Piano Lauree Scientifiche Matematica e Statistica, Università di Udine 2010-2014

Laboratori

Per gLi Studenti

A cura di:

Rossana Vermiglio

PIANO NAZIONALE LAUREE SCIENTIFICHE

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università di Udine

Via delle Scienze 206

33100 Udine

Italia

Prima edizione digitale: Ottobre 2015

ISBN: 9788890619304

9 788890 619304

Laboratori *P*er g*L*i *S*tudenti

A cura di:
Rossana Vermiglio

PREFAZIONE

Questo libro presenta alcuni dei laboratori realizzati dal 2010 al 2014 nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche (PLS) per la Matematica e Statistica (MS) finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR). Il PLS nasce dalla collaborazione del MIUR con la Conferenza Nazionale dei Presidi di Scienze e Tecnologie e Confinindustria e pone l'attenzione non solo alla Matematica e Statistica, ma anche alla Chimica, Fisica e Scienza dei Materiali. Le finalità di orientamento degli studenti e di formazione insegnanti si realizzano attraverso laboratori, dove gli studenti possono confrontarsi su temi, problemi e metodologie delle discipline scientifiche, nel nostro caso della matematica, anche in relazione al mondo del lavoro, e dove gli insegnanti possono perfezionare le conoscenze disciplinari e interdisciplinari e rivedere i contenuti e metodi dell'insegnamento e apprendimento.

A conclusione del progetto si è ritenuto importante raccogliere in un libro alcuni dei percorsi realizzati, per diffondere tali esperienze e permettere così anche agli insegnanti non coinvolti attivamente nel PLS di trovare spunti e idee da utilizzare nei loro percorsi curriculari. Si è scelto di concentrare l'attenzione ai laboratori PLS di base che, secondo la definizione del MIUR, avvicinano alle discipline scientifiche, sviluppano le vocazioni, e che rappresentano un'attività consistente e non episodica. Il materiale raccolto nel libro non presenta tutto il lavoro svolto e si limita a tracciare le idee portanti. Per una panoramica più ampia del progetto e per eventuali approfondimenti su temi specifici si rimanda al sito

https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/

dove si trovano le slides delle presentazioni e dei seminari, le dispense e i codici.

ll PLS-MS dell'Università di Udine era inizialmente un'attività della Facoltà di Scienze MM.FF.NN. Dopo la riorganizzazione dell'ateneo, si è appoggiato al Dipartimento di Matematica e Informatica (DIMI). Per valorizzare l'esperienza acquisita in precedenti progetti e per dare continuità ai rapporti già consolidati con alcune scuole, è partito con una riflessione sullo sviluppo di alcuni temi già trattati. Ma ben presto l'offerta si è arricchita di nuove proposte non solo per rispondere alle richieste degli insegnanti, ma anche per cercare di trasferire al mondo della scuola alcune esperienze legate ai più recenti temi di ricerca sviluppati in dipartimento con le relative metodologie.

Si è così deciso di indagare più ampiamente sul ruolo della matematica nella risoluzione di problemi e nella descrizione di fenomeni, che nascono in diversi ambiti applicativi. I temi trattati sono stati suggeriti anche dalla ricerca sviluppata presso il DIMI. Le peculiarità del PLS-MS sono la forte attenzione agli aspetti interdisciplinari, in particolare ai legami con l'informatica e la fisica, e la presenza, ove possibile, di laboratori di matematica computazionale, che prevedono l'uso del computer e di software matematico (MATLAB, GeoGebra, R, C, Php). Gli studenti hanno così potuto operare attivamente e gli insegnanti hanno apprezzato l'utilizzo del calcolatore e del software matematico come ulteriori supporti alla didattica. La formazione standard dell'insegnante spesso non include tali esperienze, che quindi hanno dato loro un'opportunità di crescita professionale. Inoltre la presenza di laboratori di matematica computazionale ha permesso di evidenziare l'importanza degli algoritmi e delle simulazioni numeriche, quali fondamentali metodologie della ricerca per lo studio di problemi sia teorici che applicativi. Tali attività sono state realizzate principalmente presso i laboratori dell'Ateneo e questa scelta ha avuto anche un'importante ricaduta sull'orientamento in entrata degli studenti delle scuole superiori.

L' organizzazione delle attività, pur adattandosi alle varie esigenze, ha seguito un comune schema di lavoro:

- progettazione con gli insegnanti (inquadramento degli argomenti, verifica dei requisiti e delle terminologia, approfondimenti teorici) sia attraverso incontri che con scambio di materiale via e-mail;

- presentazione agli studenti dell'attività con approfondimento dei concetti/strumenti matematici e inquadramento storico degli argomenti tramite seminari;

- attività di laboratorio degli studenti coadiuvati da docenti ed insegnanti;

- eventuale ripresa e/o approfondimento nelle singole classi dei concetti/strumenti appresi;

- valutazione degli studenti.

Nei laboratori sono stati coinvolti esperti per i seminari formativi e alcuni studenti della laurea in specialistica in matematica. Le attività per le scuole superiori hanno cercato un equilibrio tra parti curriculari ed extracurriculari, mentre per le altre scuole si è privilegiato la parte curriculare.

Di seguito un breve sommario del contenuto del libro. Le tre sezioni *Realtà e Modelli*, *La matematica per la sintesi del suono*, *La matematica in rete* del laboratorio *La matematica c'é* hanno evidenziato il ruolo della matematica nella modellizzazione del mondo reale e nella risoluzione di problemi presenti nella quotidianità. Nel *Laboratorio di indagini statistiche* è stata condotta un'indagine statistica sul tema *"Quali prospettive dopo la maturità: continuo a studiare o cerco lavoro?"*. Sono incluse anche attività di laboratorio su alcuni temi classici della matematica: l'*Infinito in Matematica*, che ha coinvolto anche esperti delle discipline filosofiche, *Le geometrie non euclidee* e le *Rivoluzioni matematiche* che hanno evidenziato i legami tra matematica e fisica coinvolgendo studenti ed insegnanti con attività computazionali. I legami con l'informatica sono stati approfonditi in *Codici Segreti:un viaggio nella crittografia* e nel *Laboratorio di basi di Dati*.

Come già sottolineato in precedenza il libro non descrive tutto il lavoro svolto. Si ricorda anche *Dalla bisezione ai frattali di Newton* sul problema del calcolo delle radici di un'equazione con alcuni semplici algoritmi risolutivi, *Grafi: concetti, problemi ed applicazioni* sui concetti di base della teoria dei grafi, sulle sue applicazioni alla modellizzazione e risoluzione algoritmica di problemi reali. In *Dalla soluzione di problemi alla creazione di teorie: esempi dalla teoria dei numeri e dalla topologia* si parte da problemi concreti per arrivare gradualmente alla formulazione di una teoria. Alcune semplici analisi demografiche effettuate su un campione di militari caduti estratto dall'Albo d'oro è il tema di *Aspetti demografici dei caduti italiani nella Prima guerra mondiale*. In *Intelligenza Artificiale: codifica e risoluzione di rompicapi* si è tentato di introdurre in modo divertente l'arte della progettazione di algoritmi per risolvere rompicapi. *Il Gioco delle Perle di Vetro* propone una riflessione sulle relazioni tra matematica ed informatica, valorizzando, attraverso un percorso completo dalle scuole primarie alle scuole secondarie superiori, i contributi culturali ed il peculiare punto di vista sulla realtà della disciplina più giovane. Il corso di formazione su *Programmazione lineare e programmazione lineare intera* nasce da una specifica richiesta degli insegnanti, la cui formazione spesso non copre tali argomenti. I laboratori PLS avanzati di *allenamento* per la preparazione alle gare di matematica e le olimpiadi di informatica (con ottimi risultati degli studenti partecipanti) sono stati realizzati congiuntamente alla Mathesis e con il contributo degli studenti universitari. Questi ultimi hanno collaborato con le insegnanti di una scuola media nell'organizzazione delle attività matematiche in occasione della *Festa del PiGreco*, realizzando nella stessa scuola anche il *Laboratorio di Origami*. Il breve stage presso l'*Istituto di Genomica Applicata* ha permesso agli studenti delle scuole superiori di conoscere un centro di ricerca avanzata, dove l'approccio algoritmico è essenziale per la risoluzione dei complessi problemi trattati. L'attività, che ben si inserisce nello scambio scuola-università-territorio, è servita agli studenti come orientamento. Un positivo riscontro ha ottenuto la *Matematica al Cinema*.

Il PLS ha fornito un'occasione importante per consolidare ed ampliare i rapporti tra scuole del territorio e l'Università di Udine. Gli incontri di progettazione dei laboratori, i diversi punti di vista emersi nella loro realizzazione, il lavoro svolto accanto agli studenti nei laboratori di matematica computazionale sono stati fruttuosi per tutti.

Per questo è importante concludere con un ringraziamento a tutti gli insegnanti che hanno lavorato alla realizzazione del progetto e ai dirigenti delle scuole che li hanno sostenuti. Sono stati numerosi e non me ne vogliano se non li cito tutti. Un sentito grazie agli studenti delle scuole che si sono messi in gioco, impegnandosi anche in orario extra-curriculare. Non dimentico la Mathesis sezione di Udine, per la sua preziosa opera di divulgazione delle iniziative PLS e per il il costante impegno nell'organizzazione di allenamenti e gare. Ma voglio rivolgere le parole di gratitudine conclusive ai colleghi che hanno condiviso con me il percorso (o almeno una sua parte) del PLS-MS

Breda Dimitri, Pietro Corvaja, Giovanna D'Agostino, Agostino Dovier, Federico Fontana, Alessio Fornasin, Massimo Franceschet, Gianluca Gorni, Salvatore La Vecchia, Brunello Lotti, Alberto Marcone, Claudio Mirolo, Alberto Policriti, Franca Rinaldi, Romeo Rizzi, Sebastiano Sonego, Elio Toppano, Paolo Vidoni, Nicola Vitacolonna, Gian Pietro Zaccomer, Fabio Zanolin,

per il loro generoso sostegno e per il prezioso tempo dedicato al progetto, tempo che, pur non risultando contabilizzato in nessun registro ufficiale, ha contribuito a diffondere le idee della matematica tra gli insegnanti e studenti, ed agli studenti della Laurea Specialistica in Matematica

Beatrice Anzil, Anna Barbieri, Matteo Boscariol, Martino Buchini, Valentina Busoni, Giulio Camilla Polacco, Giovanni Campagna, Elena Canel, Albero Carminati, Luca Cesarano, Alessandro De Cicco, Sara Della Schiava, Giulia De Zordo, Alessandro Doimo, Elisa Ellero, Michela Filaoro, Anna Chiara Gallo, Giulio Ghirardo, Luca La Manna, Corrado Lanera, Ariel Aldo Giovanni Lanza, Luca Marconato,Fabrizio Masullo, Antonia Mos, Silvia Marchesin, Manuela Mazzariol, Federico Quagliaro, Alberto Ragagnin, Luca Romanelli, Alice Spangaro, Giovanni Soldà, Leonardo Taglialegne, Stefano Tamburlini, Stefano Tognazzi,

per il loro giovane e contagioso entusiasmo. Infine un augurio di buon lavoro al nuovo coordinatore prof. Agostino Dovier.

Rossana Vermiglio

CODICI SEGRETI: UN VIAGGIO NELLA CRITTOGRAFIA

MARIA CONCETTA BROCATO, AGOSTINO DOVIER

1.1 Introduzione

Il laboratorio PLS *"Codici segreti: un viaggio nella crittografia"* è nato con due finalità: da un lato si desiderava introdurre gli studenti partecipanti all'affascinante mondo della crittografia, dall'altro si intendeva suggerire l'utilizzo degli algoritmi di cifrazione/decifrazione/decrittazione come strumento veicolare per la pratica della codifica di algoritmi che necessitano di leggere/scrivere su file e operare con i vettori. Avendo l'obiettivo (più apparente che reale) di essere in grado di forzare gli attuali codici segreti (sulla scia dello scandalo *WikiLeaks*, accaduto nei mesi precedenti alla prima edizione del laboratorio), di indovinare la password per l'accesso alle reti wireless oppure (più concretamente) di indovinare un testo cifrato dai propri compagni con una chiave ignota, i ragazzi hanno avuto la possibilità di affrontare attività talvolta considerate *noiose* con rinnovato entusiasmo.

Nella fase iniziale di organizzazione del laboratorio si pensava di porre come prerequisito la conoscenza dei principi di base della programmazione e dei costrutti principali di almeno un linguaggio di programmazione; in un secondo momento questa richiesta è stata allentata per permettere la partecipazione anche a studenti di istituti in cui lo studio dell'informatica non viene affrontato. In tal caso ci si è concentrati sugli aspetti fondanti della teoria dei numeri e dei campi finiti in particolare, utili per affrontare il problema della fattorizzazione, la cui risoluzione efficiente permetterebbe, di fatto, di aprire nuovi orizzonti crittografici.

