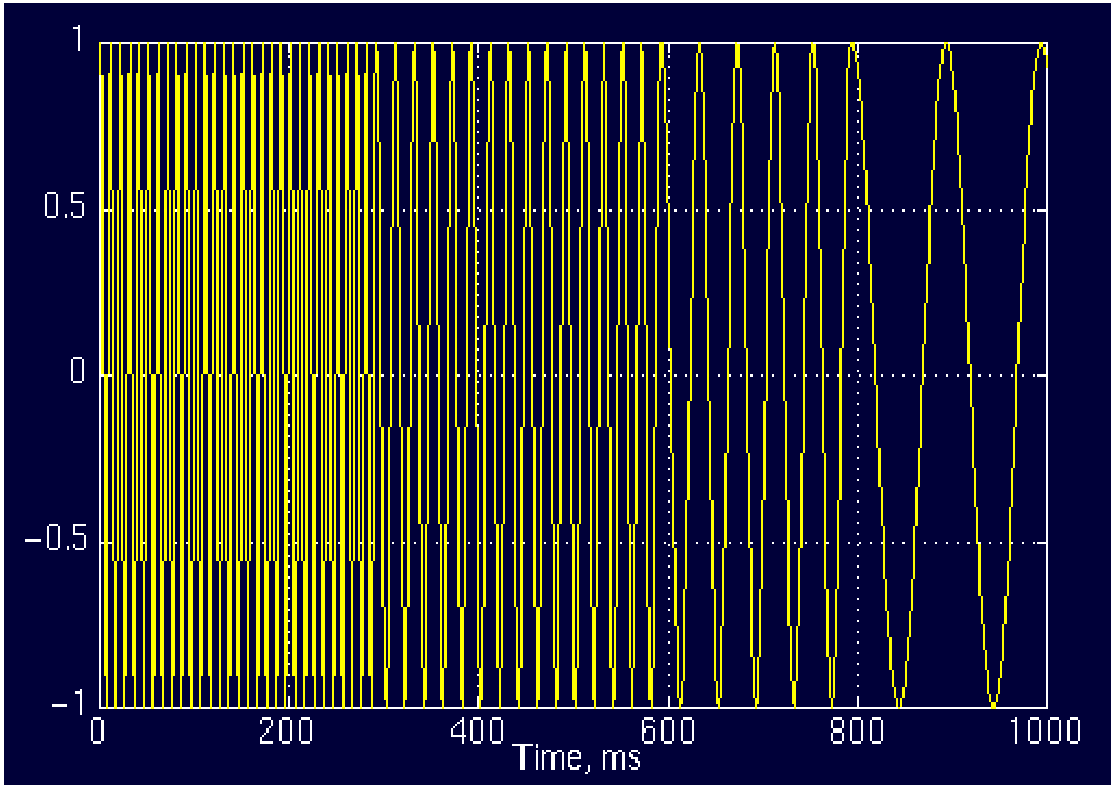
  f3= 50 Hz

  f4= 100 Hz



Continua …

- Segnale *non stazionario*: si utilizzano le stesse frequenze 100, 50, 25, 10 Hz in intervalli di tempo diversi



Esempio cont…

- **Spettro di Fourier**

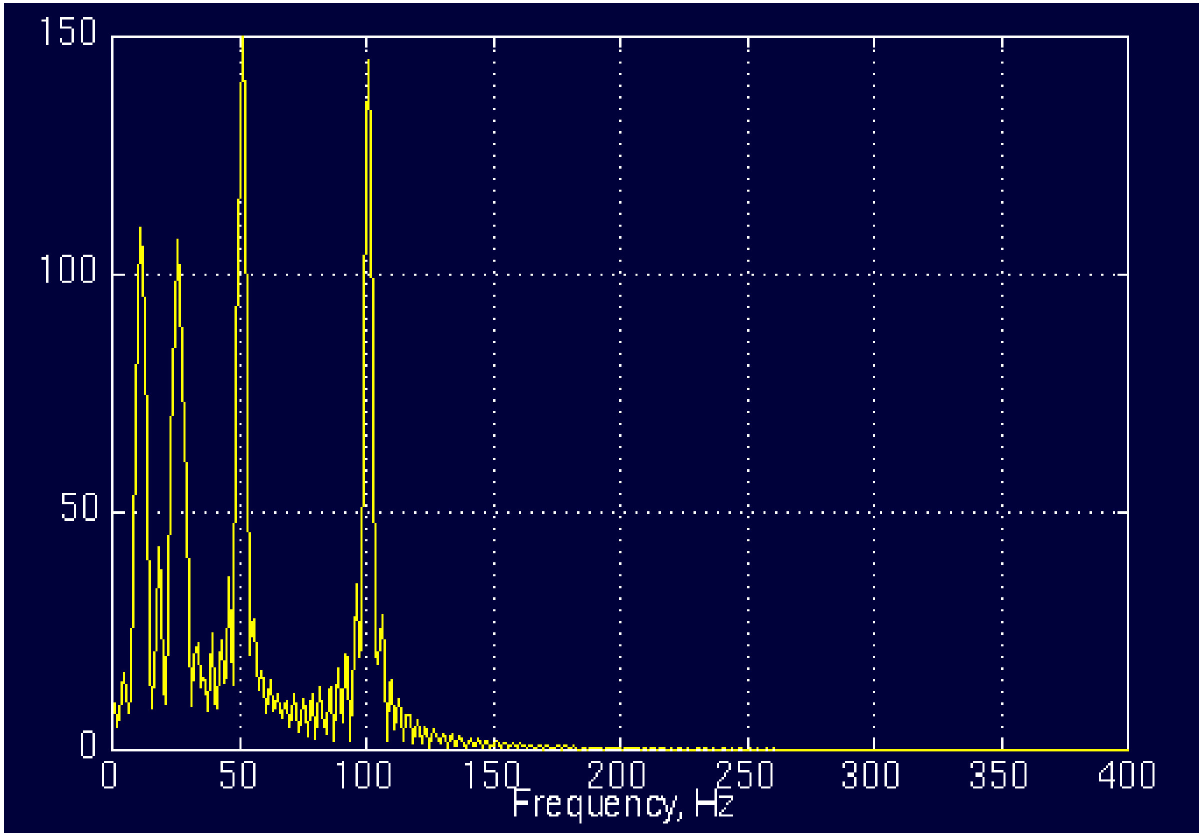
f1= 10 Hz

f2= 25 Hz

f3= 50 Hz

f4= 100 Hz

?



Osservazione

- E’ necessario poter eseguire una analisi congiunta tempo-frequenza. Intuitivamente questo significa selezionare segmenti del segnale sufficientemente corti da poter essere considerati stazionari e fare la trasformata relativamente a tali segmenti

- Una sequenza di questi spettri a breve termine costituisce la STFT (Short Time Fourier Transform)

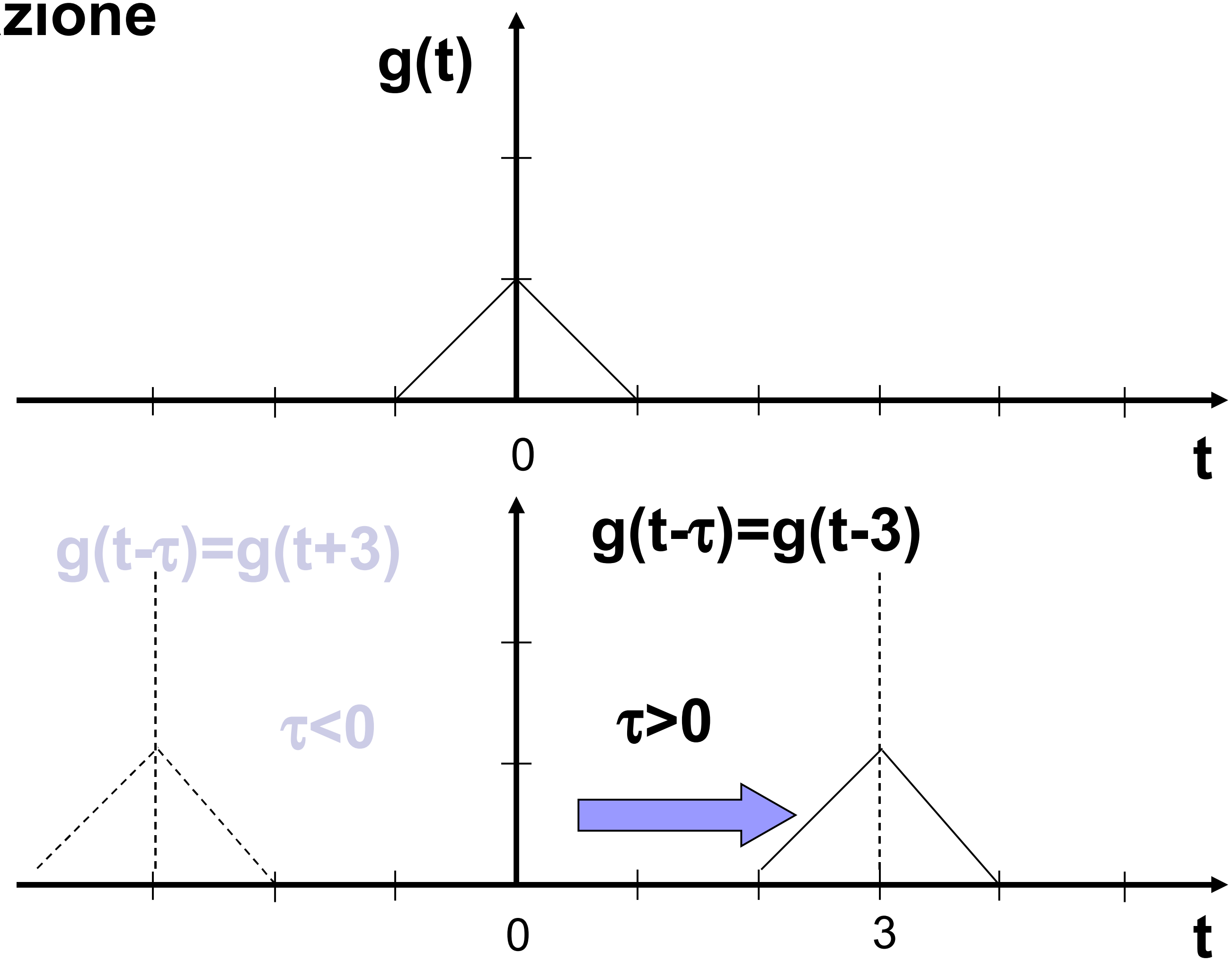
La Short Time Fourier Transform (STFT)

- Per i segnali non stazionari occorre inserire nella trasformazione una dipendenza dal tempo. Si definisce allora la STFT come:

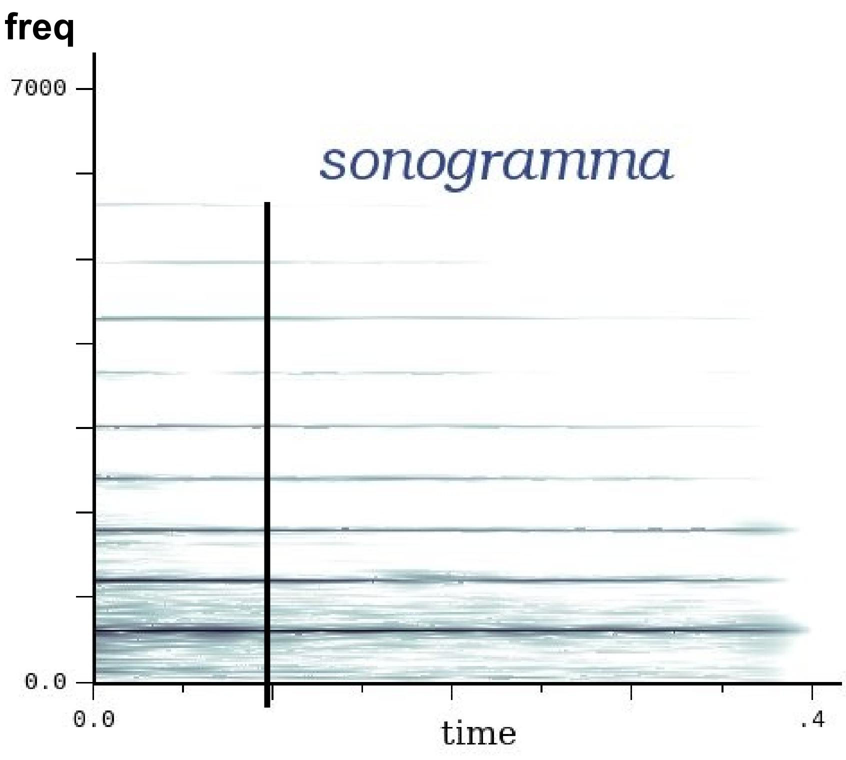
$$\boxed{S(\tau, f) = \int_{(t:-\text{inf.}\ +\text{inf})} \boxed{s(t) * g(t-\tau)} \exp(-j2\pi ft)dt}$$