1.2 Inquadramento storico

Il desiderio e la necessità di trasferire l'informazione da mittente a destinatario in modo tale che un eventuale malintenzionato che ne fosse venuto in possesso non potesse comprenderla permea la storia delle comunicazioni umane. Nella Bibbia si legge di come il profeta Daniele fosse in grado di decrittare i messaggi inviati da Dio a Baldassarre, nonché si trovano diverse istanze di semplici codici per nascondere alcuni nomi (per esempio Babel veniva scritta come *Scheschach*, utilizzando un codice noto come *AtBash*). L'impiego dei cifrari in campo politico e militare fu probabilmente introdotto da Giulio Cesare (101–44 a.C.), il quale codificava l'informazione sostituendo ad ogni lettera la lettera che la seguiva di tre posizioni nell'alfabeto (per esempio, la A diviene D, in breve $A \rightsquigarrow D$), ricominciando dall'inizio quando l'alfabeto termina (si veda Figura 1.1). Conoscendo il tipo di codifica, ma non la chiave (in questo caso la D) una spia poteva decrittare il messaggio provando 26 possibili chiavi (anzi 25: la A co-

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

P I A N O L A U R E E S C I E N T I F I C H E
↓ ↓
S L D Q R O D X U H H V F L H Q W L I L F K H

Figura 1.1: Il codice monoalfabetico di Cesare: la tabella che descrive la sostituzione ciclica ed un esempio di codifica (per semplicità abbiamo usato il moderno alfabeto inglese a 26 lettere).

P I A N O L A U R E E S C I E N T I F I C H E
B A C C A B A C C A B A C C A B A C C A B A C
↓ ↓
Q I C P O M A W T E F S E K E O T K H I D H G

Figura 1.2: Il codice di Vigènere: esempio di codifica con la parola chiave *BACCA* (la sostituzione è determinata sempre utilizzando l'alfabeto inglese).

me chiave non è molto interessante). Una estensione apparentemente più complessa è quella che si ottiene sostituendo le lettere sulla base di una qualunque permutazione. Il numero di possibilità ora cresce notevolmente ($26! \approx 4 \cdot 10^{26}$), ma mediante l'impiego di semplici tecniche di statistica linguistica risulta possibile forzare il codice anche utilizzando carta e penna (si legga il bellissimo racconto [88]).

Un enorme balzo in avanti nella storia della crittografia fu la definizione del cifrario polialfabetico o di Vigènere (Blaise de Vigènere, 1523–1596), che venne definito *l'indecifrabile* (e, per un po', lo rimase). Esso usa una parola chiave per commutare tra diversi cifrari "alla Cesare". Ad esempio, se la parola chiave è *BACCA* la prima lettera del testo viene sostituita dalla seguente ($A \rightsquigarrow B$), la seconda e la quinta vengono lasciate immutate ($A \rightsquigarrow A$), la terza e la quarta vengono sostituite dalla lettera che la segue di due posizioni ($A \rightsquigarrow C$), dalla sesta si ricomincia come per la prima e si procede ciclicamente (si veda Figura 1.2). Mentre un cifrario monoalfabetico può essere forzato tentando 26 casi (usiamo l'alfabeto inglese), il cifrario alla Vigènere richiede un numero di tentativi pari a 26^n dove n è la lunghezza della chiave (anch'essa ignota al malintenzionato). Se la chiave è "corta" rispetto al testo vi sono delle tecniche algoritmico-statistiche escogitate da Babbage e formalizzate da Kasiski nel diciannovesimo secolo (si legga il recente racconto [3]) che permettono, con alcuni tentativi, di forzare tale codice. Tuttavia tali tecniche sono inefficaci qualora la chiave sia piuttosto lunga rispetto al testo.

Nei primi anni del ventesimo secolo l'ingegnere tedesco Arthur

Figura 1.3: L'Enigma (Fonte: `www.copyright-free-images.com/`)

Scherbius brevettò una macchina elettromeccanica per la cifratura dei messaggi: l'*ENIGMA* (Figura 1.3). Essa, mediante l'utilizzo di 3 o 4 *rotori* (interscambiabili) e del modo odometrico (come nei contachilometri meccanici) riusciva a simulare un codice alla Vigènere con chiave lunga 26^3 o 26^4 (a seconda del numero di rotori), rendendo vano un attacco basato sulla statistica. L'ENIGMA fu impiegato massivamente nella Seconda guerra mondiale: solo il gran lavoro del controspionaggio inglese, nel quale spiccava la figura di Alan Mathison Turing (1912–1954), padre dell'Informatica intesa come scienza, riuscì a forzarlo, sfruttando dei risultati combinatorici di valenti matematici polacchi e la costruzione di simulatori elettromeccanici (le bombe) prima e del primo calcolatore elettronico (colossus) poi, contribuendo così ad invertire in modo deciso le sorti della guerra (e in ogni caso a salvare migliaia di vite umane).

Portando la situazione al limite, ovvero *utilizzando* una chiave

- lunga quanto il testo
- generata casualmente,

un codice di questo tipo è dimostrabilmente indecifrabile (*one time pad* o cifrario perfetto: Gilbert Vernam 1890–1960; Figura 1.4). Questa tecnica, apparentemente impraticabile a causa del problema della condivisione della chiave, fu usata a lungo durante la Guerra fredda (per la famosa linea rossa Washington-Mosca) e ancor più recentemente dal gruppo di spie cubane denominato *Wasp (Red Avispa)*, i cui messaggi, numerici, inviati usando una normale radio, furono intercettati (ma non decrittati) dagli Stati Uniti nel 1998.

Negli anni '70 del secolo scorso, l'inizio della diffusione dei calcolatori e delle prime reti che li interconnettevano richiese la progettazione di una nuova modalità di crittografia. I messaggi erano dei files (in ultima analisi, binari) e gli algoritmi di cifratura e decifratura dovevano essere implementati da un programma al calcolatore. Ovviamente non si può assumere che la spia non venga a prima o poi

Alfabeto:	A B C D	E F G H	I J K L	M N O P	Q R S T	U V W X	Y Z ♣ ◊	♡ ♠ ♭ ♯
Codifica digitale:	0 1 2 3	4 5 6 7	8 9 10 11	12 13 14 15	16 17 18 19	20 21 22 23	24 25 26 27	28 29 30 31

Testo in chiaro:	I	N	F	O	R	M	A	T	I	C	A
Digitalizzazione:	01000	01101	00101	01110	10001	01100	00000	10011	01000	00010	00000
Chiave:	00111	00101	00101	00011	11111	00111	00000	00111	11001	00110	00100
Somma in $\mathbb{Z}_2$:	01111	01000	00000	01101	01110	01011	00000	10100	10001	00100	00100
Testo cifrato:	P	I	A	N	O	L	A	U	R	E	E

Figura 1.4: Crittografia digitale: ogni lettera viene rappresentata da una sequenza di bits (numeri da 0 a 31 espressi in binario). In questo esempio usiamo 5 bits per l'alfabeto inglese esteso con gli altri 6 simboli utilizzati. La chiave è una sequenza di 0 e 1 e viene sommata bit per bit al testo in chiaro (ove $0+0=1+1=0$ e $0+1=1+0=1$). Con la sequenza riportata, il testo in chiaro "INFORMATICA" viene cifrato nel testo in cifra "PIANOLAUREE". Se la chiave è una sequenza veramente casuale (ad esempio generata da una moneta) e della stessa lunghezza del testo, il codice è dimostrabilmente indecifrabile.

a conoscenza di tale programma. Si pensò pertanto di progettare un algoritmo noto a tutti, eliminando questo tipo di incertezza: solo la chiave non dev'essere nota alla spia. L'algoritmo di cifrazione deve mascherare l'informazione al punto tale che la spia non abbia altre soluzioni che provare tutte le possibili chiavi. Fu quindi approvato il cifrario DES (*Data Encryption Standard*—Horst Feistel e il suo team all'IBM), che si basava su una chiave a 56 bits. In effetti, nei 20 anni circa in cui fu impiegato nessuno trovò delle scorciatoie per forzarlo. Fu forzato nel 1996 per la prima volta grazie ad un algoritmo che sfruttava internet per distribuire le chiavi da testare in tutti i PC nella rete che aderivano al progetto. Una chiave di 56 bit necessita, nel caso peggiore, di $2^{56} \approx 10^{17}$ tentativi; se riuscissimo a fare un tentativo in 100 ns (10^{-7}s), saremmo in grado di provare tutte le chiavi in 10^{10} secondi, ovvero in circa 115.000 giorni. Se 100.000 PC partecipano al progetto, in poco più di un giorno saremmo sicuri di forzare il DES.

Il DES fu sostituito da altri algoritmi ed, in particolare, il suo successore "ufficiale" è l'*Advanced Encryption Standard* (AES—Vincent Rijmen e Joan Daemen) che può lavorare con chiavi da 128, 192, e 256 bits e, allo stato attuale, non è attaccabile con metodi esaustivi.

DES e AES sono entrambi algoritmi a *chiave privata*, ovvero è prevista la condivisione (da farsi ogni tanto, quando ci si vede di persona) di una chiave, cosí come in tutta la storia della crittografia accennata sopra. Alla fine degli anni '70 nasce dall'informatica un'idea innovativa: la *crittografia a chiave pubblica* (Whitfield Diffie e Martin Hellman). L'idea è che ognuno si genera una chiave divisa in due pezzi: una parte privata che non viene mai condivisa con altri e una parte pubblica che ognuno può vedere (andando sulla pagina web o sul caro vecchio elenco del telefono). Ad esempio per inviare un messaggio ad un'amico lo cifriamo usando la sua chiave pubblica. Qui c'è l'aspetto geniale. La decifrazione di quel messaggio possedendo la chiave privata è un'impresa algoritmicamente semplice. Per contro,

```
read(n);
i = 2;
while (i ≤ √n){
    if (n mod i = 0)
        then return i;
        else i = i + 1;
}
```

Figura 1.5: Un semplice algoritmo che permette (avendo molto tempo a disposizione) la decrittazione dell'RSA. Dato un numero intero $n \geq 2$ restituisce il più piccolo divisore non unitario di n. La funzione *mod* restituisce il resto della divisione tra numeri interi. Nel caso peggiore sono necessarie circa $\sqrt{n}$ divisioni per trovare il numero cercato (o stabilire se il numero è primo). Si osservi che se il numero n consta di 100 cifre allora il numero di operazioni è dell'ordine di $\sqrt{10^{100}} = 10^{50}$. Se ogni operazione si potesse fare in 10^{-10} secondi, sarebbero necessari 10^{40} secondi, ovvero $3 \cdot 10^{32}$ anni.

la decrittazione di quel messaggio pur possedendo la chiave pubblica del destinatario, è un'impresa teoricamente possibile, ma che richiede un numero di tentativi e di conseguenza tempi di esecuzione non praticabili. L'idea fu da principio messa da parte, in quanto non pareva esistere una sua implementazione, finché Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman proposero una tecnica di un'eleganza disarmante che la rendeva possibile. Il cifrario RSA (dai cognomi degli autori) permette di realizzare un esempio di crittografia a chiave pubblica. La cosa interessante è che per poterlo forzare, sarebbe sufficiente escogitare una tecnica efficiente per trovare i due numeri (entrambi primi) che moltiplicati tra loro forniscono un numero (di qualche centinaio di cifre) che costituisce la chiave pubblica. Finora nessuno ha dimostrato che un tale algoritmo non esiste, anche se nessuno è riuscito ancora a realizzarlo.

Le idee della crittografia informatica a chiave privata (AES) e a chiave pubblica (RSA) confluiscono nel protocollo *Pretty Good Privacy* (PGP): la crittografia a chiave pubblica (che necessita di tempi maggiori per la codifica) viene impiegata per passarsi la chiave privata per l'AES, prendendo il meglio dai due sistemi (P. H. Zimmemann).

Non entreremo qui nell'affascinante mondo della crittografia quantistica, che potrebbe costituire il futuro di quest'arte; in ogni modo, per un trattato esauriente (e divertente) su tutto questo materiale, si suggerisce la lettura di [100, 102].

1.3 Descrizione

Il laboratorio si è svolto per 3 anni e c'è stata qualche leggera variazione tra scuola e scuola. L'organizzazione generale prevedeva dapprima due lezioni di due ore (talvolta nelle scuole, altre volte presso l'Università di Udine), in cui il materiale storico è stato presentato utilizzando illustrazioni provenienti da diversi testi e dalla rete. Nella presentazione ci si è soffermati a lungo sulle tecniche per la decrittazione del Vigènere, illustrando i risultati dell'esecuzione di alcuni programmini che, in seguito, gli studenti avrebbero dovuto comprendere e re-implementare in tutto o in parte. Nella presentazione dell'Enigma è stato illustrato un simulatore (ce ne sono diversi disponibili on-line, sia per PC che per dispositivi mobili), che ha catturato l'attenzione dei ragazzi. In qualche caso è stato anche citato il film "Enigma", tratto dal libro [**Enigma**], che poi è stato proiettato nelle scuole.

I docenti delle scuole hanno successivamente dedicato 10 ore per aiutare i ragazzi a lavorare sul materiale. L'obiettivo principale era di scrivere i programmi per forzare il Vigènere; tali programmi erano stati anche forniti prima ai docenti con alcune spiegazioni tecniche circa il loro funzionamento e la correttezza delle ipotesi statistiche su cui si basavano. I programmi sono stati scritti nei linguaggi Prolog, Visual Basic, Pascal e C. In questa fase, tuttavia, è stata data ampia libertà e di conseguenza sono state realizzate attività diverse.

In ogni caso, dopo l'attività "interna" alle scuole si è organizzato un incontro finale per la relazione del lavoro svolto e qualche considerazione di chiusura.

Entriamo ora più in dettaglio su come è stata realizzata l'attività all'interno dell'ISIS A. Malignani di Udine.

1.4 La voce della scuola

Lo scopo principale del Piano Lauree Scientifiche è quello di sperimentare azioni che rafforzino i rapporti tra la Scuola Secondaria e l'Università in ottica orientante per gli studenti; in questo contesto di prospettiva verso il futuro e di scoperta, la Scuola Secondaria può trovare spazi per svolgere azioni didattiche innovative nel metodo, negli strumenti e negli scenari. L'attività nei laboratori PLS permette a studenti e docenti una flessibilità di ruoli; il docente della classe può assumere un ruolo di guida, di "tutor" del percorso di esplorazione e orientamento, può affiancare, supportare ed accompagnare con efficacia le attività dei propri studenti, in quanto agisce in stretta collaborazione con il docente referente dell'Università e con il suo supporto. In questo modo l'insegnante può scendere dalla cattedra e sperimentare in prima persona.

In quest'ottica di sperimentazione sinergica tra docente di classe e referente si è svolta l'attività del laboratorio "Codici Segreti: Un viaggio nella crittografia" all'interno dell'ISIS A. Malignani di Udine, precisamente nelle classi III TELA dell'anno 2012/2013 e 2013/2014 unite ad alcuni studenti della prima delle due, diventata IV TELA nel successivo anno 2013/2014. Il percorso di esplorazione biennale ha permesso di maturare e svolgere, nel secondo anno, oltre alle attività pianificate l'anno precedente, anche alcune attività verticali e trasversali tra le due classi, con azioni di "peer education" tra studenti:

- in presenza (in orario extra-scolastico),

- virtualmente, sfruttando le moderne possibilità offerte dalla tecnologia informatica: l'utilizzo della piattaforma didattica Moodle e di ambienti cooperativi, quali wiki, forum e bacheche virtuali.

Le attività seminariali di introduzione alla crittografia, svolte nel 2012/2013 dal prof. A. Dovier sono state precedute dalla visione del film "Enigma"ed affiancate da attività di "*live twitting*" con hashtag identificati in maniera collaborativa dagli studenti (#malignaniUd #PLScrittografia). Tale attività ha permesso il coinvolgimento degli studenti, che da passivi ascoltatori sono diventati parte attiva. Nello stesso anno, per svolgere la successiva attività di laboratorio interna con il docente della scuola, i gruppi classe sono stati suddivisi in team per aree di interesse:

- studio e codifica di algoritmi crittografici in C,

- progettazione e pubblicazione di un sito HTML/CSS che descrivesse le attività del laboratorio,

- creazione della documentazione per la relazione finale,

- editing della presentazione delle attività utilizzando modalità collaborative (utilizzando il software Prezi).

Tutti i tweet raccolti dagli studenti durante le conferenze e le attività, i contenuti, gli algoritmi, le immagini, le slide ed i concetti ritenuti "chiave" dagli studenti sono stati raccolti e pubblicati nel sito descritto che è stato fruito, nel secondo anno, dalla successiva classe terza per svolgere l'attività didattica interna alla scuola. Nelle Figure 1.6–1.8 riportiamo alcuni estratti dal contenuto in rete e i riferimenti per accedervi.

Nell'annualità successiva gli studenti della classe quarta che avevano già svolto il modulo PLS hanno avuto la possibilità di essere dei *referenti esperti* per la nuova classe che doveva iniziare il percorso; nel contempo, essi hanno approfondito il programma disciplinare dell'anno in corso attraverso il miglioramento del foglio di stile e della veste grafica del sito, l'introduzione di pagine dinamiche e l'interazione con una base dati normalizzata. La classe terza del 2013/2014, oltre a svolgere le attività di *live twitting* e in team di interesse (similmente all'anno precedente) ha sperimentato la realizzazione di uno streaming video dei due incontri seminariali con il docente referente dell'Università, con la contestuale pubblicazione del video su un canale YouTube. Durante le attività interne alla scuola gli allievi sono stati il motore;nil compito dell'insegnante, in questo contesto, è stato quello di guida per far emergere le potenzialità e gli interessi degli studenti, in stretta collaborazione con il docente referente dell'Università.

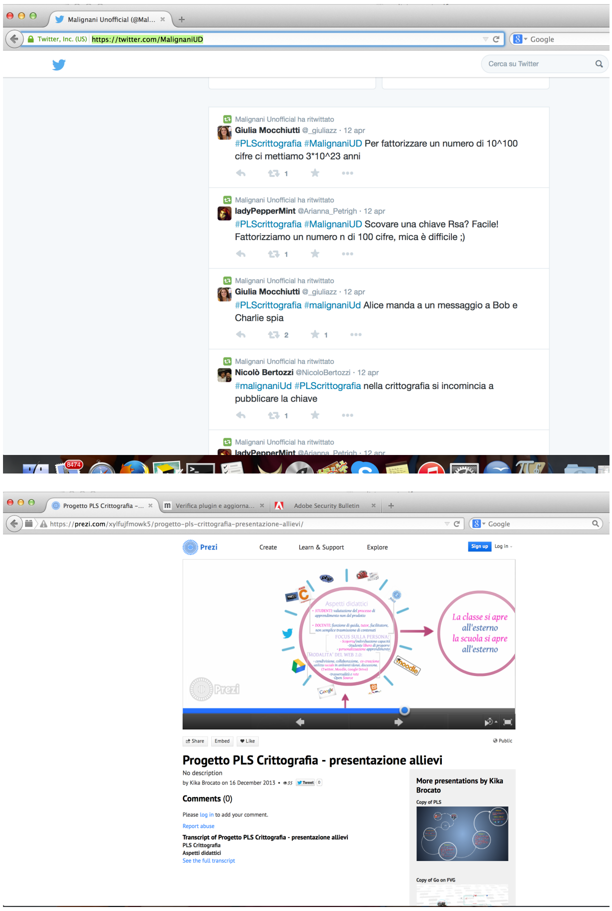


Figura 1.6: Esempi di tweet scritti dagli studenti durante la presentazione e loro visualizzazione web: `https://twitter.com/MalignaniUD` (in alto), una pagina della presentazione dell'attività da parte degli allievi usando Prezi: `https://prezi.com/xylfujfmowk5/progetto-pls-crittografia-presentazione-allievi/` (in basso)

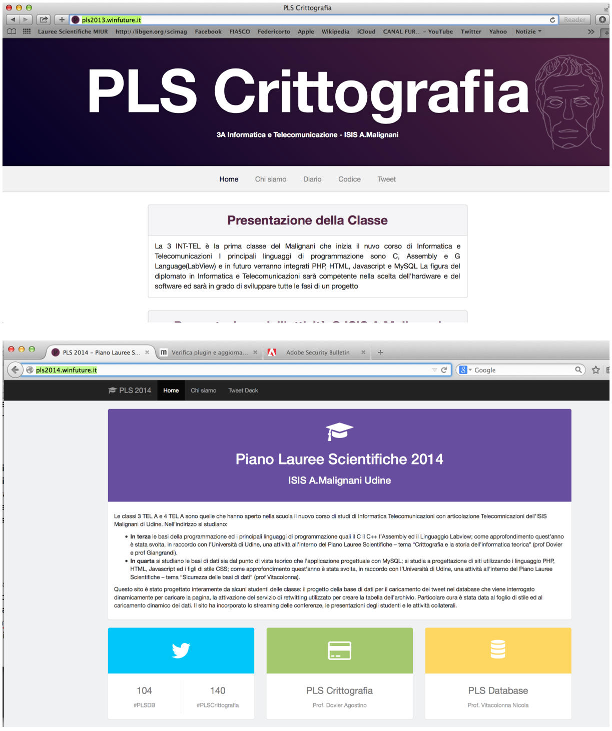


Figura 1.7: Sito web progettato nel 2012/2013 (`http://pls2013.winfuture.it/`), dove si possono anche trovare codici Java (in alto) e sito web progettato nel 2013/2014 (`http://pls2014.winfuture.it/`) nel corso del progetto con il dr. Vitacolonna (in basso)

1.5 Conclusioni

Come si evince dalla sezione precedente, i risultati del laboratorio sono andati oltre le aspettative. Anche in istituti con minori competenze di tipo informatico sono emersi spunti estremamente interessanti da parte degli studenti. Inoltre diversi allievi si sono appassionati a tal punto da iscriversi al corso di laurea in Matematica ed addirittura in Informatica, di cui prima nemmeno conoscevano l'esistenza. Il lavoro svolto ha permesso anche la presentazione dell'attività al GO On FVG del 5 maggio 2014 da parte della prof.ssa Brocato assieme agli allievi S. Cragnolini, I. Manfredi, R. Nobile, A. Roccaforte della IV TELA 13/14: https://prezi.com/e7rg_oqffetd/go-on-fvg/. Per ulteriore materiale e approfondimenti si rimanda al sito https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/moduli/codici-segreti/.

Figura 1.8: Materiale a cura degli allievi III TELA 13/14 contenente lo streaming video delle lezioni in presenza organizzate con Prezi `https://prezi.com/ijfmnk9eycoo/pls/`

1.6 Ringraziamenti

Desideriamo ringraziare: la dr.ssa Anna Barbieri per la collaborazione nell'edizione 2011/2012 nella quale ha tenuto dei seminari sul problema della fattorizzazione di numeri interi, il dr. Marco Peressotti per il porting in C, Visual Basic e Pascal degli algoritmi di cifrazione, decifrazione e decrittazione del codice Vigénere, le proff. Clara Veronese e Stefania Pividori per il loro lavoro svolto con passione e originalità presso l'istituto Zanon, nonché le professoresse Sabrina Capobianco, Eva Caluzzi e Alessandra Maniglio del Liceo Scientifico "Le Filandiere" di San Vito al Tagliamento e i proff. Laura Candotti e Massimo Bove del Liceo Scientifico "Magrini" di Gemona, il prof. Davide Fattori dell'ISIS di Tarvisio e i proff. Giorgio Tuan, Luca Peresson e Maria Fontana dell'ISIS Malignani. Infine si ringraziano tutti gli studenti partecipanti ed in particolare gli allievi delle classi III TELA A.S. 12/13, III TELA A.S. 13/14, IV TELA A.S. 13/14 dell'ISIS A. Malignani di Udine.

Riferimenti bibliografici

[3] Swanston Andrew. *Il codice del traditore*. IBS, 2012.

[63] Robert Harris. *Enigma*. Arnoldo Mondadori Editore, 1995.

[88] Edgar Allan Poe. *Lo Scarabeo D'Oro*. 1843.

[100] Andrea Sgarro. *Codici Segreti*. Arnoldo Mondadori Editore, 1989.

[102] Simon Singh. *Codici & Segreti*. BUR Biblioteca Univ. Rizzoli, 2001.

[105] Alan M. Turing. «Computability and λ-Definability». In: *J. Symb. Log.* 2.4 (1937), pp. 153–163. DOI: 10.2307/2268280. URL: http://dx.doi.org/10.2307/2268280.

L'INFINITO

FABIO BOVE, LAURA CANDOTTI, ALBERTO MARCONE

2.1 Introduzione

In questo capitolo viene descritto il Laboratorio sull'infinito svolto nell'anno scolastico 2013–2014 presso il Liceo Scientifico Magrini di Gemona del Friuli. Laboratori sullo stesso tema erano già stati organizzati presso il Liceo Scientifico "Le Filandiere" di San Vito al Tagliamento nell'anno scolastico 2005–06 e presso il Liceo Scientifico "Niccolò Copernico" di Udine nell'anno scolastico 2010–11.

Il tema dell'infinito è centrale nella matematica e può venire affrontato da molteplici punti di vista, anche interdisciplinari, come nell'edizione svolta al Copernico in cui si sono esplorati alcuni suoi aspetti dal punto di vista della filosofia. Anche volendo restare all'interno della matematica sono molteplici gli approcci possibili, coinvolgendo ad esempio l'analisi infinitesimale o i procedimenti geometrici di esaustione.

In questa edizione del laboratorio ci si è concentrati sull'analisi matematica del concetto di infinito attraverso la nozione di cardinalità. Obiettivo principale era dunque far scoprire agli studenti una parte di matematica che solitamente non viene affrontata nelle scuole superiori. In questo modo si è cercato anche di presentare la matematica come una disciplina viva, che sfida le capacità dei singoli e dei gruppi alla comprensione e alla scoperta di fenomeni sempre nuovi e, a volte, contrari ad alcune intuizioni di partenza.

2.2 Inquadramento storico

Il grande matematico del XX secolo Hermann Weyl ha scritto: "Se si vuol trovare una breve massima che riguardi il centro vivo della matematica si può dire certamente che la matematica è la scienza dell'infinito". Eppure l'infinito è stato un problema per molti secoli. Già Aristotele aveva scritto: "Le considerazioni sopra l'infinito hanno però una difficoltà, perché si presentano molte impossibilità, tanto se si si immagina che esso esista, quanto se si immagina che esso non esista".

Le "difficoltà" cui si riferisce Aristotele sono ad esempio i paradossi di Zenone (489 a.C.–431 a.C.), alcuni dei quali si basano sull'assunzione che non sia possibile compiere infinite azioni in un tempo finito.

Il paradosso più interessante per i nostri scopi è quello che una parte di un insieme infinito può essere altrettanto grande che l'insieme intero, contraddicendo il principio secondo cui la parte è minore del tutto. Galileo Galilei (1564—1642) enuncia magistralmente questo paradosso nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*" del 1638. Egli fa dire ai personaggi del suo dialogo:

Salviati: Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.

Simplicio: So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in se medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal dua, e questo dal tre, in se medesimi moltiplicati.

Salviati: Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?