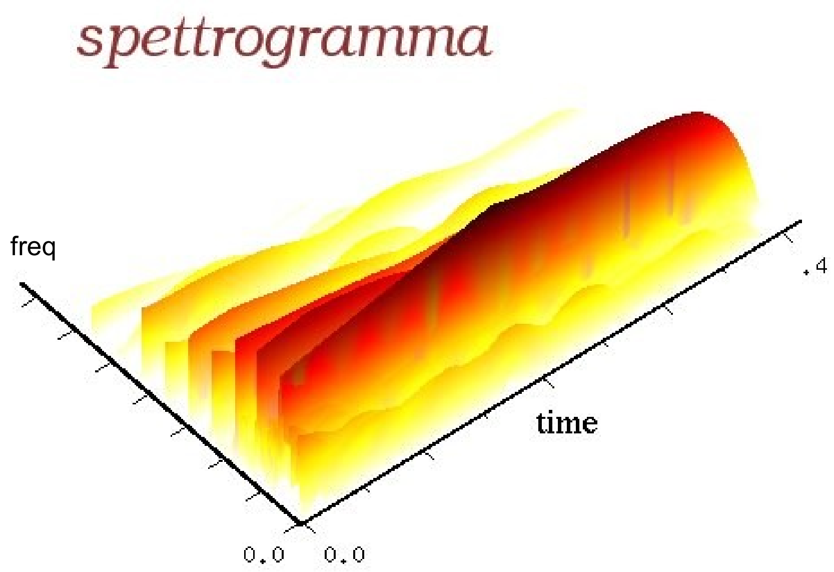
dove g( ), detta *finestra di analisi,* ha estensione finita ed è centrata in τ . Quindi τ identifica l'istante di tempo attorno al quale si calcola in contenuto armonico

Traslazione



Rappresentazione della STFT: sonogramma



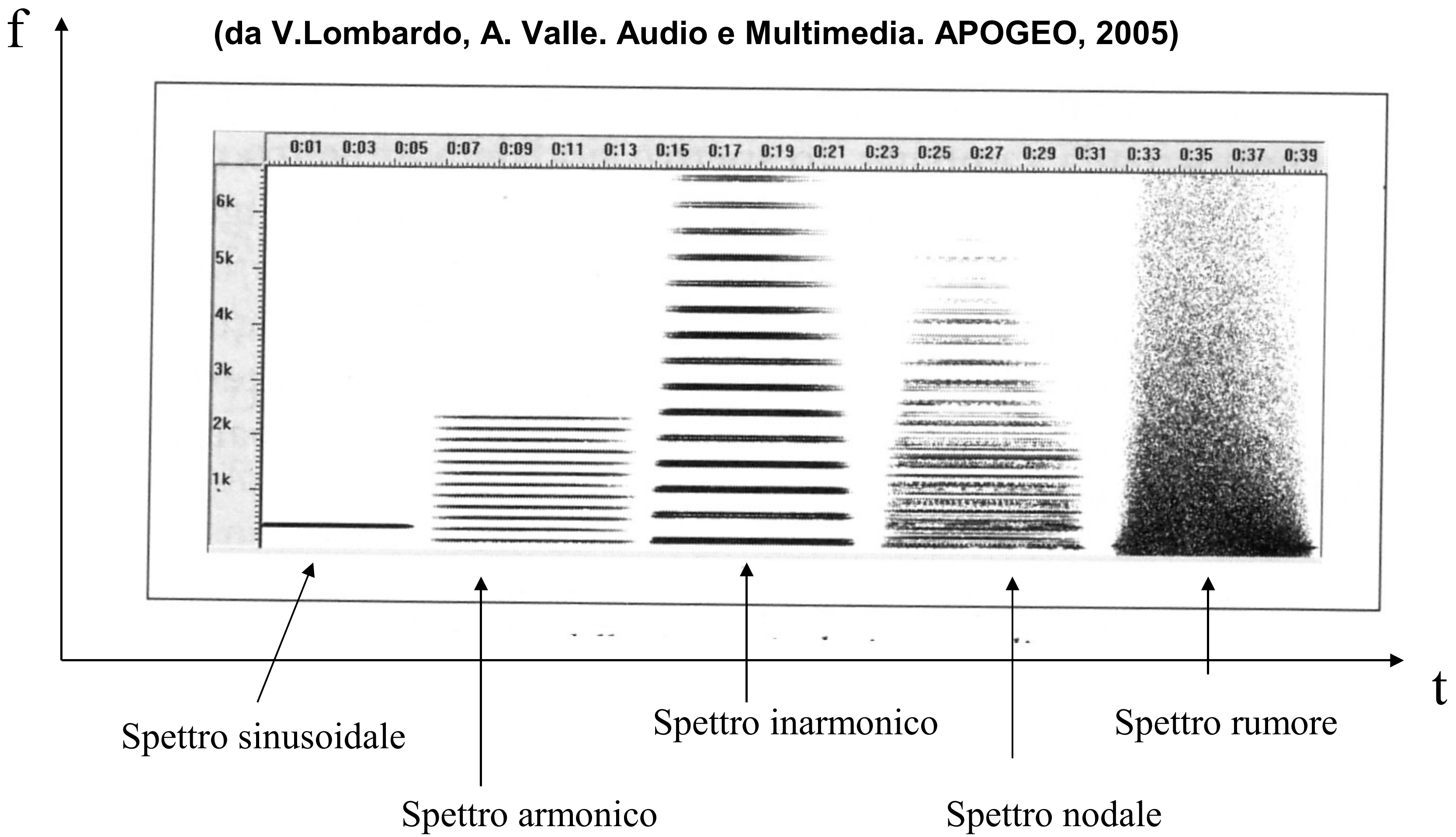


Sonogramma

- Un *sonogramma* è una rappresentazione grafica che mostra lo spettro di un suono e la sua variazione nel tempo. In questo tipo di rappresentazione, l'asse orizzontale rappresenta il tempo t, l'asse verticale le frequenze f delle componenti sinusoidali che costituiscono il suono. L'intensità I delle componenti frequenziali che formano lo spettro del suono è indicata tipicamente da un colore (es. nero), più o meno marcato a seconda che l'intensità sia maggiore o minore.

Sonogrammi delle cinque tipologie spettrali di base

(da V.Lombardo, A. Valle. Audio e Multimedia. APOGEO, 2005)



Finestra di analisi

- La finestra ha la funzione di limitare, troncandola in modo più o meno brusco, la porzione di segnale sotto analisi

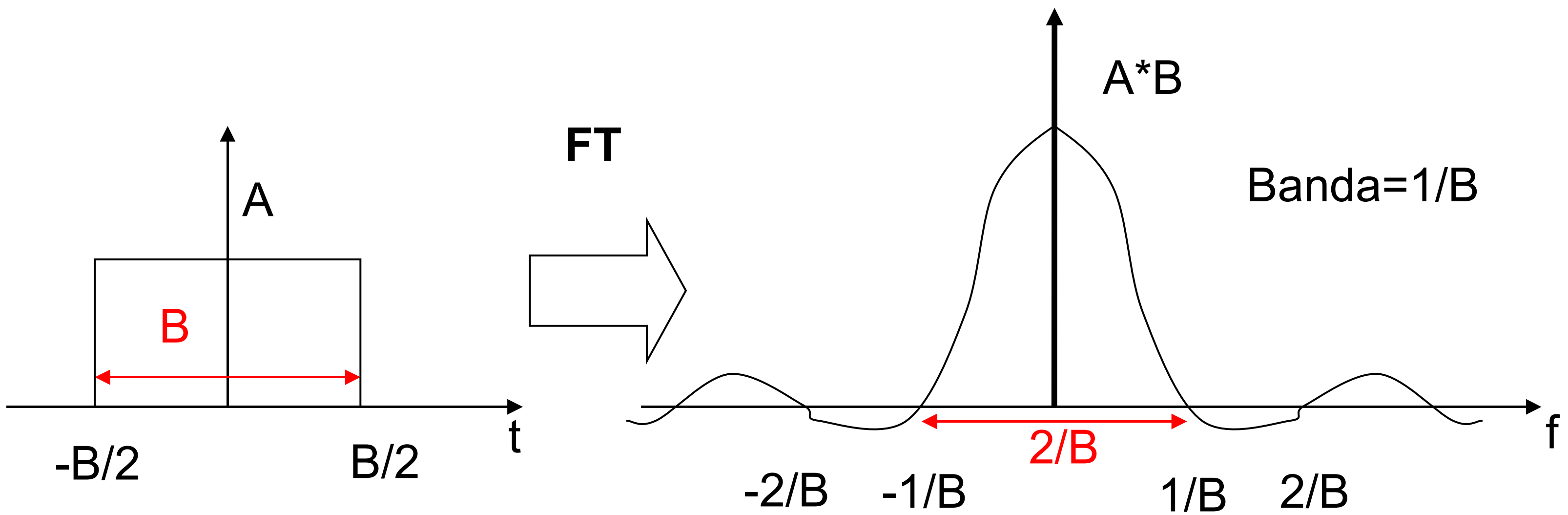
- La $S(\tau, f)$ può essere interpretata come una trasformata che scorre sul segnale (in effetti è la finestra che scorre sul segnale)

Esempio

- Abbiamo visto che la trasformata di un segnale sinusoidale s(t) di frequenza f_0 finestrato con g() è la trasformata della finestra traslata del valore f_0 cioè $G(f\text{-}f_0)$

- La più semplice finestra è la finestra rettangolare Arect (t/B) che ha come trasformata la funzione A*Bsinc(B*f)

Esempio: Finestra rettangolare



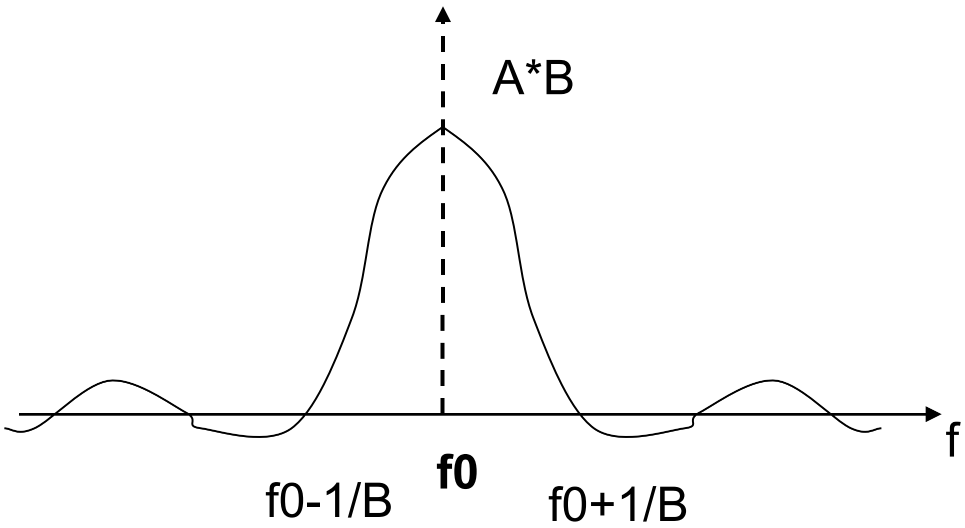
g(t)= A rect(t/B)

G(f)= A*B sinc(Bf)

- Segnale sinusoidale: $s(t)= \cos(2\pi f_0 t)$
- Segnale sinusoidale finestrato con g(t):