Simplicio: Non si può dir altrimenti.

Salviati: Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.

Simplicio: Così sta.

Salviati: Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. *E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto dire la decima parte esser quadrati; in dieci mila solo la centesima parte sono quadrati, in un millione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.*

Sagredo: Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

Salviati: Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.

Galileo conclude quindi che **non possiamo misurare l'infinito**.

La risposta *di Aristotele* ai paradossi dell'infinito, *adottata* dalla maggior parte dei matematici fino alla metà del XIX secolo, è quella di ritenere l'infinito un concetto *potenziale* e non *attuale*. Ciò significa che i numeri naturali sono infiniti solo nel senso che per ognuno di essi è possibile trovarne uno più grande, non nel senso che il loro insieme (necessariamente infinito) esiste realmente.

Il grande matematico Carl Friedrich Gauss (1777–1855) riassume questo approccio all'infinito:

> Protesto contro l'uso di grandezze infinite come di qualche cosa di completo, cosa che non è mai permessa in matematica. L'infinito è solo un modo di dire.

La matematica moderna è però di diverso avviso. Il matematico tedesco Georg Cantor (1845–1918) è il fondatore della moderna teoria degli insiemi, ed è grazie a lui che la matematica ha trovato il modo di misurare l'infinito e mostrare che, contrariamente a quanto pensava Galileo, non tutti gli infiniti sono uguali.

Cantor iniziò ad investigare sistematicamente l'esistenza di biiezioni tra insiemi, che peraltro sono alla base del modo in cui apprendiamo a contare nell'infanzia. Al giorno d'oggi usiamo queste definizioni:

- Due insiemi A e B sono **equipotenti** se esiste una biiezione tra di essi, cioè una relazione tale che ad ogni elemento di A corrisponda uno e un solo elemento di B e ad ogni elemento di B corrisponda uno e un solo elemento di A. In questo caso scriviamo $A \equiv B$.

- Scriviamo $A \preceq B$ se esiste un'iniezione di A in B, cioè una relazione tale che ad ogni elemento di A corrisponda uno e un solo elemento di B .

- A ha potenza minore di B se $A \preceq B$ e $A \not\equiv B$: scriviamo $A \prec B$.

Si vede facilmente che $\equiv$ è una relazione d'equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva), che $\preceq$ è riflessivo e transitivo e che $\prec$ è transitivo.

Nel *Dialogo* Galileo mostra che l'insieme di tutti i numeri naturali e l'insieme dei quadrati sono equipotenti. Ciò a cui dobbiamo rinunciare (rispetto alla matematica del finito) è il principio che "la parte è minore del tutto". Anzi, un modo per caratterizzare gli insiemi infiniti è proprio:

> un insieme A è infinito se esiste $B \subset A$ tale che $A \equiv B$.

La cosiddetta Rivoluzione cantoriana incontrò non poche resistenze: alcuni dei più illustri matematici dell'epoca la rifiutarono. Leopold Kronecker (1823–1891) apostrofò Cantor come "ciarlatano" e "corruttore di giovani" e scrisse:

> Non sono sicuro di cosa sia predominante nella Teoria di Cantor, se filosofia o teologia, ma sono sicuro che non ci sia della matematica.

D'altro canto Henri Poincaré (1854–1912) definì la teoria di Cantor una "grave malattia". Il risultato fu che Cantor rimase confinato per l'intera carriera all'Università di Halle, un centro relativamente minore nel panorama della matematica tedesca dell'epoca. La teoria cantoriana degli insiemi però dimostrò progressivamente la propria fecondità, tanto che nel 1926 David Hilbert scrisse la famosa frase:

> Nessuno potrà a cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi.

Concludiamo questa breve carrellata storica con un'altra citazione di Hilbert:

> Nessun'altra questione ha scosso da tempi immemorabili la mente degli uomini quanto quella dell'infinito. L'infinito ha agito in modo così eccitante e ricco di frutti sull'intelligenza come poche altre idee. Però l'infinito ha bisogno di spiegazioni più di qualsiasi altro concetto.

2.3 Descrizione

Il laboratorio si è svolto nell'arco di sei incontri, alcuni tenuti presso la sede universitaria dei Rizzi ed altri presso il Liceo di Gemona.

Nel primo incontro i docenti universitari hanno tenuto un seminario introduttivo presso la sede del DIMI, in cui è stata presentata la storia pre-cantoriana dell'infinito in matematica, soffermandosi in particolare sui paradossi dell'infinito e proponendo vari esempi di biiezioni tra insiemi che a prima vista potrebbero apparire di dimensioni diverse.

I successivi quattro incontri sono stati caratterizzati da uno stile più laboratoriale: agli studenti venivano poste alcune domande che li stimolassero a scoprire varie peculiarità dei diversi tipi di infinito. Inizialmente si è sviluppata la nozione di biiezione esplorando in particolare gli insiemi infiniti numerabili, ovvero quelli che sono in biiezione con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Alcuni esempi sono l'insieme delle coppie di elementi di $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Successivamente si è scoperta l'esistenza di insiemi infiniti più che numerabili come l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali: riprendendo le notazioni introdotte nella sezione precedente, si ha $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Una volta introdotto il teorema di Cantor-Bernstein (che afferma che se $A \preceq B$ e $B \preceq A$ allora $A \equiv B$) si è potuto ottenere che $\mathbb{R} \equiv \mathcal{P}(\mathbb{N})$, dove in generale $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi dell'insieme A. In particolare si ha che $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Nell'ultimo incontro i docenti universitari hanno presentato alcuni argomenti più avanzati. Partendo dal teorema di Cantor (che afferma che per ogni insieme A si ha $A \prec \mathcal{P}(A)$) si è introdotta la successione infinita e crescente delle cardinalità infinite $\aleph_0 \prec \aleph_1 \prec \aleph_2 \prec \dots$, che può essere estesa ai casi limite ottenendo cardinali quali $\aleph_\omega$. Si è poi parlato dell'aritmetica dei cardinali infiniti: essa è banale per quanto riguarda somma e prodotto ma più interessante per quanto riguarda la funzione esponenziale, che nel caso in cui la base sia 2 corrisponde all'operazione insiemistica $\mathcal{P}$ introdotta in precedenza. Si è giunti così ad enunciare l'ipotesi del continuo, formulata da Cantor nel 1878 e prima nella lista *dei* 23 problemi matematici per il XX secolo, formulata nel 1900 da Hilbert in occasione della sua conferenza al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi. Nel corso del XX secolo si è dimostrato che l'ipotesi del continuo è indipendente dagli assiomi per la teoria degli insiemi codificati nella teoria di Zermelo-Fraenkel (ZFC). Nel 1940 il matematico austriaco Kurt Gödel (1906–1978) mostrò che ZFC non dimostra che l'ipotesi del continuo è falsa, mentre nel 1963 il matematico statunitense Paul J. Cohen (1934–2007) mostrò che ZFC non dimostra l'ipotesi del continuo.

2.4 La voce della scuola

Due docenti del liceo "Luigi Magrini" di Gemona del Friuli hanno subito colto con entusiasmo l'occasione di partecipare al PLS sull'Infinito matematico, in quanto l'attività poteva avere due valenze: un piacevole ripasso e un utile approfondimento per loro medesimi un arricchimento per la loro professionalità e una interessante attività didattica extrascolastica per gli studenti del liceo, che sentivano la necessità e il desiderio di ampliare le proprie conoscenze e, cosa più importante, la propria mente.

Al hanno partecipato 21 studenti del liceo scientifico, così ripartiti: 1 frequentante la classe seconda, 1 la classe terza e 19 la classe quarta.

L'adesione è stata immediata e non spinta dall'insegnante: durante i cinque anni del liceo le occasioni per fare un cenno, un link al tremendo, magico, imprevedibile "infinito" sono numerose, a partire già dalla classe prima: pensiamo ai numeri naturali, interi e razionali posti sulla retta numerica, per aggiungere in seconda quelli irrazionali; pensiamo ai numeri primi; pensiamo agli insiemi infiniti proposti in insiemistica; pensiamo alla direzione (vista come classe di equivalenza nella relazione di parallelismo fra le rette del piano); pensiamo al comportamento del coefficiente angolare di una retta che tende a $+\infty$ per trasformarsi in un attimo a $-\infty$... (basta fare un balzo oltre la retta verticale); pensiamo agli asintoti dell'iperbole in terza, agli asintoti delle funzioni tangente, esponenziale e logaritmiche in quarta, per intensificare poi tali incontri sconvolgenti proseguendo verso la classe quinta, dove l'infinito sembra un "argomento di accumulazione"... ma i nostri studenti non sono ancora arrivati in quinta; tanti studenti hanno già incontrato l'hotel Hilbert per vie non strettamente scolastiche e in classe chiedono chiarimenti perché si rendono conto di non aver capito in realtà bene come funzioni... qualcosa sfugge; qualcuno ha sentito parlare dell'ipotesi del continuo perché ormai, più che una volta, i libri matematici divulgativi e gli articoli matematici su qualche quotidiano o rivista sono sempre più frequenti. Tutto questo per dire che la curiosità sull'argomento c'era già.

Ad essere sinceri, alla curiosità sull'argomento, dobbiamo aggiungere il desiderio di venire a contatto con l'ambiente universitario, di entrare all'Università, di conoscere professori universitari.

I docenti Giovanna D'Agostino e Alberto Marcone hanno trattato l'argomento in modo molto didattico e professionale partendo sempre da "semplici" esercizi-quesiti-provocazioni per aumentarne via via la difficoltà, concludendo ogni conquista con il giusto rigore e la giusta dose di teoria.

Partendo dal concetto di funzione biettiva, con molti esercizi i professori hanno gradualmente portato gli studenti all'assimilazione di concetti quali:

- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Z}$;
- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Q}$;
- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}^2 \equiv \mathbb{N}^3 \equiv \mathbb{N}^4 \equiv \ldots \mathbb{N}^k$;
- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}^*$ dove $\mathbb{N}^*$ è l'insieme di tutte le successioni finite di numeri naturali;
- $\mathbb{N} \equiv \{x | x$ è un numero reale algebrico$\}$.

Gli studenti sono quindi entrati con intuito, sorpresa e meraviglia nel celebre Hotel Hilbert, l'hotel con un infinità numerabile di camere, tutte occupate e con stupore hanno dovuto ammettere, dopo semplici ma profondi e acuti ragionamenti, che:

- un segmento qualsiasi ha tanti punti quanti l'intera retta,
- una figura piana ha tanti punti quanti l'intera retta,
- il piano ha tanti punti quanti l'intera retta,
- un cubo ha tanti punti quanti l'intera retta,
- un cubo n-dimensionale ha tanti punti quanti l'intera retta, quanti un qualsiasi segmento non nullo.

La sorpresa finale è stata scoprire che

- ci sono infiniti numeri infiniti, rappresentanti insiemi di cardinalità diverse,
- con facilità si può ottenere un infinito di ordine superiore costruendo l'insieme delle parti di un insieme infinito.

Gli studenti hanno svolto numerosi esercizi proposti dai docenti, i loro ragionamenti hanno percorso tante strade interessanti e stimolanti e con aggiustamenti, raddrizzamenti e ripensamenti hanno scalato le vette che li hanno portati ad apprendere il concetto matematico di infinito.

Concludendo in modo sincero, gli studenti sono stati entusiasti dell'attività loro proposta, non tutti sono arrivati in cima alle vette e a più di qualcuno qualche dubbio è rimasto... ma va bene così.

2.5 Ringraziamenti

L'organizzazione e lo svolgimento del laboratorio sono il lavoro congiunto di Giovanna D'Agostino e Alberto Marcone: senza il contributo della prima il laboratorio stesso non si sarebbe svolto.

Riferimenti bibliografici

[42] André Deledicq e Francis Casiro. *Addomesticare l'infinito*. Edizioni Kangourou Italia, 2005.

[72] Lucio Lombardo Radice. *L'infinito*. Editori Riuniti, 1981.

EQUAZIONI LINEARI E MATRICI: LA MATEMATICA IN RETE

DIMITRI BREDA, CLARA VERONESE

3.1 Introduzione

Queste pagine riassumono attività svolte per il Laboratorio "Equazioni lineari e matrici: la matematica in rete" del Piano Nazionale Lauree Scientifiche (PLS). Tali attività, rivolte a una selezione di alunni di quarta provenienti dall'Istituto Tecnico Commerciale "Antonio Zanon" di Udine, sono state progettate congiuntamente dagli autori e dall'insegnante Stefania Pividori del suddetto Istituto.

In accordo con le direttive del PLS, gli argomenti sviluppati non sono stati trattati in modo meramente nozionistico, ma con l'intento di stimolare la curiosità e l'interesse dei partecipanti nei confronti di tematiche che richiedono nozioni avanzate rispetto al programma ministeriale di matematica previsto per l'istruzione secondaria ma che, tutto sommato, si possono spesso incontrare nella vita quotidiana, soprattutto in una realtà permeata dall'intenso utilizzo della tecnologia e dell'informatica come quella attuale.

A tale scopo, vista la disponibilità dei laboratori della Facoltà di Scienze MFN dell'Università di Udine, dove si è svolta parte dell'attività, ci si è avvalsi del software MATLAB© come veicolo di apprendimento. Rimandiamo una volta per tutte gli eventuali lettori dall'interesse "insaziabile" a [80, 79], sottolineando che parte del materiale presentato è tratto da tali riferimenti, frutto del creatore stesso di Matlab, Cleve Moler.