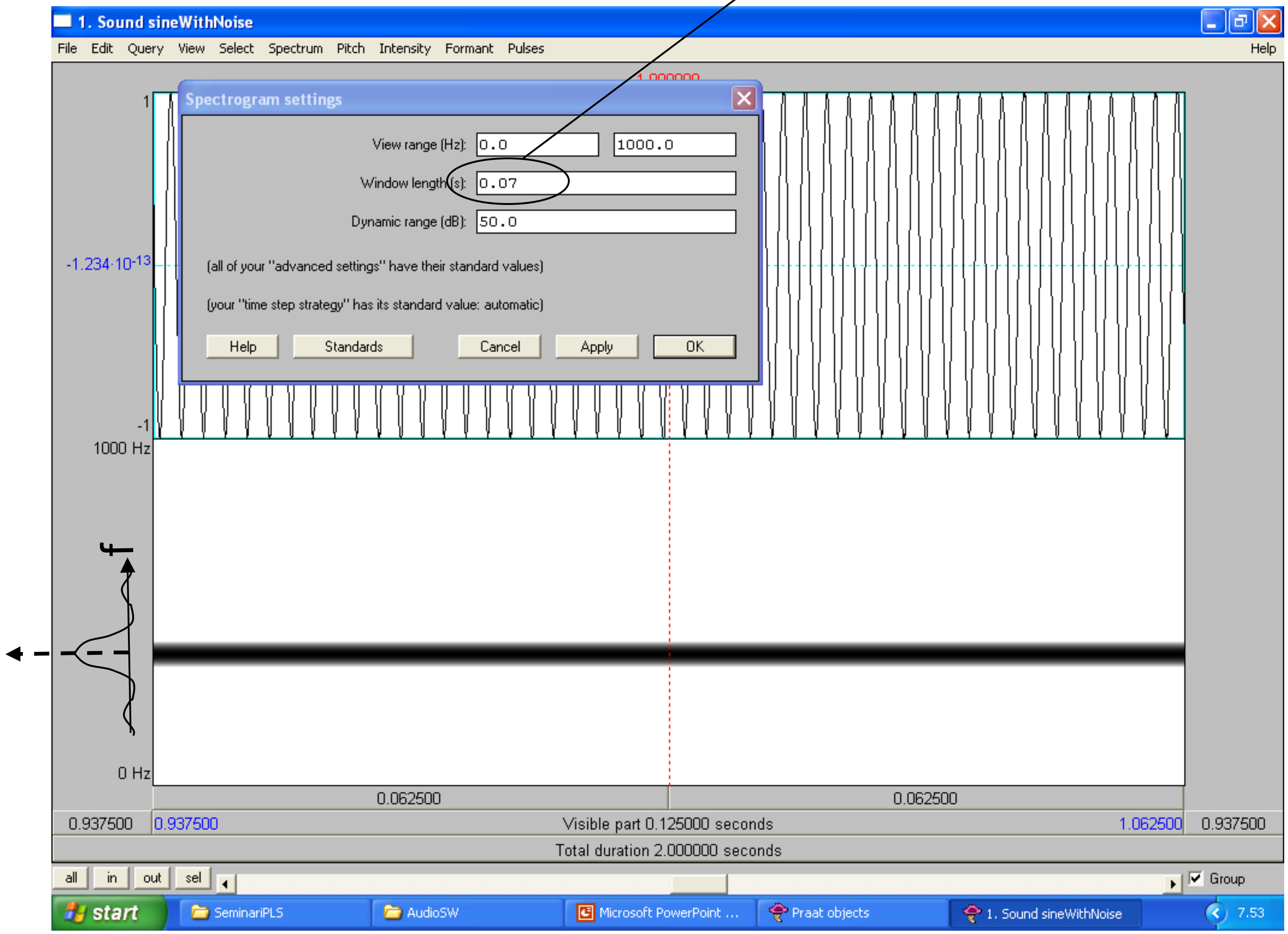
$$x(t) = s(t) * g(t) = \cos(2\pi f_0 t) * A\ \mathrm{rect}(t/B)$$

- Trasformata X(f) :

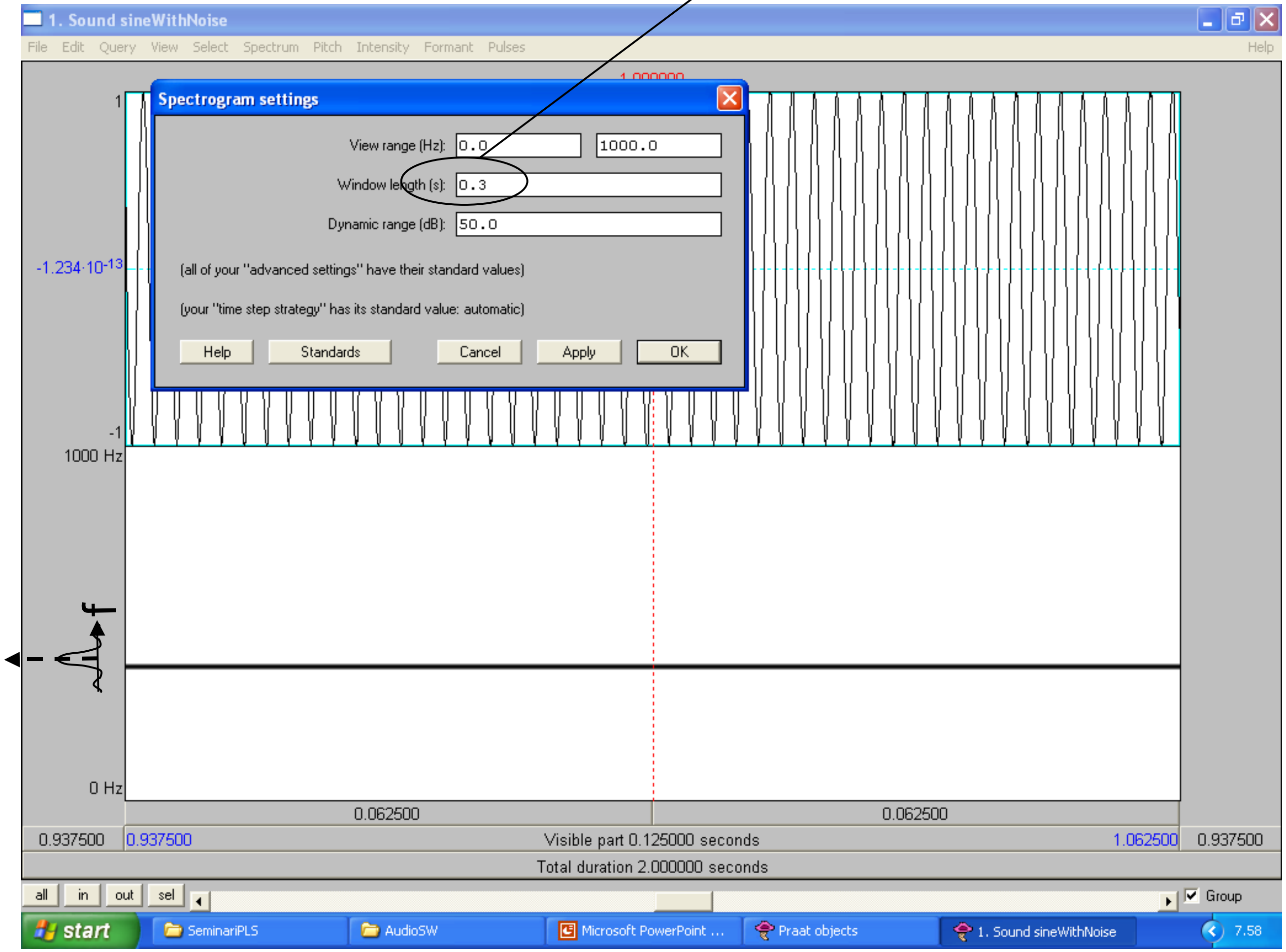


NOTA: se B è un valore piccolo 1/B è grande e viceversa. Non si può avere una risoluzione elevata contemporaneamente nel tempo e in frequenza!!

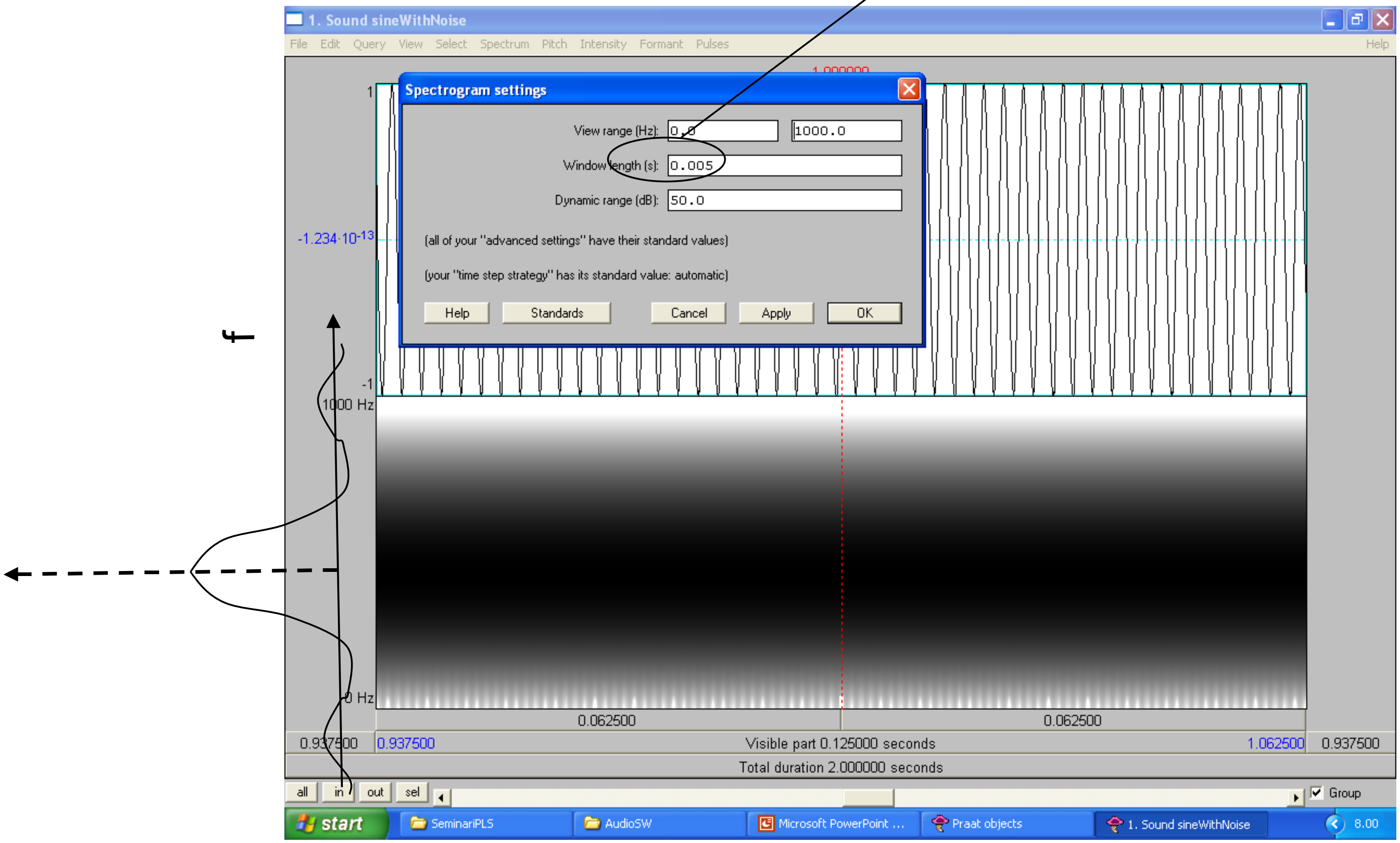
larghezza della finestra di analisi (0.07 s)



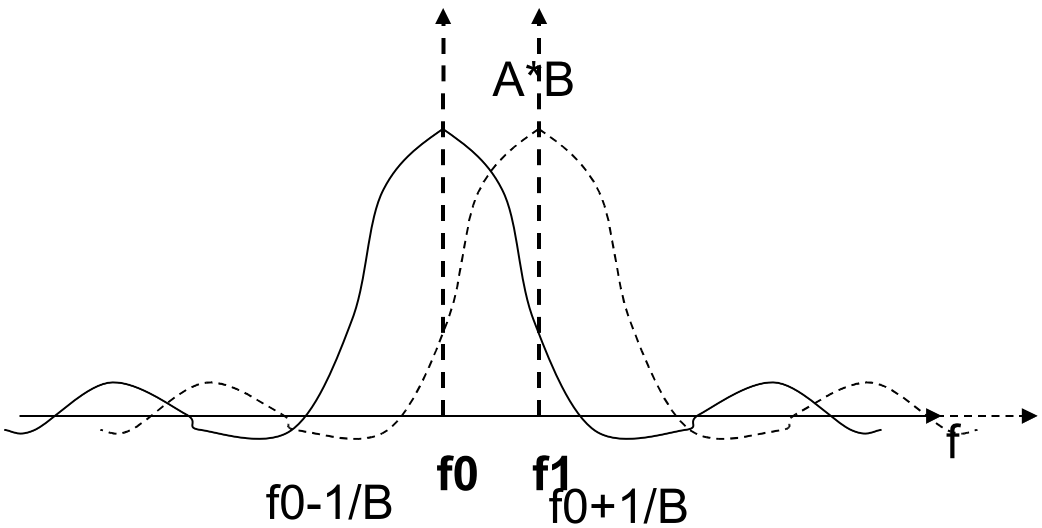
larghezza della finestra di analisi (0.3 s)

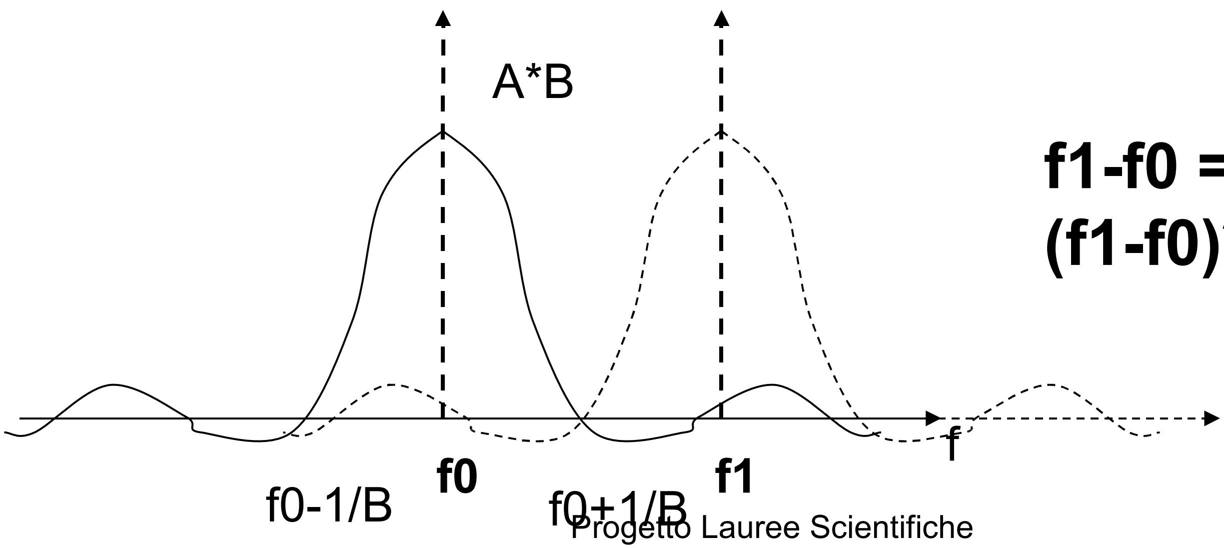


larghezza della finestra di analisi (0.005 s)



Segnale complesso: $s(t)= \cos(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_1 t)$

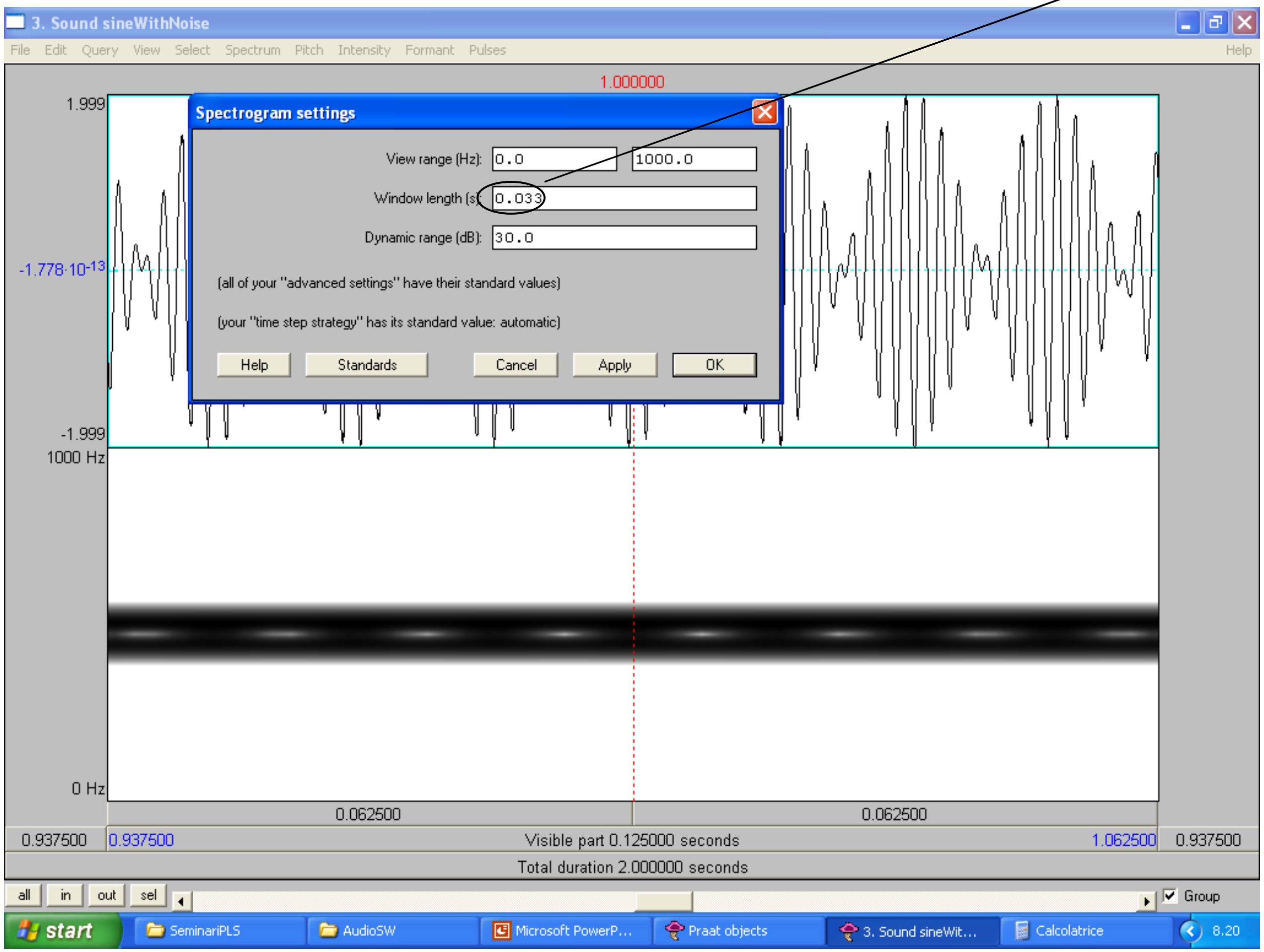




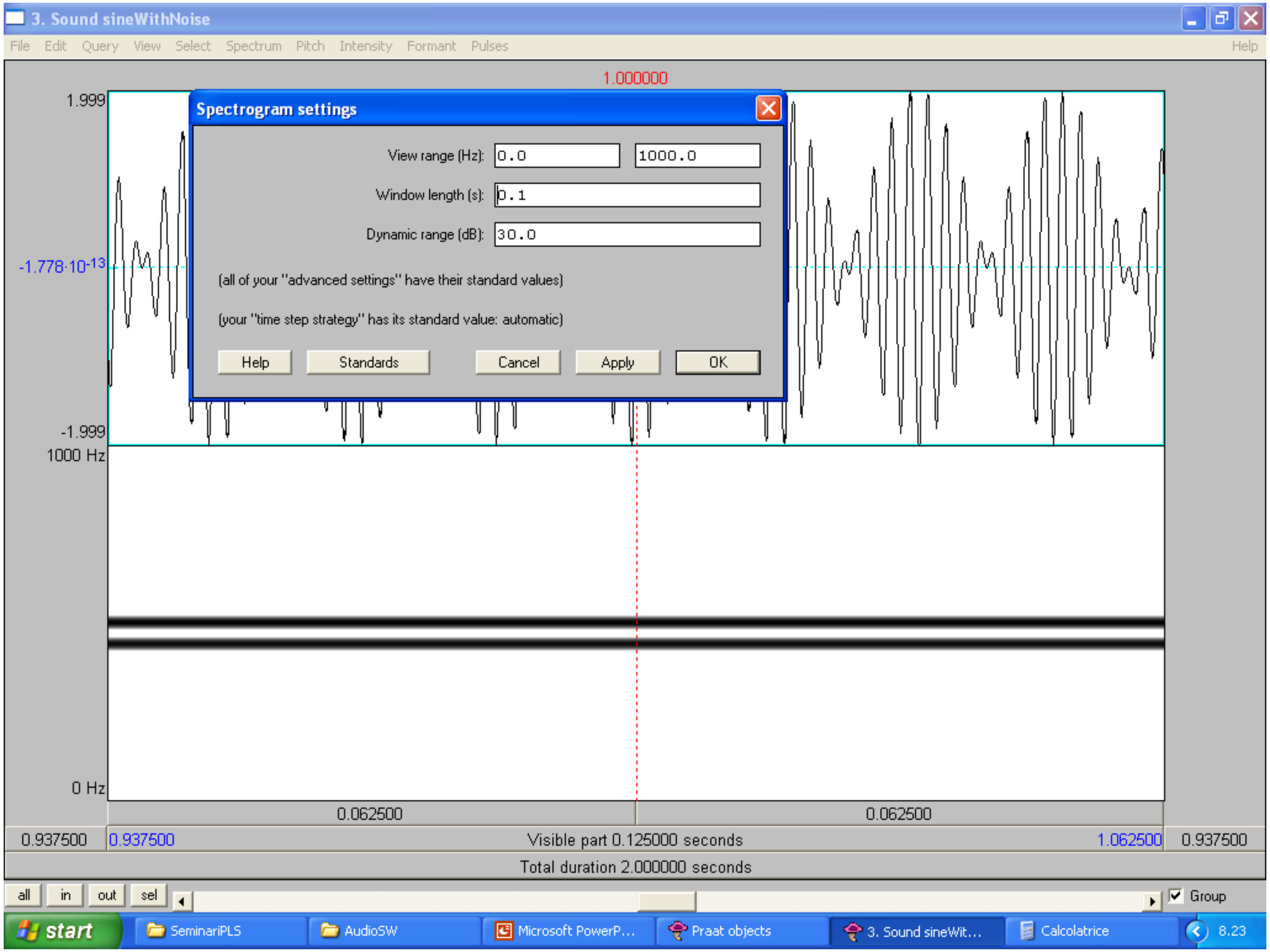
f1-f0 = 2*1/B

(f1-f0)*B= 2

f0= 440 Hz , f1=500 Hz   f1-f0=60   B=2/60=0.033



f0= 440 Hz , f1=500 Hz   f1-f0=60   B=0.1



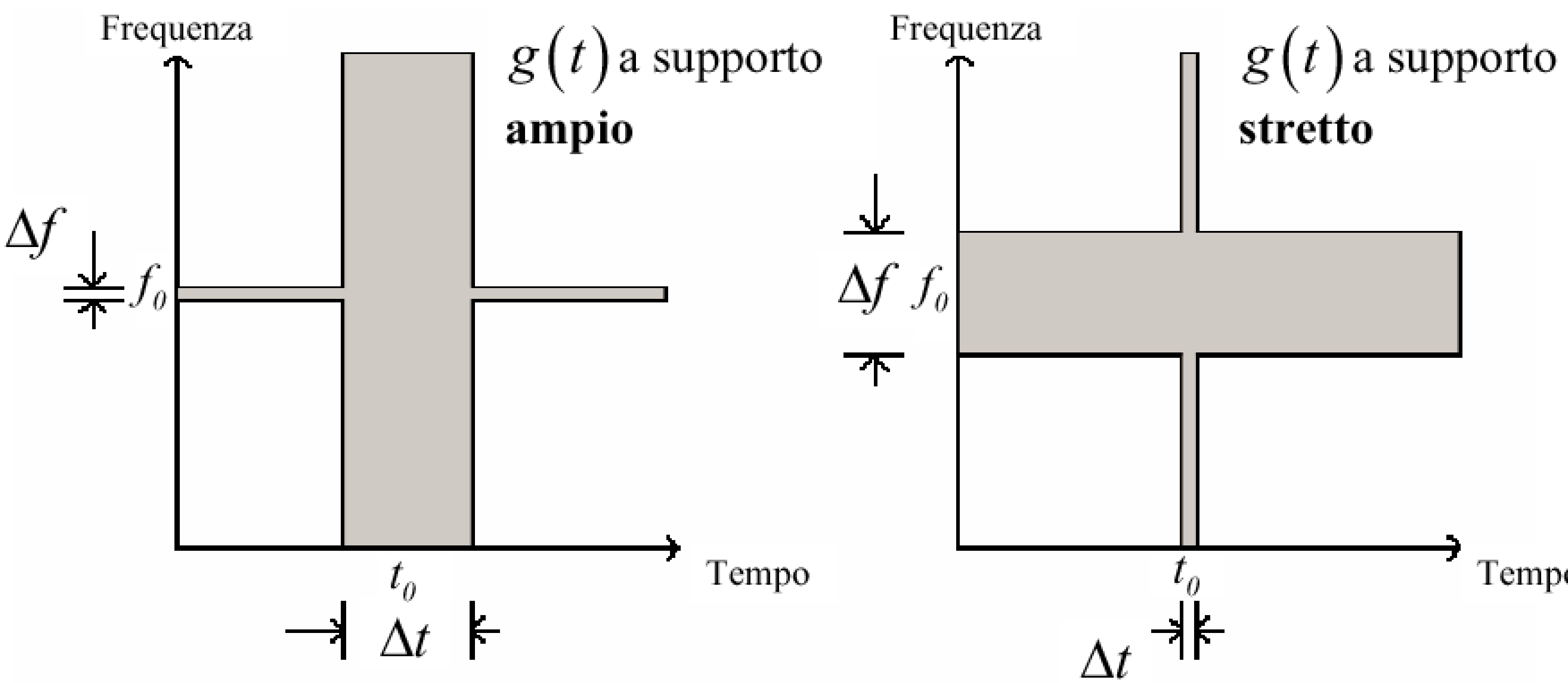
Principio di indeterminazione

- Il principio recita:

  Non è possibile stimare con precisione arbitraria e simultaneamente i parametri temporali e frequenziali di un segnale

$$\Delta f * \Delta t = c$$

LA SHORT TIME FOURIER TRANSFORM (STFT)

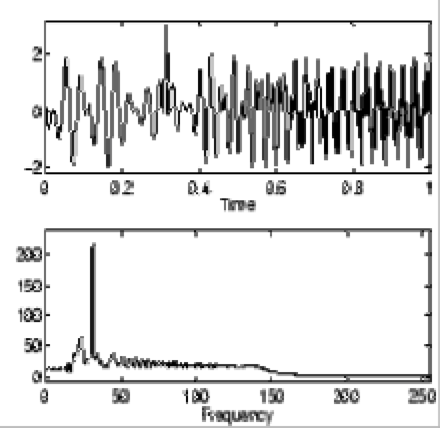


(a) Il segnale è composta da:
una sinusoide di 35 Hz,
+ un chirp quadratico (all'istante iniziale di 25 Hz dopo un secondo di 140 Hz)
+ un impulso breve (si manifesta dopo 0.3 sec).