Riguardo alla struttura delle attività, si osserva che il laboratorio è iniziato con la conferenza "Scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!", tenuta dal prof. Breda presso l'Istituto aderente, allo scopo di introdurre gli alunni alle tematiche trattate [22]. In seguito gli insegnanti hanno condotto una fase di "allineamento" dei requisiti, relativa ai vettori, alle matrici e ai sistemi di equazioni lineari. Per brevità escludiamo qui la trattazione di questi argomenti, rimandando alla Sezione 2 della dispensa completa [23]. Diciamo solamente che vettori e matrici sono stati introdotti nel caso bidimensionale, ovvero il più semplice possibile, tralasciandone le più profonde connotazioni algebriche e geometriche per le ragioni premesse. Al di là delle esigenze di semplificazione, questo caso si presta ottimamante all'interpretazione geometrica della matrice come trasformazione lineare nel piano cartesiano. Dopo aver introdotto - e "digerito" - operazioni quali il prodotto scalare di vettori e il prodotto righe-colonne di matrici, sono stati rivisitati sotto un'altra prospettiva i sistemi di equazioni lineari, già ben conosciuti dagli studenti. La parte finale di questa fase è stata dedicata all'analisi dei costi computazionali che comportano le operazioni base dell'algebra matriciale, accompagnando il tutto con esempi ed esercizi allo scopo di avvicinare gradualmente gli studenti all'utilizzo di Matlab.

Si è giunti quindi allo “stage” degli alunni presso i laboratori della Facoltà, dove sono state impartite le nozioni base di Matlab con relative implementazioni di codici e le fasi di approfondimento e verifica. Apprese e consolidate tali nozioni, ci siamo addentrati nel mondo della rete e del World Wide Web in particolare. L’obiettivo era quello di comprendere gli aspetti fondamentali che permettono di ordinare le informazioni in un mondo tanto vasto come il web, capire la modellizzazione matematica che è ivi nascosta, per arrivare infine a realizzare un’implementazione Matlab dell’algoritmo PAGERANK© utilizzato da GOOGLE©. Tale parte è la principale in queste brevi note.

È bene avvisare il lettore più preparato che le esigenze di semplificazione emerse nella scrittura di queste note (e di [23]) hanno spesso invaso lo spazio normalmente destinato al rigore e alla completezza caratteristici di una trattazione matematica. Sottolineiamo infine che i dati di seguito riportati si riferiscono al 2012, anno di svolgimento delle attività e di stesura di [23].

3.2 Inquadramento storico

Internet e il *World Wide Web* (di seguito semplicemente web) rappresentano fonti di problemi matematici tanto interessanti quanto difficili, almeno a livello computazionale. Tra essi potremmo annoverare la gestione dei flussi di informazioni, la loro ricerca e il loro ordinamento. E’ bene sottolineare che il problema della ricerca delle informazioni nel contesto del web è abbastanza differente da ciò che avviene (ad esempio) in una biblioteca. I motivi sono diversi: la dimensione del web (numero di pagine) è di gran lunga maggiore di quella di normali cataloghi di documenti (miliardi contro milioni o migliaia); il web si evolve molto più rapidamente di quanto lo possa fare il patrimonio di una biblioteca; la struttura a *collegamenti ipertestuali* (i *link*) è una caratteristica peculiare del web che non si trova altrove. Alla luce di tali caratteristiche, l’ordinamento delle informazioni presenti nel web viene a rivestire un ruolo particolarmente cruciale. Non sorprende dunque che quest’ultimo rappresenti un argomento di ricerca attuale e tra i più gettonati. Tra l’altro è una tematica molto recente, si pensi che i primi lavori scientifici apparsi in letteratura risalgono appena alla fine degli anni ’90. D’altronde la prima volta che si sono connessi due computer tra loro risale al 1969, il protocollo TCP/IP (Transmission Control Protocol/Internet Protocol) è stato introdotto negli anni ’70, l’ipertesto HTTP (Hyper Text Transfer Protocol) negli anni ’80 e il web ha fatto il suo ingresso ufficiale nella storia il 6 agosto 1991 (esattamente 46 anni dopo Hiroshima).

La tecnologia sviluppata da Google non è certamente l’unica a soddisfare l’esigenza di centinaia di milioni (poco più di un paio di miliardi) di utenti di trovare le informazioni desiderate in rete. Abbiamo deciso di occuparci esclusivamente di questa (in maniera semplificata), dato il suo notevole successo attuale. Altri metodi (vecchi e nuovi) condividono comunque con Google alcuni aspetti fondamentali: sfruttano la caratteristica struttura a link del web (*teoria dei grafi*); descrivono il problema con matrici e vettori (*algebra lineare*); lo interpretano in senso probabilistico (*teoria della probabilità*) *e* lo risolvono con metodi efficienti (*analisi numerica*).

Nel loro famoso lavoro (disponibile in rete [86]), Larry Page e Sergey Brin (fondatori di Google) spiegano i concetti fondamentali con cui hanno stabilito le regole per ordinare il contenuto del web. Al tempo erano due studenti, entrambi venticinquenni, della Stanford University. Nella prossima sezione partiamo proprio dagli aspetti principali della loro teoria, riprendendo il percorso seguito durante la conferenza.

3.3 Descrizione

L'obiettivo che ci poniamo è quello di classificare (*to rank* in inglese) le pagine (*pages*) del web secondo la loro *importanza relativa* (e non assoluta: ci interessa sapere se una pagina è più importante di un'altra, ma non quanto è importante in assoluto). Da qui il nome dell'algoritmo noto come *PageRank* (brevettato dalla Stanford University). Ma che cos'è l'importanza (di seguito detta anche *pagerank*, appunto) di una pagina web? Tra le molte definizioni possibili, i criteri proposti da Page e Brin sono i seguenti:

(G1) il pagerank di una pagina è indipendente dal suo contenuto;

(G2) il pagerank di una pagina è trasferito in parti uguali alle pagine collegate in uscita da questa (mediante gli *outlink*);

(G3) il pagerank di una pagina è la somma delle frazioni di pagerank delle pagine collegate a questa in entrata (mediante gli *inlink*).

I collegamenti di cui sopra si riferiscono, ovviamente, ai link ipertestuali tra le varie pagine. Consideriamo, ad esempio, la piccolissima porzione di web schematizzata in Figura 3.1. La pagina 1 ha un pagerank 100 e, avendo 2 outlink, ne trasferirà 50 alla pagina 3 e 50 alla pagina 4 (criterio (G2)). La pagina 3 ha due inlink, riceve così un pagerank di 50 (metà) dalla pagina 1 e un pagerank di 10 (un terzo) dalla pagina 2, totalizzando quindi un pagerank di 60 (criterio (G3)). Infine, osserviamo come tali calcoli siano stati fatti senza conoscere il contenuto delle pagine (criterio (G1)).

Partendo da queste tre semplici regole svilupperemo il modello matematico su cui si basa il motore di ricerca Google. Inizieremo con un modello piuttosto primitivo, che per questo richiede alcune ipotesi semplificative rispetto alla situazione reale (Sezione 3.3). Impareremo poi a risolvere in maniera efficiente il problema matematico associato (Sezione 3.3). Infine rimuoveremo le ipotesi iniziali per avvicinarci il più possibile alla realtà (Sezione 3.3). Nel frattempo, lungo il percorso, forniremo un'interpretazione alternativa a quella algebrica.

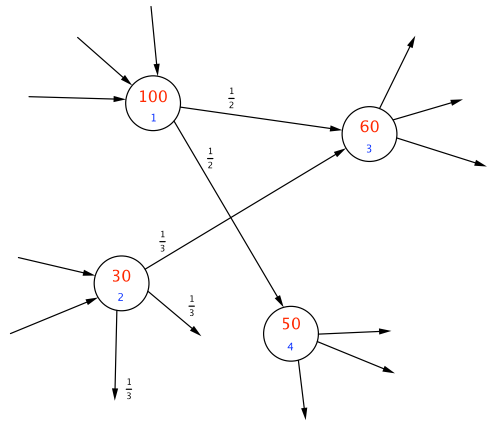


Figura 3.1: Pagine web e pagerank.

Matrici di connettività e navigatori casuali

Innanzitutto, numeriamo le pagine web da 1 ad n e indichiamo con x_i il pagerank della pagina i, $i = 1, 2, \dots, n$. Naturalmente n è molto grande, si stima essere attualmente intorno agli 8 miliardi (`http://www.worldwidewebsize.com/`). Per il momento, visto che dobbiamo introdurre i concetti generali, ci avvaleremo di esempi con n molto basso, dell'ordine dell'unità (un web piccolissimo!). Supponiamo inoltre che ogni pagina abbia almeno un link uscente, ipotesi che, come vedremo in seguito, ha un ruolo fondamentale (anche se palesemente falsa!).

Costruiamo la cosiddetta *matrice di connettività* $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$: l'elemento c_{ij} di C, quello che occupa la riga i-esima e la colonna j-esima, vale

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se c'è un outlink dalla pagina } j \text{ alla pagina } i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ad esempio, per il web di $n = 4$ pagine rappresentato con i suoi link tramite il *grafo* (semplicemente un insieme di nodi e archi orientati) di Figura 3.2, otteniamo:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se osserviamo, ad esempio, la pagina 3, questa riceve i link in ingresso dalle pagine 1 e 2, per cui la riga 3 della matrice C sarà $\mathbf{c}_{3,:} = [1, 1, 0, 0]$. Invece, se osserviamo i link in uscita da questa, daranno luogo alla colonna 3 di C, ovvero $\mathbf{c}_{:,3} = [0, 1, 0, 1]^T$, dato che indirizzano alle pagine 2 e 4.

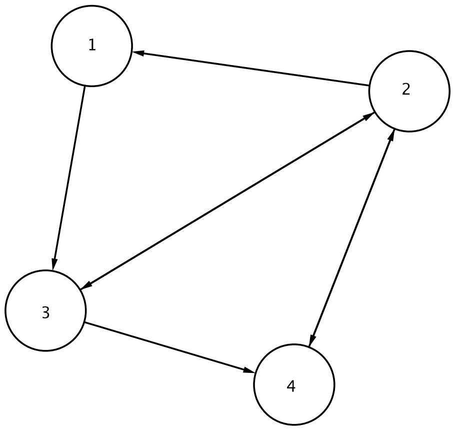


Figura 3.2: Il grafo di un web con $n = 4$ pagine.

Ora che abbiamo costruito la matrice di connettività C, effettuiamo quella che si chiama *normalizzazione*. Prendiamo dunque ciascuna colonna $\mathbf{c}_{:,j}$ di C e la dividiamo per il numero di outlink out_j della pagina relativa (possiamo farlo perchè abbiamo supposto che ve ne sia almeno uno, quindi $\mathrm{out}_j \neq 0$). Formiamo così la nuova matrice H di colonne:

$$\mathbf{h}_{:,j} = \frac{\mathbf{c}_{:,j}}{\mathrm{out}_j}, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Questa operazione realizza il corrispondente matematico del criterio (G2). Da notare che risulta essere $0 \leq h_{ij} \leq 1$ per $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $\sum_{i=1}^{n} h_{ij} = 1$ per $j = 1, 2, \ldots, n$. Inoltre, il numero di outlink della pagina j non è altro che la somma degli elementi di $\mathbf{c}_{:,j}$:

$$\mathrm{out}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Tornando all'esempio di Figura 3.2, abbiamo $\mathrm{out}_1 = 1$, $\mathrm{out}_2 = 3$, $\mathrm{out}_3 = 2$ e $\mathrm{out}_4 = 1$, da cui

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Come stabilito dal criterio (G2) la pagina 3, ad esempio, trasferirà due metà del suo pagerank, in particolare alle pagine 2 e 4 (e così per le altre).

Come osservato, avendo assunto che ogni pagina abbia almeno un outlink, la somma degli elementi di ciascuna colonna di H vale sempre 1. Si parla in questo caso di matrice *stocastica* (a colonne). Per spiegare questa terminologia ricorriamo ad un modello interpretativo di tipo probabilistico. Immaginiamo dunque di osservare un *navigatore* che sta visitando il web di Figura 3.2 e che sia obbligato a cambiare pagina ad ogni istante utilizzando *a caso* gli outlink a disposizione. Supponiamo ad esempio che ad un certo istante di tempo tale navigatore stia visitando la pagina 3 (che ha 2 outlink). Allora all'istante successivo dovrà per forza di cose trovarsi a visitare la pagina 2 o la pagina 4. Siccome si muove a caso, la probabilità di scegliere una o l'altra pagina è suddivisa in modo uguale, quindi 1/2 e 1/2 (o 50% e 50% se preferite). Per lo stesso principio, se scegliesse la pagina 4 (che ha 1 outlink), all'istante successivo si troverebbe obbligatoriamente sulla pagina 2, giungendovi con probabilità 1 (o 100%). Se invece avesse scelto la pagina 2 (che ha 3 outlink), allora all'istante successivo si ritroverebbe a visitare rispettivamente le pagine 1, 3 o 4 con uguale probabilità, ovvero 1/3, 1/3 e 1/3 (o tutte 33.333...%).

La metafora probabilistica di cui sopra va sotto il nome di *navigatore casuale*. Sotto questo punto di vista, la matrice H è una matrice di *transizione di probabilità*: il suo generico elemento h_{ij} rappresenta la probabilità che ad un certo istante il navigatore casuale passi dalla pagina j alla pagina i, seguendo ovviamente l'outlink $j \to i$. Per usare una terminologia più tecnica (e di richiamo), il navigatore casuale è un modello di *random walk* lungo il grafo associato al web esaminato e rappresenta una *catena di Markov* (Andrej [1856-1922], matematico e statistico russo).