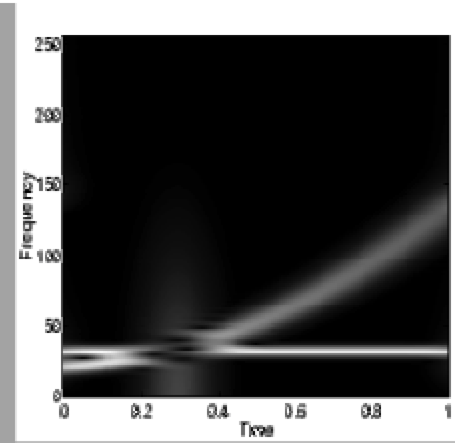
(b) Uso di una finestra temporale "larga": buona risoluzione in frequenza.

(c) Uso di una finestra temporale "stretta": buona risoluzione temporale.

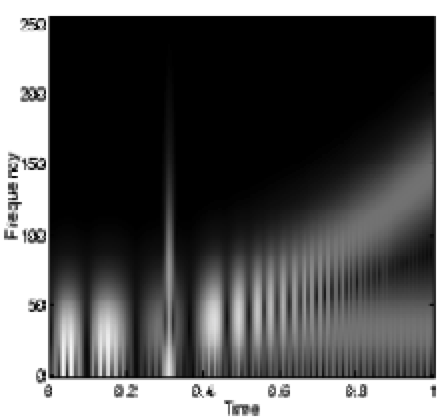
(d) Uso di una finestra di lunghezza media si ha una accettabile risoluzione sia in frequenza che nel tempo.



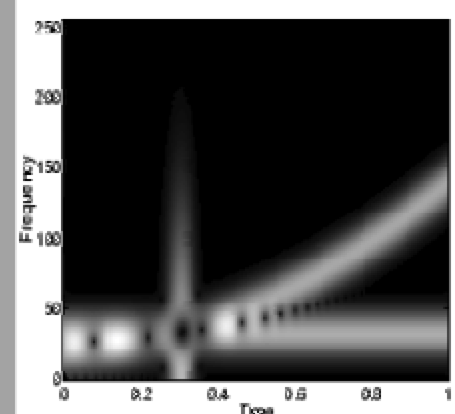
(a) Signal and its Fourier transform



(b) STFT with wide window



(c) STFT with narrow window



(d) STFT with medium window

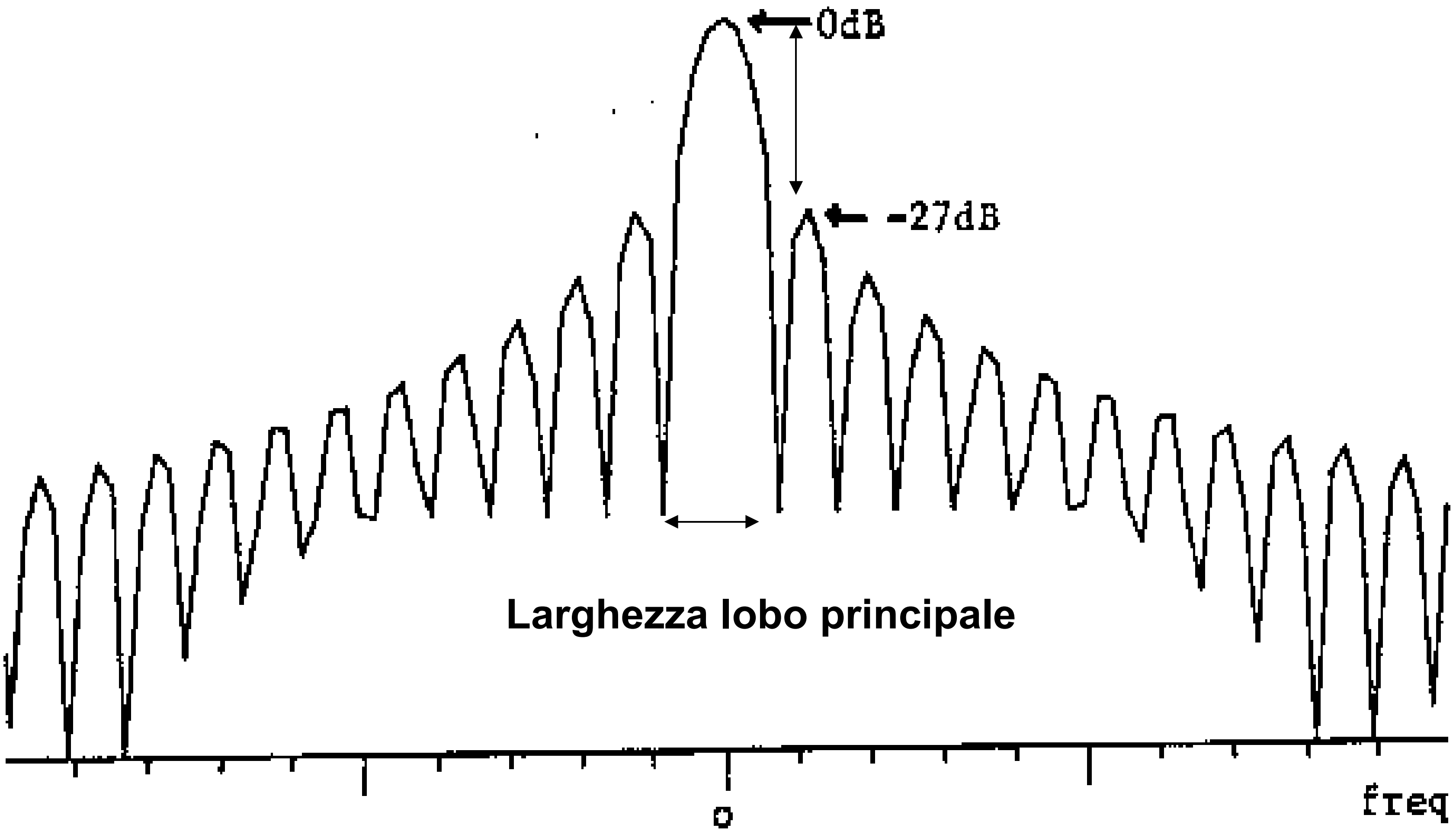
Finestre di analisi

- Invece di usare una finestra rettangolare, si preferisce usare finestre “ a campana” con bordi laterali che variano lentamente. Esempi:
  - Hamming
  - Hanning
  - Blackman

Scelta della finestra di analisi

- La scelta della finestra va fatta tenendo conto di due esigenze importanti (e contrastanti):
  - Risoluzione in frequenza: è legata alla *larghezza* del lobo principale della trasformata di Fourier della finestra.
  - Discriminabilità tra lobo principale e secondari: è legata alla reiezione del secondo lobo della trasformata di Fourier della finestra

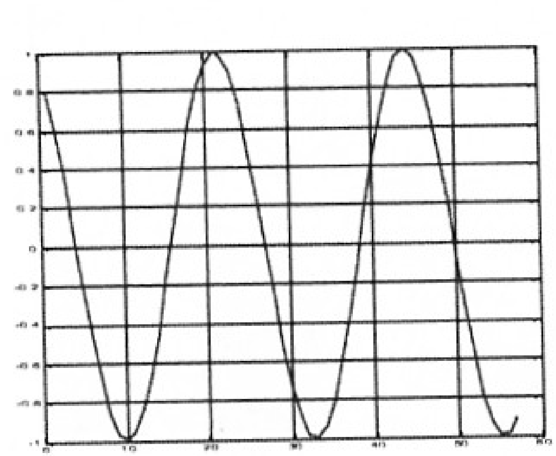
Esempio: finestra triangolare

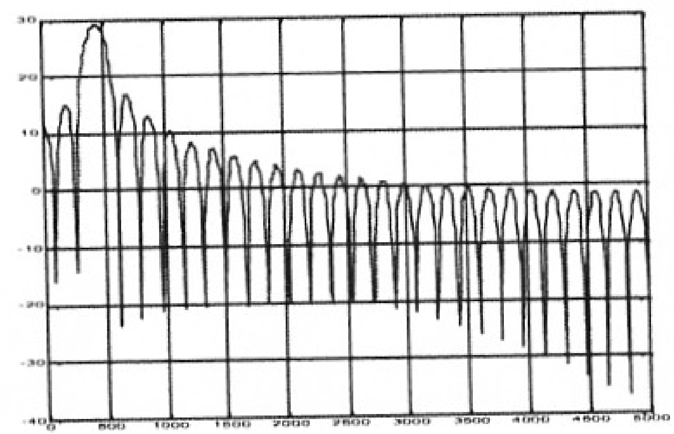


- La finestra rettangolare permette di ottenere una larghezza minima del lobo principale ma non discrimina sufficientemente tra il primo e il secondo lobo (quest'ultimo è solo 12 dB sotto il primo)

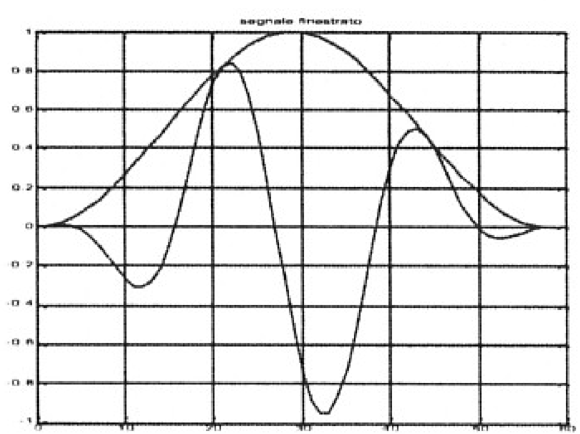
- Nel caso della finestra di Hanning, per esempio, il lobo principale è più largo (minor risoluzione) ma il secondo lobo è a più di 30 dB al di sotto del primo