Veniamo adesso al criterio (G3). Esso esprime una legge di tipo *ricorsivo*: il pagerank di una pagina è definito sulla base del pagerank di altre pagine (quelle che hanno outlink verso di essa in particolare). Seguendo tale ricetta, possiamo ricostruire il pagerank di ciascuna pagina. Ogni pagina, come detto, riceve solo una frazione del pagerank di ogni altra pagina che abbia un outlink diretto alla prima. Tale frazione corrisponde al relativo elemento della matrice H, ed esprime appunto la probabilità di percorrere effettivamente quel link (e quindi di trasferire tramite esso parte del pagerank della pagina di partenza). Quindi vale

$$x_i = h_{i1}x_1 + h_{i2}x_2 + \cdots + h_{in}x_n, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vista l'esperienza acquisita con l'algebra lineare, possiamo scrivere

$$\mathbf{x} = H\mathbf{x},$$

dove $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ è il cosiddetto *vettore pagerank*. Attenzione: $\mathbf{x}$ è proprio l'incognita del nostro problema!

E a che cosa corrisponde tale problema? L'espressione $\mathbf{x} = H\mathbf{x}$ non rappresenta un vero e proprio sistema lineare: il vettore incognito compare anche al posto di quello noto. D'altro canto, non è nemmeno un prodotto matrice-vettore. Se però ci ricordiamo della matrice identica I di dimensione n, allora essendo $\mathbf{x} = I\mathbf{x}$, sostituendo al primo membro otteniamo $I\mathbf{x} = H\mathbf{x}$, ovvero $(I - H)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Quest'ultimo è un vero e proprio sistema lineare, con matrice dei coefficienti $I - H$ $[I - A]$, vettore incognito $\mathbf{x}$ e vettore noto $\mathbf{0}$ (un caso veramente particolare). Ad esempio, sempre con riferimento al web di Figura 3.2, otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bene, visto che siamo riusciti a tradurre il tutto in un sistema lineare, sappiamo anche come risolverlo. Purtroppo però abbiamo visto alla conferenza [22] che il metodo di eliminazione gaussiana (seguito dalla sostituzione) comporta un costo di $O(2/3n^3)$ flop. Essendo n dell'ordine dei miliardi, ci ritroveremmo a dover fare miliardi di miliardi di miliard di flop, troppi anche per i calcolatori più potenti (un milione di anni con il "K-computer"! `http://www.fujitsu.com/global/about/tech/k/`, `http://www.top500.org/`). Come superiamo questo ostacolo? La risposta nella prossima sezione.

La fortuna di Google: il metodo delle potenze e tanti zeri

Visto il costo non affrontabile del metodo di Gauss, abbandoniamo questa strada in favore di un'idea che si applica spesso in matematica: l'*iterazione*. In questo contesto, potremmo riassumere la strategia dicendo che rinunciamo alla soluzione esatta $\mathbf{x}$ ma, partendo da un'opportuna approssimazione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$, costruiamo una successione di soluzioni $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}, \ldots$ via via sempre più vicine a quella esatta (questa almeno è la nostra speranza). Quando siamo sufficientemente "vicini", ci fermiamo. Il vantaggio consiste nel costruire queste soluzioni approssimate in modo più semplice e ad un costo computazionale molto più basso.

Tornando al problema $\mathbf{x} = H\mathbf{x}$, potremmo procedere iniziando da un certo $\mathbf{x}^{(0)}$ e calcolare $\mathbf{x}^{(1)}$ come $\mathbf{x}^{(1)} = H\mathbf{x}^{(0)}$, poi $\mathbf{x}^{(2)} = H\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(3)} = H\mathbf{x}^{(2)}$ e via dicendo. Ad ogni passo calcoliamo dunque la soluzione "nuova" facendo il prodotto della matrice H con la soluzione "vecchia". In generale, dopo k di questi passi ci ritroviamo con

$$\mathbf{x}^{(k)} = H\mathbf{x}^{(k-1)}, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Ma quando ci si ferma? Potrebbe (il condizionale è d'obbligo per ora) essere ragionevole fermarsi quando due soluzioni successive, quindi $\mathbf{x}^{(k)}$ ed $\mathbf{x}^{(k-1)}$, differiscono di poco, cioè quando la lunghezza del vettore differenza (o errore)

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}$$

è prossima allo zero, o perlomeno molto piccola. Generalizzando il Teorema di Pitagora, la lunghezza $\|\mathbf{e}^{(k)}\|$ di $\mathbf{e}^{(k)}$ risulta (in Matlab basta usare `norm`)

$$\|\mathbf{e}^{(k)}\| = \sqrt{\left(x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\right)^2 + \left(x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}\right)^2}.$$

Ci fermeremo quindi dopo k passi, con k tale per cui $\|\mathbf{e}^{(k)}\| < \mathrm{TOL}$ dove TOL sarà una tolleranza da noi fissata.

L'algoritmo appena presentato è noto come *metodo delle potenze* (perchè secondo voi?) e risale a circa un secolo fa [82, 83, 111]. Applichiamolo ora con riferimento al web di Figura 3.2. Questa volta ci affidiamo a Matlab. Inseriamo

```
>> H=[0,1/3,0,0;0,0,1/2,1;1,1/3,0,0;0,1/3,1/2,0]
H =
         0    0.3333         0         0
         0         0    0.5000    1.0000
    1.0000    0.3333         0         0
         0    0.3333    0.5000         0
```

Inseriamo quindi un vettore soluzione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$. Supponiamo ad esempio che, inizialmente, ogni pagina abbia lo stesso pagerank, quindi $1/n = 1/4$ (capiremo poi perché).

```
>> x=[1/4;1/4;1/4;1/4]
x =
    0.2500
    0.2500
    0.2500
    0.2500
```

Nella nostra implementazione Matlab chiameremo il vettore soluzione sempre `x`. Terremo conto del numero di iterazioni mediante un indice k. Siccome siamo all'inizio, diciamo che siamo al passo $k = 0$:

```
>> k=0;
```

Finalmente possiamo procedere con il metodo, che scriviamo tutto in una riga (!). Quest'ultima la ripeteremo finchè non saremo soddisfatti dell'errore (abbiamo già incontrato l'istruzione `norm`).

```
>> k=k+1,e=norm(H*x-x),x=H*x
k =
     1
e =
    0.2282
x =
    0.0833
    0.3750
    0.3333
    0.2083
>> k=k+1,e=norm(H*x-x),x=H*x
k =
     2
e =
    0.1559
x =
    0.1250
```

k	$\mathbf{e}^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
1	2.2822×10^{-1}	0.0833	0.3750	0.3333	0.2083
11	1.7455×10^{-3}	0.1247	0.3754	0.2502	0.2497
21	1.5752×10^{-5}	0.1250	0.3750	0.2500	0.2500
31	1.4602×10^{-7}	0.1250	0.3750	0.2500	0.2500
41	1.3601×10^{-9}	0.1250	0.3750	0.2500	0.2500
51	1.2677×10^{-11}	0.1250	0.3750	0.2500	0.2500
61	1.1816×10^{-13}	0.1250	0.3750	0.2500	0.2500
71	1.1012×10^{-15}	0.1250	0.3750	0.2500	0.2500

Tabella 3.1: Dati sul metodo delle potenze per il web di Figura 3.2.

```
         0.3750
         0.2083
         0.2917
>> k=k+1,e=norm(H*x-x),x=H*x
k =
          3
e =
         0.0780
x =
         0.1250
         0.3958
         0.2500
         0.2292
```

Già dopo 3 passi abbiamo ridotto l'errore. La Tabella 3.1 riporta i dati sui calcoli successivi ogni 10 passi. Osserviamo come si ottengono errori molto piccoli già con poche decine di passi. La soluzione esatta (potete verificarlo) è $\mathbf{x} = [0.125, 0.375, 0.250, 0.250]^T$: concludiamo che, supponendo 1 l'importanza di tutto il web, allora 1/8 è nella pagina 1, 3/8 nella 2 e 1/4 in ciascuna delle pagine 3 e 4.

Osservazione 3.1. La Tabella 3.1 non deve trarre in inganno: per motivi di spazio i valori di pagerank (ultime quattro colonne) sono riportati con 4 cifre significative, per cui essi possono sembrare esatti per $k \geq 21$. In realtà quelli che si vedono sono valori arrotondati a 4 cifre. Matlab li calcola effettivamente con 15 cifre significative, fatto che corrisponde alla massima precisione del sistema di rappresentazione dei numeri di macchina. Ecco perché è inutile proseguire le iterazioni dopo che l'errore scende sotto 10^{-15}: tutto quello che segue la 15^a cifra non avrebbe comunque senso!

E dopo k passi, quanto sarà costata la nostra soluzione finale $\mathbf{x}^{(k)}$ (che è comunque un'approssimazione)? Per saperlo basta capire quanto costa eseguire ogni singolo passo dell'algoritmo. Osserviamo che ogni passo comporta sempre la stessa operazione, cioè il prodotto tra la matrice di connettività normalizzata H e il vettore soluzione del passo precedente: $\mathbf{x}^{(k)} = H\mathbf{x}^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Quindi un singolo passo costa in genere $O(n^2)$ flop, per un totale *di* $O(kn^2)$ flop se facciamo k

passi. Se pensiamo che in generale bastano poche decine di passi (tipicamente $k \ll n$), è già un bel risparmio. Ma non è sufficiente: siamo ancora a miliardi di miliardi di operazioni.

Abbiamo visto che ogni passo del metodo delle potenze consiste in un prodotto matrice-vettore, in particolare $H\mathbf{x}$. Abbiamo imparato che le n componenti del vettore risultante si calcolano ciascuna come prodotto scalare della relativa riga della matrice per il vettore colonna. Ad esempio per la componente i-esima:

$$x_i^{(k)} = h_{i1}x_1^{(k-1)} + h_{i2}x_2^{(k-1)} + \cdots + h_{in}x_n^{(k-1)} = \mathbf{h}_{i,:} \cdot \mathbf{x}^{(k-1)}.$$

Ma siamo sicuri che tutti gli elementi di H sono diversi da 0? È proprio qui il nocciolo della questione: $h_{ij} \neq 0$ se e solo se esiste il link $j \to i$. Ma, in generale, i link esistenti tra le pagine web sono molto meno di tutti quelli possibili. Questo si traduce nel fatto che molti elementi di H sono 0 e che quindi H ha pochi elementi diversi da 0, diciamo nnz. Di conseguenza, il costo ad ogni passo del prodotto matrice-vettore è $O(\text{nnz})$ e non più $O(n^2)$ [23, Sezione 2.5]. Questa ragione è alla base della ragguardevole riduzione del costo computazionale dato che per il web il numero di link esistenti nnz è di gran lunga inferiore al quadrato del numero delle pagine web. In altre parole, ogni pagina ha ben pochi link rispetto al totale delle pagine.

Per il web di Figura 3.2, la matrice H risulta avere $n^2 = 16$ elementi, di cui solo nnz $= 7$ diversi da 0 (meno della metà). 7 è ovviamente il numero totale di link esistenti, come si può verificare osservando il grafo associato. Come esempio reale, riportiamo in Figura 3.3 una rappresentazione della matrice H per il web sottostante la pagina `http://www.harvard.edu`, punto di accesso del sito della Harvard University. In tale rappresentazione, ogni punto colorato è un elemento diverso da 0 della matrice, ovvero un link. Come si evince a colpo d'occhio, i link esistenti sono davvero pochi. Infatti si contano $n = 500$ pagine, con un totale di nnz $= 2636$ link (notare che $n^2 = 250000$, circa 1000 volte tanto!).

Ma quanto vale nnz per il web reale? Per abbozzare una stima (ma come ordine di grandezza non andremo molto distanti), ci basiamo sul fatto che, mediamente, una pagina ha pochi link entranti. Supponiamo un centinaio. Allora se assumiamo che $n = 8$ miliardi, seguirà nnz $= 800$ miliardi. Quindi un passo del metodo delle potenze costa circa 800 miliardi di flop. Mediamente potremmo aspettarci che $k = 100$ passi siano più che sufficienti a raggiungere un'accuratezza soddisfacente per la soluzione. Quindi in totale dobbiamo eseguire 80 mila miliardi di flop. A questo punto decidiamo di eseguire il calcolo con un computer capace di 2 Gflops (niente di speciale oggigiorno; 1 flops = 1 flop al secondo). Ovviamente supponiamo che la memoria sia sufficiente a contenere la matrice H (e questo invece è alquanto difficile, ma questo è un altro discorso[...]). Allora per fare 80 mila miliardi di flop ad una velocità di calcolo di 2 Gflops servono 40 mila secondi, ovvero circa 11 ore: nemmeno mezza giornata. Contando che con Gauss e il "K-computer" ci volevano 1 milione di anni, possiamo essere più che soddisfatti!

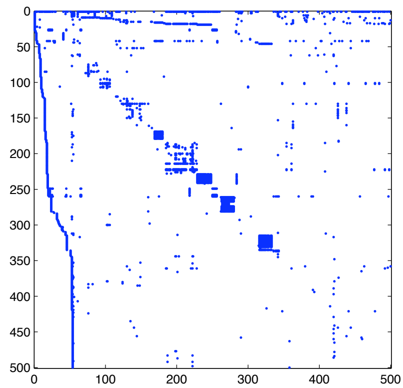


Figura 3.3: La matrice di connettività H del web di Harvard.