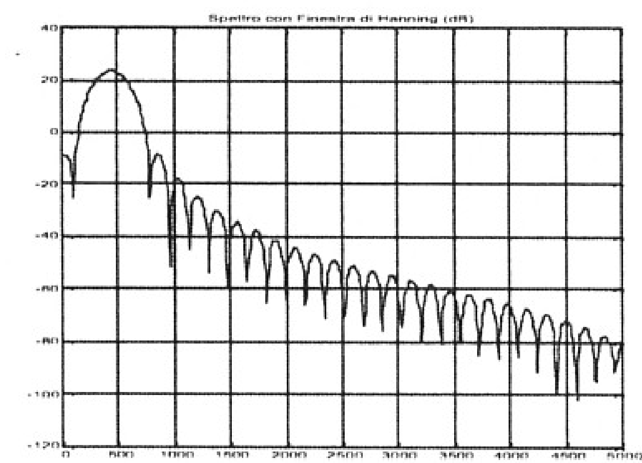
Sinusoide
+ finestra
rettangolare



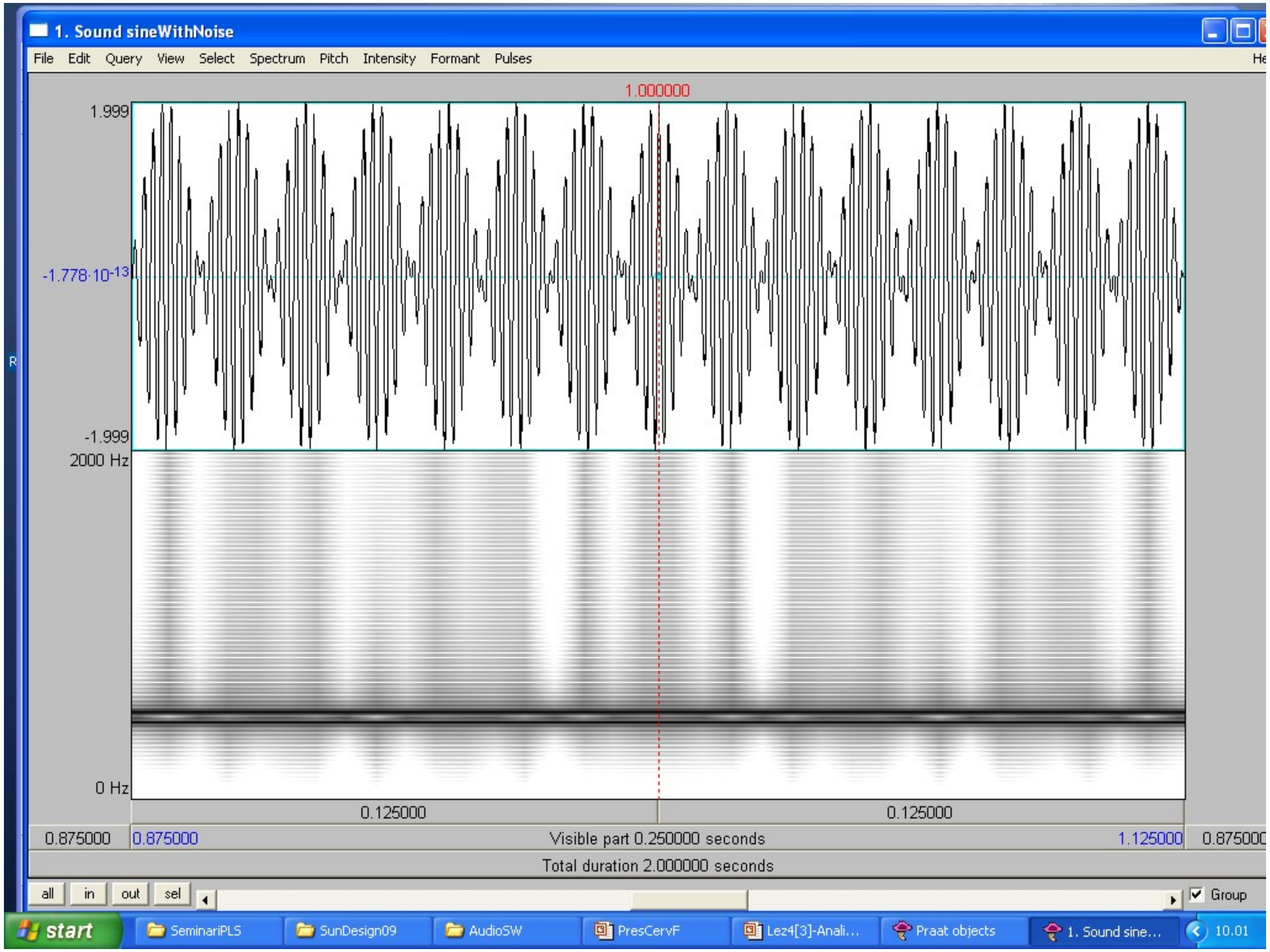


Sinusoide
+ finestra
di Hanning

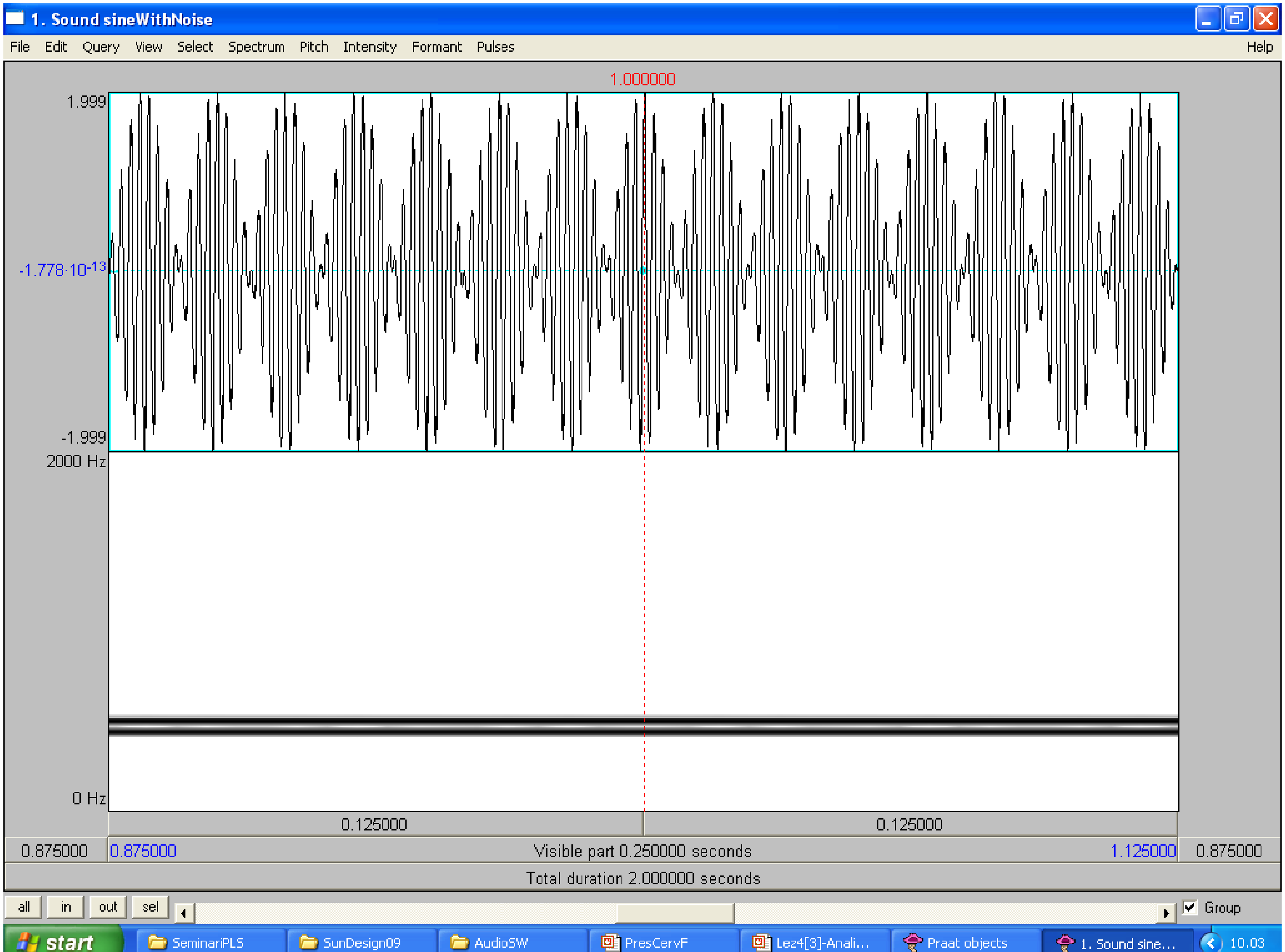




f1=440 Hz f2=500 Hz   finestra rettangolare



f1=440 Hz f2=500 Hz   finestra Hanning

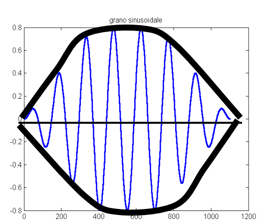


Altri approcci alla sintesi (cenni)

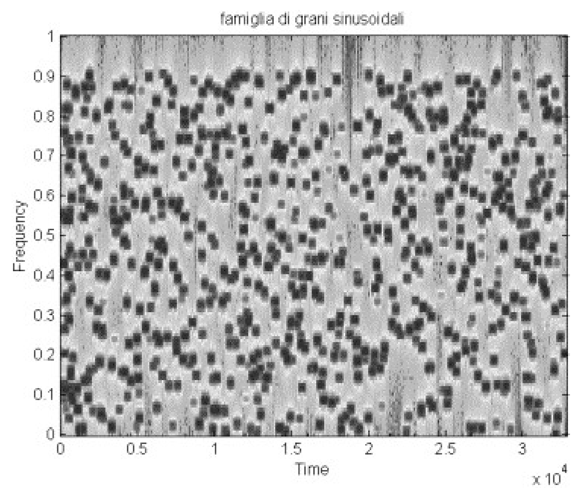
Altri metodi di analisi/sintesi additiva: la sintesi granulare

- La sintesi granulare utilizza come segnali costituenti dei "grani sonori"

1-100 ms



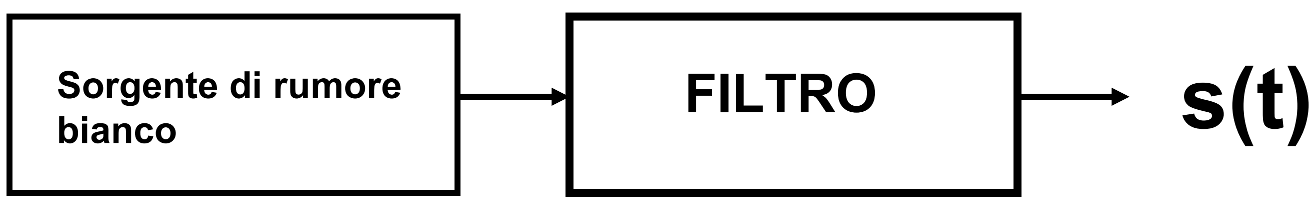
$g_i(t) = w_i(t)\ \mathrm{sen}(2\pi t\ f_i + \phi_i)$



$s(t) = \Sigma_i\ a_i{*}\ g_i(t-t_i)$

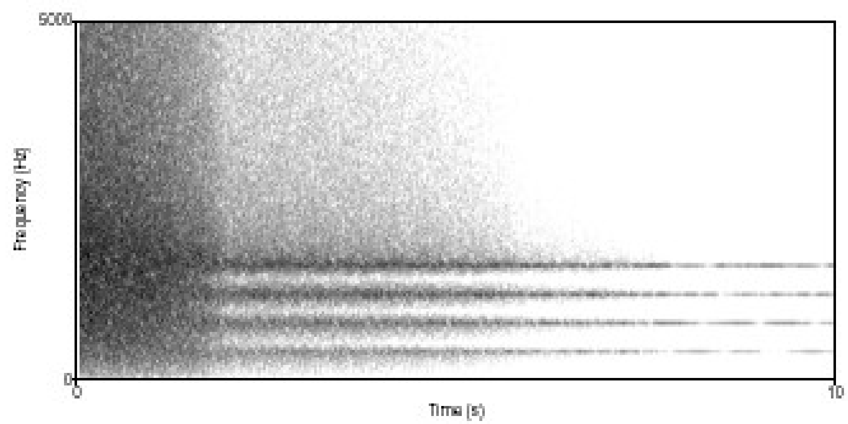
Sintesi sottrattiva

- Mentre la sintesi additiva costruisce suoni complessi sommando insieme semplici suoni sinusoidali, la sintesi sottrattiva è basata sull’idea complementare di passare un segnale ricco di frequenze (per esempio un rumore bianco) attraverso un *filtro tempo variante* per produrre la forma d’onda desiderata



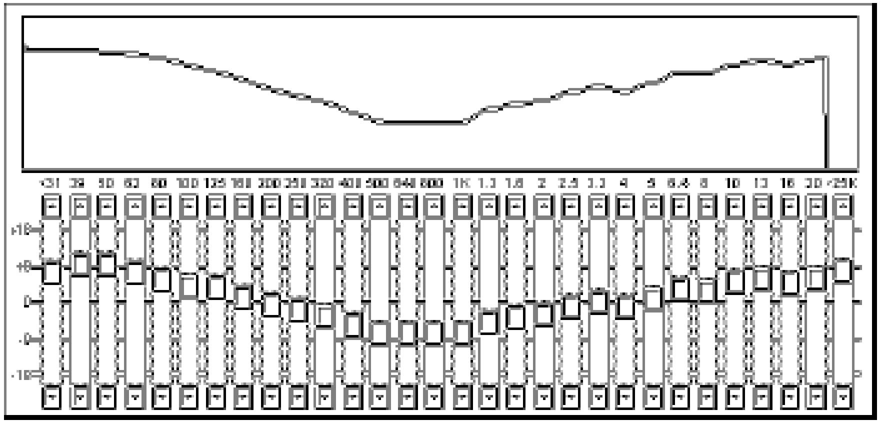
Filtraggio: da suono nodale a tonico

- Filtraggio progressivo
- rumore bianco $\rightarrow$ spettro armonico
- 400/800/1200 /1600 Hz



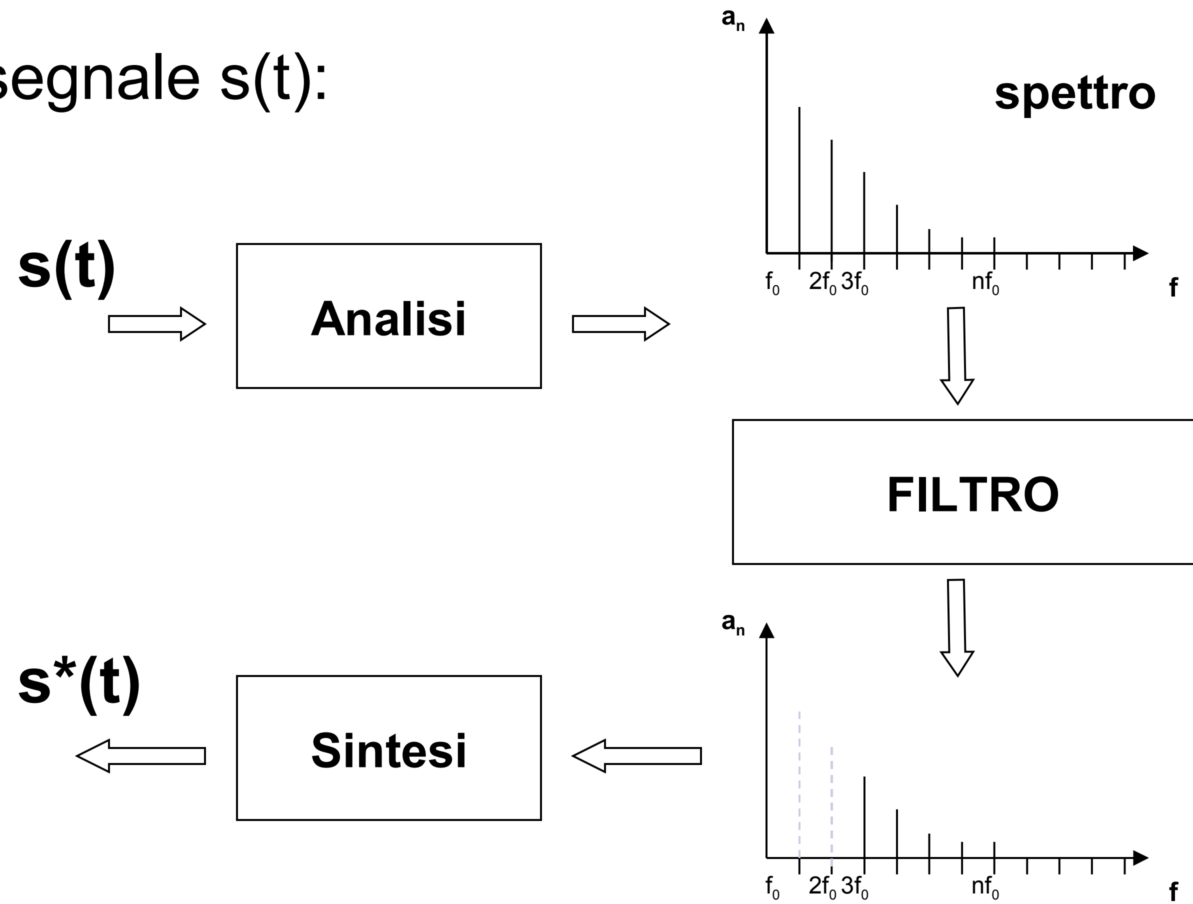
Equalizzatore grafico

- Eq a 30 bande
- ogni filtro: banda = 1/3 oct
- curva: risposta complessiva del filtraggio



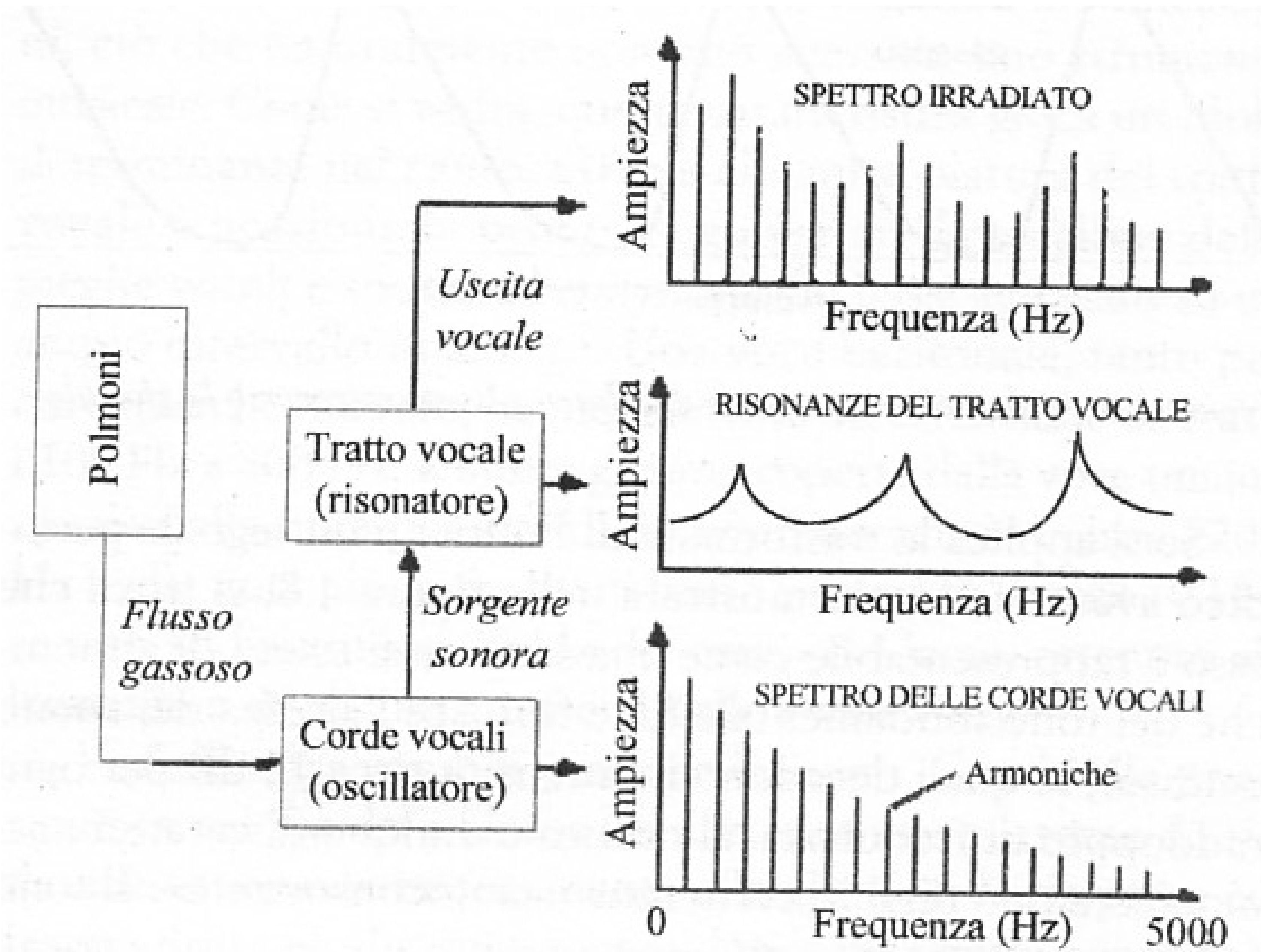
Analisi, filtraggio e ri-sintesi

- Dato un segnale s(t):



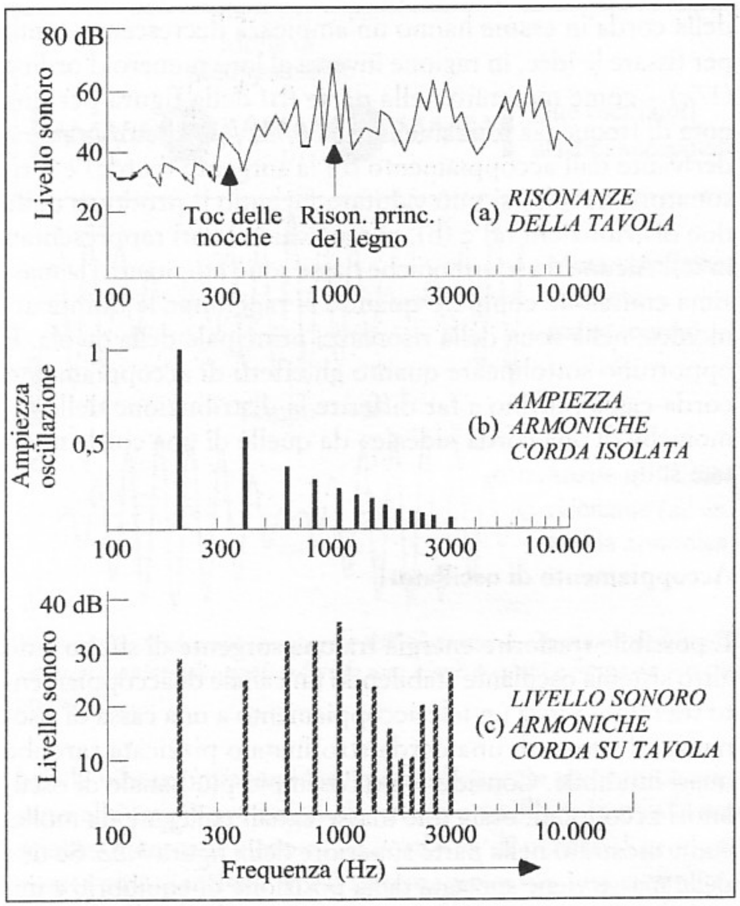
Apparato fonatorio

- Il suono della voce può essere modellato come una sorgente di eccitazione che può essere di tipo *impulsivo* data dalla vibrazione delle corde vocali e *rumorosa* data dal flusso turbolento dell’aria in qualche costrizione del tratto vocale. Questa sorgente viene trasmessa attraverso il tratto vocale, la cavità orale, la cavità nasale e l’apertura delle labbra che filtrano il segnale e modificano spettralmente la sorgente in modo approssimativamente lineare


SPETTRO IRRADIATO
Ampiezza
Frequenza (Hz)
Uscita vocale
Polmoni
Tratto vocale (risonatore)
RISONANZE DEL TRATTO VOCALE
Ampiezza
Frequenza (Hz)
Flusso gassoso
Sorgente sonora
Corde vocali (oscillatore)
SPETTRO DELLE CORDE VOCALI
Armoniche
Ampiezza
0
Frequenza (Hz)
5000

Violino

- Le corde vibranti di un violino sono accoppiate attraverso il ponticello alla cassa risonante che si comporta come un filtro tempo invariante



Sintesi non lineari

- Le trasformazioni viste non possono cambiare le frequenze delle componenti in ingresso, in quanto sono trasformazioni lineari.