Pagine penzolanti e ricerche personalizzate

Vista la riduzione di costo ottenuta al termine della precedente sezione, sembrerebbe che abbiamo affrontato il problema nel modo giusto. Ma non dimentichiamo niente? Vediamo il prossimo esempio.

Consideriamo un altro web di $n = 4$ pagine rappresentato in Figura 3.4. Con le regole viste, la matrice di connettività normalizzata risulta:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ora applichiamo il metodo delle potenze si osserva che dopo ogni 3 passi ci si ritrova al punto di partenza (Tabella 3.2).

Il web dell'esempio precedente è rappresentato da una matrice H per la quale il metodo delle potenze entra in un ciclo (di *periodo* 3). Eppure soddisfa tutte le ipotesi che abbiamo assunto. Non è dunque vero che tali ipotesi sono sufficienti a garantire quella che si chiama *convergenza* del metodo, ovvero il fatto che aumentando il numero di iterazioni ci si avvicina sempre più alla soluzione esatta. Questo richiede un concetto di *limite*: $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$.

C'è poi un ulteriore problema: l'ipotesi che abbiamo fatto in partenza, cioè che ogni pagina abbia almeno un link in uscita ($\mathrm{out}_j \neq 0$) non è affatto veritiera. Esistono infatti nel web reale molte pagine che non hanno link uscenti ($\mathrm{out}_j = 0$). Anzi, sono la maggior parte. Questo si traduce in una matrice di connettività C con intere colonne vuote (cioè di soli zeri). In particolare, le pagine che non hanno link uscenti si chiamano anche *penzolanti* (in analogia con la rappresentazione del relativo grafo). Se pensiamo al modello del navigatore casuale, questo non funziona più: navigando solo tramite link, se si visita una pagina penzolante vi si rimane incastrati per sempre.

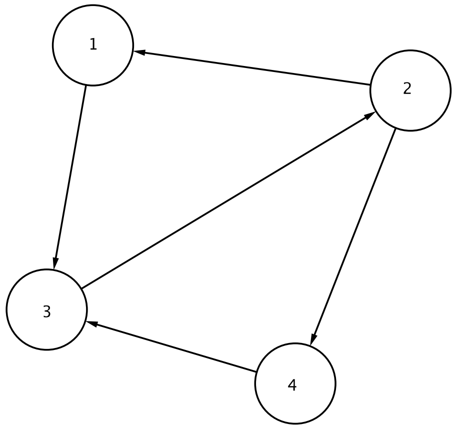


Figura 3.4: Il grafo di un altro web con $n = 4$ pagine.

k	$\mathbf{e}^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
1	0.3062	0.1250	0.2500	0.5000	0.1250
2	0.3536	0.1250	0.5000	0.2500	0.1250
3	0.3062	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
4	0.3062	0.1250	0.2500	0.5000	0.1250
5	0.3536	0.1250	0.5000	0.2500	0.1250
6	0.3062	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
7	0.3062	0.1250	0.2500	0.5000	0.1250
8	0.3536	0.1250	0.5000	0.2500	0.1250
9	0.3062	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
10	0.3062	0.1250	0.2500	0.5000	0.1250
11	0.3536	0.1250	0.5000	0.2500	0.1250
12	0.3062	0.2500	0.2500	0.2500	0.2500
13	0.3062	0.1250	0.2500	0.5000	0.1250
14	0.3536	0.1250	0.5000	0.2500	0.1250

Tabella 3.2: Dati sul metodo delle potenze per il web di Figura 3.4.

Per risolvere entrambi i problemi appena menzionati, gli ideatori di Google hanno scelto una "scorciatoia" che consiste nell'assicurarsi:

- da una parte di non bloccare il navigatore casuale durante la sua random walk;

- dall'altra di soddisfare ipotesi matematiche che garantiscono la convergenza del metodo delle potenze (per qualunque scelta del vettore pagerank iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$).

Tale duplice obiettivo viene raggiunto andando a modificare la matrice originale eliminando tutti gli zeri presenti (NB: questo non è *necessario*, ma è *sufficiente*), quindi creando una matrice sempre stocastica (a colonne) ma con elementi tutti *strettamente positivi*. L'operazione viene fatta in due passi partendo dalla matrice H.

Il primo passo (da H ad H') serve ad eliminare le pagine penzolanti. Se la matrice originale H presenta delle colonne vuote, allora queste vengono riempite ovunque con $1/n$. Quindi, partendo dalla matrice C costruita come al solito, si ottiene direttamente H' come

$$h'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{c_{ij}}{\mathrm{out}_j} & \text{se } \mathrm{out}_j \neq 0 \\ \dfrac{1}{n} & \text{se } \mathrm{out}_j = 0. \end{cases}$$

Così siamo sicuri di non bloccare il navigatore casuale: se ad un dato istante questi si trova su una pagina con link uscenti, allora ne sceglie uno a caso (quindi probabilità $1/\mathrm{out}_j$), altrimenti immette un nuovo indirizzo nella barra degli indirizzi, sempre a caso (quindi probabilità $1/n$ dato che ci sono n possibilità). Possiamo scrivere in maniera compatta la relazione precedente (o meglio il passaggio da H ad H') nel seguente modo:

$$H' = H + \frac{1}{n}\mathbf{u}\mathbf{d}^T,$$

dove $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ è il vettore colonna con elementi tutti 1 e $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ è il vettore colonna di componenti

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{se la pagina } i \text{ è penzolante} \\ 0 & \text{se la pagina } i \text{ non è penzolante.} \end{cases}$$

Il prodotto $\mathbf{u}\mathbf{d}^T$ segue le stesse regole del prodotto righe-colonne di matrici, perciò il prodotto del vettore colonna $\mathbf{u}$ per il vettore riga $\mathbf{d}^T$ dà luogo ad una matrice di n righe ed n colonne. In particolare, per tale matrice risultante, tutte le colonne relative a pagine non penzolanti saranno nulle, mentre quelle relative a pagine penzolanti avranno elementi tutti 1; la moltiplicazione successiva per lo scalare $1/n$ conclude l'operazione voluta, trasformando H in H'. Osservate che il prodotto $\mathbf{u}\mathbf{d}^T$ è il "contrario" del prodotto scalare, che corrisponde al prodotto righe-colonne di un vettore riga per uno colonna.

Ad esempio, per il web di Figura 3.5 (lo stesso di Figura 3.2, ma con il collegamento $1 \to 3$ rimosso), la pagina 1 è penzolante e, secondo la regola appena spiegata, risulta $\mathbf{d} = [1, 0, 0, 0]^T$. Dunque:

$$H' = H + \frac{1}{n}\mathbf{u}\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Con Matlab:

```
>> H=[0,1/3,1/2,0;0,0,0,1;0,1/3,1/2,0;0,1/3,0,0]
H =
          0    0.3333    0.5000         0
          0         0         0    1.0000
          0    0.3333    0.5000         0
          0    0.3333         0         0
>> u=ones(n,1)
u =
     1
     1
     1
     1
```

Il vettore **d** può essere costruito nel seguente modo:

```
>> d=not(sum(H,1))'
d =
     1
     0
     0
     0
```

ovvero negando (e trasponendo) il vettore somma delle colonne di H. Proseguendo:

```
>> H1=H+u*d'/n
H1 =
     0.2500    0.3333    0.5000         0
     0.2500         0         0    1.0000
     0.2500    0.3333    0.5000         0
     0.2500    0.3333         0         0
```

Abbiamo usato anche la nuova istruzione `ones`, il cui significato dovrebbe risultare chiaro. Cosa più importante, osserviamo come Matlab esegue qualunque prodotto con “`*`”, arrangiandosi a capire se sta moltiplicando scalari, vettori o matrici (e se questo si può fare!).

Il secondo passo (da H' ad H'') serve ad assicurarci la convergenza del metodo delle potenze. Per realizzarlo togliamo gli zeri rimanenti

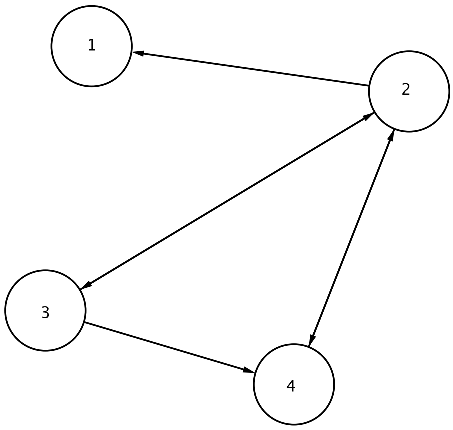


Figura 3.5: Il grafo di un web con $n = 4$ pagine, di cui una penzolante.

di H' nel seguente modo. Scegliamo un numero $\alpha \in [0,1]$, che esprime una probabilità. Imponiamo quindi al navigatore casuale

- con probabilità α di comportarsi come prima, cioè secondo H';
- con probabilità $1-\alpha$ di immettere invece un indirizzo a caso (probabilità $1/n$), indipendentemente dalla presenza o meno di link uscenti.

Certamente questo modello è più aderente alla navigazione sul web reale: infatti, le possibilità di navigazione offerte all'utente si riducono proprio a muoversi attraverso i link o a digitare nuovi indirizzi indipendentemente dalla presenza o meno di link uscenti. Matematicamente, la nuova matrice H'' si ottiene da H' come

$$h''_{ij} = \alpha h'_{ij} + (1-\alpha)\frac{1}{n}.$$

Osserviamo che in questo secondo passo stiamo semplicemente aggiungendo la quantità costante $(1-\alpha)/n$ in ogni posizione della matrice $\alpha H'$. Quindi:

$$H'' = \alpha H' + (1-\alpha)\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \alpha H' + \frac{1-\alpha}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ma come possiamo esprimere diversamente una matrice con tutti 1? Lo possiamo fare semplicemente con il prodotto righe-colonne del vettore colonna $\mathbf{u}$ di tutti 1 (già introdotto in precedenza) con il suo trasposto riga $\mathbf{u}^T$, ottenendo appunto la matrice $\mathbb{R}^{n\times n}$ di tutti 1:

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Applichiamo quanto appena visto al passaggio da H' ad H'', ottenendo così

$$H'' = \alpha H' + (1-\alpha)\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{n}. \tag{3.1}$$

Riassumendo, questa formula ci dice che il navigatore casuale esce da una certa pagina secondo H' con probabilità α o immettendo un nuovo indirizzo a caso con probabilità $1-\alpha$.

Ma quanto vale α? Google dichiara di utilizzare $\alpha = 0.85$. Aldilà che questo sia vero o meno, certo è che se $\alpha = 0$, allora il navigatore si muove sempre immettendo indirizzi nuovi a caso: $H'' = \mathbf{u}\mathbf{u}^T/n$, mentre se $\alpha = 1$ il navigatore si muove sempre secondo $H'' = H'$, cioè secondo i link esistenti, o immettendo un indirizzo nuovo a caso solo se la pagina in cui si trova è penzolante. Potremmo dunque affermare che una scelta di α prossimo a uno è senz'altro più fedele alla realtà. Ma la questione non finisce qui, come vedremo.

Riprendiamo la matrice H' associata al web di Figura 3.5 e supponiamo $\alpha = 0.85$. Otteniamo allora

$$H'' = 0.85\begin{bmatrix} \frac14 & \frac13 & 0 & 0 \\ \frac14 & 0 & \frac12 & 1 \\ \frac14 & \frac13 & 0 & 0 \\ \frac14 & \frac13 & \frac12 & 0 \end{bmatrix} + 0.15\begin{bmatrix} \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.25 & 0.32 & 0.04 & 0.04 \\ 0.25 & 0.04 & 0.46 & 0.88 \\ 0.25 & 0.32 & 0.04 & 0.04 \\ 0.25 & 0.32 & 0.46 & 0.04 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo come la matrice finale H'' rimane stocastica (a colonne). Il suo significato finale non cambia, rimanendo sempre una matrice di transizione di probabilità: ad esempio, l'elemento $h_{23} = 0.46$ (nella riga 2 e colonna 3) indica che il passaggio dalla pagina 3 alla pagina 2 avviene con il 46% di probabilità. Con Matlab:

```
>> alfa=0.85;
>> H2=alfa*H1+(1-alfa)*(u*u')/n
H2 =
      0.2500      0.3208      0.4625      0.0375
      0.2500      0.0375      0.0375      0.8875
      0.2500      0.3208      0.4625      0.0375
      0.2500      0.3208      0.0375      0.0375
```

Ora, provate voi ad eseguire il metodo delle potenze sulla matrice H''.

Nell'esempio precedente vi è stato chiesto di applicare il metodo delle potenze alla matrice H''. Osserviamo però che questa non ha nemmeno uno zero. Quindi il costo che paghiamo è $O(kn^2)$ flop. Abbiamo dunque perso tutto quanto avevamo guadagnato prima?