- I metodi di trasformazione *non lineare* hanno due effetti importanti:
  - un arricchimento dello spettro
  - la traslazione dello spettro

Sintesi moltiplicativa

- Ring Modulation:

$$y = sen(2\pi * f_m * t) * sen(2\pi * f_c * t)$$

f_c: frequenza portante

f_m: frequenza modulante

Sintesi per modulazione di fase o di frequenza (PM/FM)

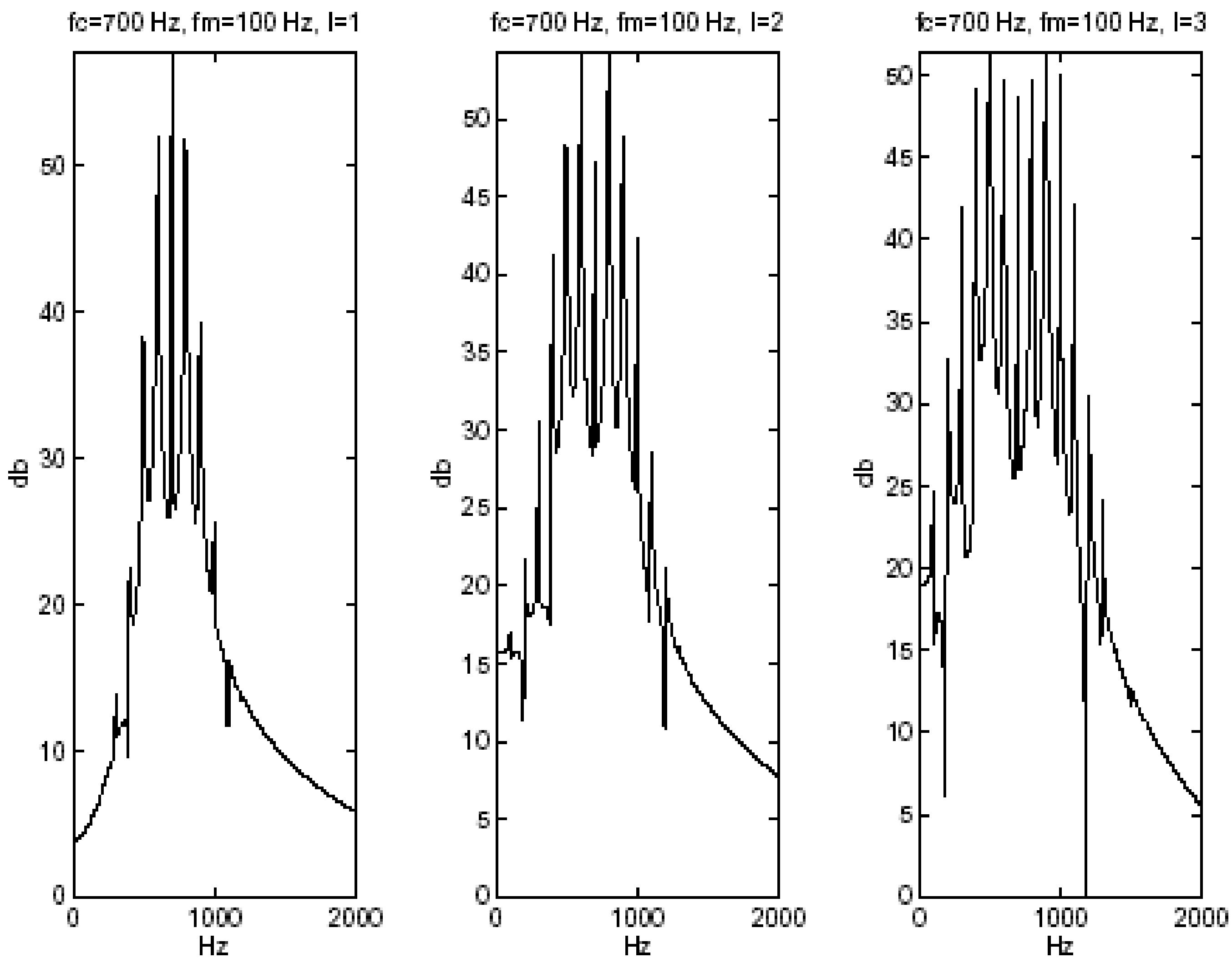
- Modulazione di fase:

  $y = sen\,(2\pi\, f_c t + I{*}sen(2\pi\, f_m t))$

- La frequenza istantanea del segnale y è data da

  $f(t) = 1/2\pi\ {*}\ d\,\Phi_{*}(t)\,/dt = f_c + I{*}f_m cos\,(2\pi\, f_m t)$

  essa varia attorno a f_c con una deviazione massima pari a $D=I{*}f_m$


fc=700 Hz, fm=100 Hz, I=1
fc=700 Hz, fm=100 Hz, I=2
fc=700 Hz, fm=100 Hz, I=3
db
Hz
0
1000
2000
0
10
20
30
40
50
5
15
25
35
45

Portante composta

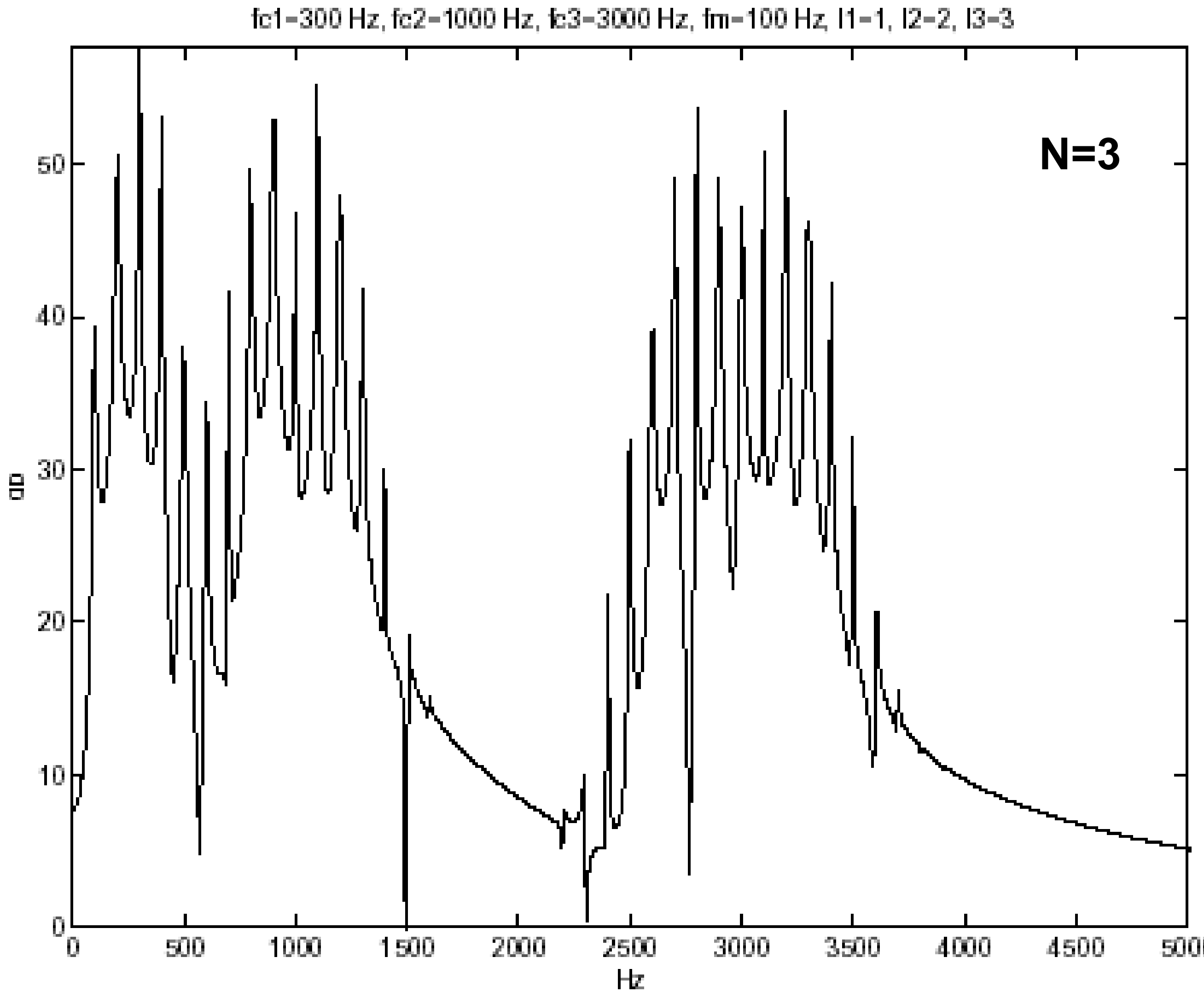
- Consideriamo ora una portante periodica ma non sinusoidale

  $s(t) = \sum_{(n:\ 0;\ L)} A_n * \mathrm{sen}(2\pi f_c n t + \phi_n(t))$

  Se essa viene modulata è come se ciascuna sua armonica fosse modulata dalla stessa modulante

- Se la modulante è sinusoidale, nello spettro attorno ad ogni armonica della portante saranno presenti righe di ampiezza proporzionale alla armonica.

- Ne risulta uno spettro di righe a frequenza $|nf_c + kf_m|$


fc1=300 Hz, fc2=1000 Hz, fc3=3000 Hz, fm=100 Hz, I1=1, I2=2, I3=3
N=3
dB
0
10
20
30
40
50
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000
Hz

Modulante composta

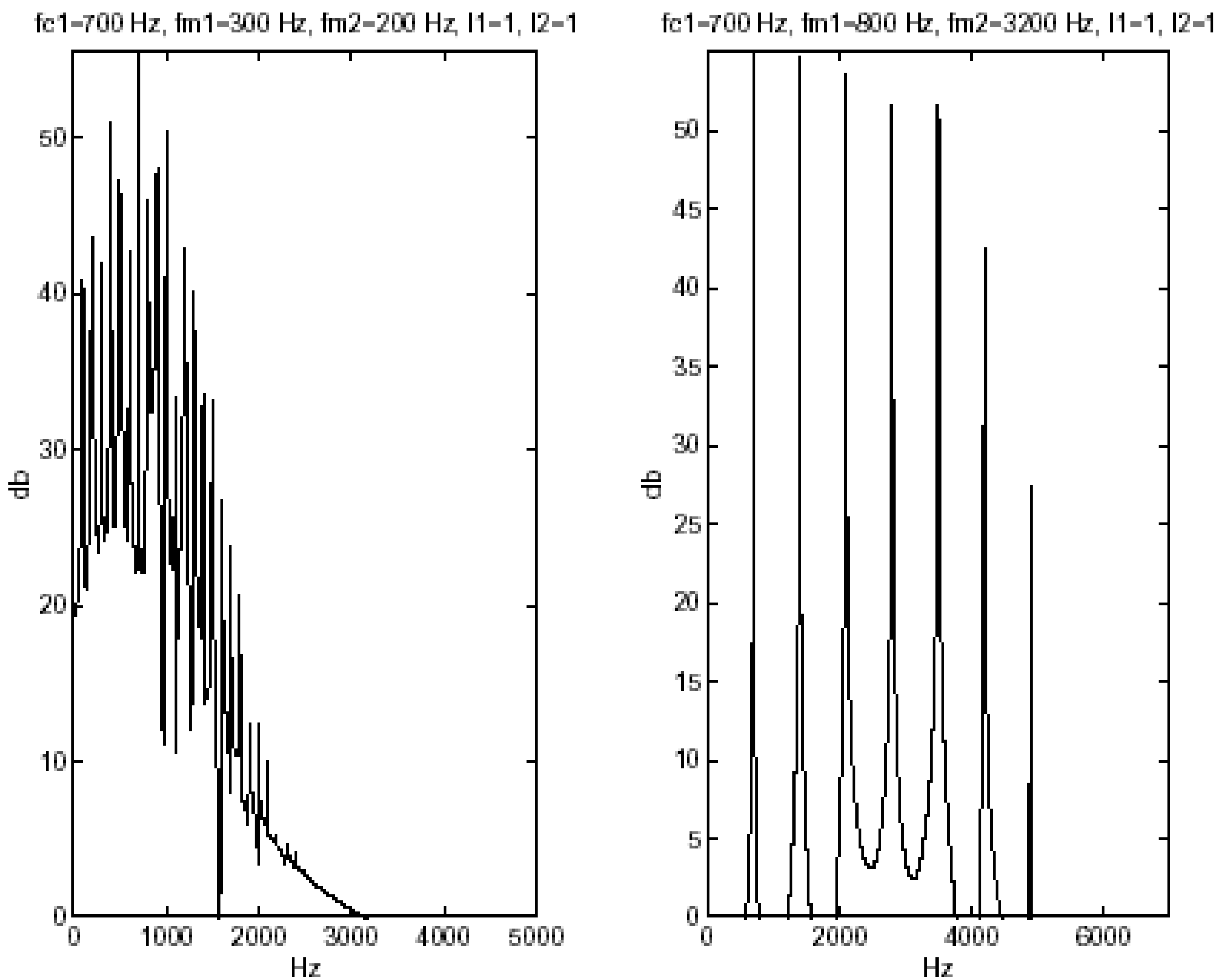
- Esaminiamo ora il caso di modulante composta da due sinusoidi

$$\phi(t) = I_1 \mathrm{sen}\,(2\pi f_1 t\ ) + I_2 \mathrm{sen}\,(2\pi f_2 t)$$

da cui deriva che

$$s(t) = \mathrm{sen}\,[2\pi f_c t + I_1 \mathrm{sen}\,(2\pi f_1 t\ ) + I_2 \mathrm{sen}\,(2\pi f_2 t)]$$

- Sono presenti tutte le parziali a frequenza [fc $\pm$ kf1 $\pm$ nf2]



fc1=700 Hz, fm1=300 Hz, fm2=200 Hz, I1=1, I2=1
db
Hz
0
10
20
30
40
50
1000
2000
3000
4000
5000
fc1=700 Hz, fm1=900 Hz, fm2=3200 Hz, I1=1, I2=1
db
Hz
5
15
25
35
45
6000

Bibliografia

- V.Lombardo, A. Valle. *Audio e Multimedia*. Apogeo
- A. Frova. *Fisica nella musica*. Zanichelli
- A. Frova. *Armonia celeste e dodecafonia*. Bur
- R. Murray Schafer. *Il paesaggio sonoro*. Ricordi
- L.Camilleri. *Il peso del suono*. Apogeo

Grazie per l'attenzione

Email:
elio.toppano@dimi.uniud.it