La risposta è fortunatamente negativa. Basta solo ragionare e non agire di fretta. Supponiamo allora di aver già costruito H' e riconsideriamo la matrice H'' in (3.1). Assegnato $\mathbf{x}^{(0)}$, il metodo delle potenze diventa, [assegnato $\mathbf{x}^{(0)}$,] $\mathbf{x}^{(k)} = H''\mathbf{x}^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Ma abbiamo visto che, essendo H'' priva di zeri, paghiamo il costo pieno. Se invece sostituiamo l'espressione di H'' nel generico passo del metodo otteniamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} &= \left(\alpha H' + (1-\alpha)\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{n}\right)\mathbf{x}^{(k-1)} \\
&= \alpha H'\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{(\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{x}^{(k-1)}}{n} \\
&= \alpha H'\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{x}^{(k-1)})}{n}, \ k = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Ma quanto vale $\mathbf{u}^T\mathbf{x}^{(k-1)}$? Vediamo:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{x}^{(k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} = x_1^{(k-1)} + x_2^{(k-1)} + \cdots + x_n^{(k-1)},$$

quindi questo prodotto (scalare) restituisce semplicemente la somma del pagerank di tutto il web al passo $k-1$: il pagerank totale. Per capire quanto vale, ci vuole ancora un po' di attenzione. Se $\mathbf{x}$ risolve il problema originale $\mathbf{x} = H''\mathbf{x}$, allora anche $a\mathbf{x}$ risolve lo stesso problema per qualunque numero scalare a, infatti $H''(a\mathbf{x}) = aH''\mathbf{x} = a\mathbf{x}$. Questo vuol dire che se $\mathbf{x}$ è soluzione, allora lo sono anche tutti i vettori paralleli ad $\mathbf{x}$. Dal punto di vista del nostro problema non ha importanza: se il vettore $\mathbf{x}$ ha le componenti in una certa proporzione, allora tale proporzione non cambia se prendo un vettore parallelo ad $\mathbf{x}$. Quindi l'*importanza relativa* delle pagine è sempre la stessa, ed è giusto quello che a noi interessa! Allora, se dobbiamo scegliere uno tra tutti questi vettori paralleli, prendiamo per semplicità quello le cui componenti si sommano a 1, ovvero quello per cui il pagerank totale è 1. Segue quindi $1 = x_1^{(k-1)} + x_2^{(k-1)} + \cdots + x_n^{(k-1)} = \mathbf{u}^T\mathbf{x}^{(k-1)}$. Sostituendo nel generico passo del metodo delle potenze si ottiene infine

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} &= \alpha H'\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}^T\mathbf{x}^{(k-1)})}{n} \\
&= \alpha H'\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{u}}{n}, \ k = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

Ora possiamo fare un ultimo passo andando a sostituire l'espressione esplicita di H' in funzione di H, ottenendo perciò:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} &= \alpha H'\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{u}}{n} \\
&= \alpha\left(H + \frac{1}{n}\mathbf{u}\mathbf{d}^T\right)\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\frac{\mathbf{u}}{n} \\
&= \alpha H\mathbf{x}^{(k-1)} + \frac{1}{n}\mathbf{u}\left[\alpha\mathbf{d}^T\mathbf{x}^{(k-1)} + (1-\alpha)\right],\ k = 1, 2, \ldots.
\end{aligned}$$

La precedente formula ci dice che ciascun passo è composto da un prodotto matrice-vettore (il primo addendo) a cui sommiamo un altro vettore (il secondo addendo). La differenza è che così facendo il prodotto matrice-vettore coinvolge la matrice H, la quale ha (di nuovo) tanti zeri, ripristinando dunque il notevole risparmio computazionale che avevamo raggiunto in precedenza! Ricordiamo che il costo finale è perciò $O(k \cdot \mathrm{nnz})$, dove nnz è il numero totale di link esistenti e k il numero di passi eseguiti con il metodo delle potenze. Per essere precisi, dovremmo tener conto anche del costo del calcolo del secondo addendo, ma facendo un po' di attenzione si può vedere che il prodotto $\mathbf{d}^T\mathbf{x}^{(k-1)}$ non fa altro che sommare l'importanza relativa delle sole pagine penzolanti al passo $k-1$, dando poi luogo ad un unico scalare corrispondente all'espressione tra parentesi quadre. Il costo massimo di questa seconda parte sarebbe dunque n, che sappiamo essere trascurabile rispetto ad nnz.

Osservazione 3.2. La scelta di avere un pagerank totale unitario si presta a completare la metafora del navigatore casuale: ciascuna componente x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, del vettore soluzione $\mathbf{x}$ rappresenta la probabilità di trovarsi sulla pagina i dopo un tempo di navigazione infinito. La soluzione rappresenta quello che si dice stato stazionario della catena di Markov associata e ogni sua componente, sotto questo punto di vista, è sicuramente un fedele indicatore dell'importanza della pagina considerata.

Pagerank finalmente?!

Ora siamo pronti a raccogliere tutto quanto appreso finora in un codice Matlab. Ma questo lo dovete fare voi!

Prima però dobbiamo imparare a scrivere un "programma" Matlab, quello che si chiama un *m-file function*: questo non è altro che un file di testo. Matlab ha il suo editor, altrimenti potete usare tranquillamente un notepad qualunque, a patto che salviate il file con estensione "`.m`". All'interno del corpo si scrivono le istruzioni che prevedete di eseguire, seguendo le regole di sintassi viste sinora senza alcuna differenza. È necessario aggiungere unicamente la relazione Input-Output (I/O), e tutto questo viene inserito nella prima riga di testo, detta "intestazione", che comincia **obbligatoriamente** con la parola `function`. Supponiamo quindi di dover scrivere un *m*-file che implementa un algoritmo di risoluzione di un problema che prende in Input i dati $I_1, I_2, \ldots, I_r$ e fornisce in Output i dati $O_1, O_2, \ldots, O_s$. Allora basterà scrivere come intestazione:

```
function [O1,O2,...,Os]=nome(I1,I2,...Is)
```

dove `nome` è il nome che daremo al file, che quindi sarà intitolato `nome.m`.

Ora avete tutti gli ingredienti per costruire il vostro `prank.m` partendo da una qualunque matrice di connettività non normalizzata: ad essere onesti non li avete proprio tutti, ma ci aspettiamo che facciate delle domande! Nel frattempo vediamo qualche simulazione con quello già scritto (vedi Appendice).

Esercizio 3.3. Costruite la matrice di connettività non normalizzata associata al web rappresentato in figura 3.6 e testate il vostro `prank.m` calcolando il *pagerank* con il valore di default $\alpha = 0.85$. La classifica di importanza deve risultare $P_1, P_6, P_2, P_4, P_3, P_5$.

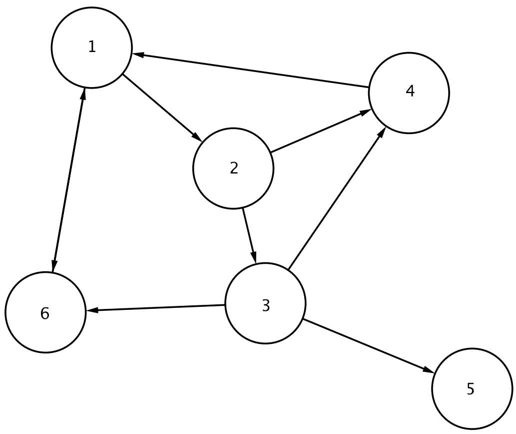


Figura 3.6: Il web di dimensione 6 per l'esercizio 3.3.

Testiamo `prank.m` sulla matrice del web di Harvard. Questa la possiamo caricare (e ispezionare) come

```
>> load harvard
>> whos
  Name          Size                Bytes  Class       Attributes
  C           500x500               15184  logical     sparse
```

Quindi la possiamo "dare in pasto" a `prank.m` come segue:

```
>> [x,ind,e,k]=prank(C,0.85,1e-5,100);
```

ottenendo l'intero vettore pagerank `x` ordinato dalla pagina più importante alla meno importante (che non riportiamo, essendo molto lungo), il vettore `ind` che contiene gli indici delle pagine ordinate secondo `x` ed infine l'errore `e` ed il numero di passi fatti `k`. Possiamo ad esempio vedere chi sono le prime 10 pagine importanti, l'errore e i passi digitando

α	0.9	0.85	0.8	0.5	0.1
k	38	28	22	10	5
ind	7	7	7	7	54
	54	54	54	54	53
	53	53	53	53	15
	18	18	18	15	7
	9	9	15	18	18
	15	15	9	9	9
	10	1	1	1	10
	1	10	10	10	222
	222	222	222	222	1
	76	55	55	55	19

Tabella 3.3: Dati sul metodo delle potenze per il web di Harvard al variare di α.

```
>> ind(1:10),e,k
ans =
     7
    54
    53
    18
     9
    15
     1
    10
   222
    55
e =
  8.7680e-006
k =
    28
```

Proviamo ora a ripetere l'esperimento per diversi valori di α (sempre tra 0 e 1), ad esempio per i valori raccolti in Tabella 3.3. Che cosa notate?

Dall'esempio precedente si osserva che più α è prossimo ad 1, più passi si devono compiere per raggiungere la stessa tolleranza. Contrariamente, più α è prossimo a 0, meno passi si devono compiere. Questo fatto indica che il metodo delle potenze è tanto più veloce quanto più α è vicino a 0. Tutto ciò può essere dimostrato rigorosamente studiando la convergenza del metodo, ma dovremmo introdurre i concetti di *autovalore* e di *autovettore* di una matrice... ma per questi è meglio iscriversi all'università!

D'altro canto possiamo notare che cambiando α cambia pure la classifica delle pagine. Quindi la questione è alquanto delicata: da una parte vorremmo essere veloci (α prossimo a 0), dall'altra vorremmo restare fedeli al web reale (α prossimo a 1).

Affrontiamo infine un'ultima faccenda curiosa. Ricordiamo cha abbiamo modificato la matrice da H ad H'' imponendo alla soluzione $\mathbf{x}$ di soddisfare

$$\mathbf{x} = \alpha H\mathbf{x} + \frac{1}{n}\mathbf{u}\left[\alpha \mathbf{d}^T\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{u}^T\mathbf{x}\right]$$

ovvero

$$\mathbf{x} = \alpha H\mathbf{x} + \frac{1}{n}\mathbf{u}\left[\alpha \mathbf{d}^T\mathbf{x} + (1-\alpha)\right], \tag{3.2}$$

dato che $\mathbf{u}^T\mathbf{x} = 1$. Come abbiamo spiegato, questo equivale a scegliere tra tutti i vettori soluzione paralleli quello che fornisce un pagerank totale pari ad 1, il che è in accordo con la metafora del navigatore casuale: deve infatti muoversi con probabilità 1 ad ogni istante. Come conseguenza si può osservare che stiamo aggiungendo al comportamento di muoversi secondo i link originali H con probabilità α (primo addendo) la possibilità con probabilità α di immettere un nuovo indirizzo a caso se la pagina è penzolante (primo addendo all'interno delle parentesi quadre) oppure di immettere un indirizzo a caso comunque con probabilità $1-\alpha$ (anche se la pagina non è penzolante, secondo addendo all'interno delle parentesi quadre) . Per quanto concerne la scelta di un nuovo indirizzo a caso, questa è uniformemente distribuita rispetto a tutti le pagine, ovvero con probabilità $u_i/n = 1/n$ per ogni pagina x_i, $i = 1,\dots,n$. È una conseguenza della presenza del vettore $\mathbf{u}/n$ davanti all'espressione tra parentesi quadre. Questo corrisponde ad una scelta "democratica" o imparziale. Ed è quella che porta ai risultati principali che si vedono in una normale ricerca con Google. Ma non è l'unica: cosa succede, infatti, se questo nuovo indirizzo non viene scelto così casualmente, ma "forzando" la scelta verso una pagina piuttosto che un'altra? Matematicamente dovremmo sostituire le precedenti probabilità con nuove probabilità p_i/n per la pagina x_i, $i = 1,\dots,n$, con il vincolo che $\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{n} = 1$ ovvero $\sum_{i=1}^n p_i = n$ (come del resto accadeva per il vettore $\mathbf{u}$). Ciò equivale a modificare la (3.2) in

$$\mathbf{x} = \alpha H\mathbf{x} + \frac{1}{n}\mathbf{p}\left[\alpha \mathbf{d}^T\mathbf{x} + (1-\alpha)\right],$$

dove il vettore $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$, detto *vettore di personalizzazione*, permette appunto di forzare in qualche modo il calcolo del pagerank in modo da dare più importanza a certe pagine piuttosto che ad altre, e questo a priori scegliendo opportunamente i vari pesi p_1, p_2, etc.. Questo è quello che succede per i cosiddetti "link sponsorizzati" che compaiono evidenziati in cima (o a destra) della normale lista di risultati. Provate infatti a cercare la parola "automobile" su `http://www.google.it/`. E se proprio non siete stufi, provate pure a modificare il codice `prank.m` per adattarlo a questa nuova versione!

Esercizio 3.4. Modificate il vostro `prank.m` adottando la versione con vettore di personalizzazione $\mathbf{p}$ e, con riferimento al web rappresentato in figura 3.6, provate a scegliere $\mathbf{p}$ in modo tale da far risalire la pagina meno importante in classifica.

3.4 La voce della scuola

L'attività

Nell'anno scolastico 2011/2012 l'Istituto Tecnico "Antonio Zanon" di Udine ha partecipato al Piano Lauree Scientifiche scegliendo il percorso "Equazioni lineari e matrici: la matematica in rete" per le classi 4AM e 4BM. Non era la prima esperienza PLS per i docenti della scuola: la collaborazione il dott. Dimitri Breda, ricercatore presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Udine, era già consolidata.

L'attività è iniziata con una conferenza alla quale hanno partecipato anche tre classi quinte, per un totale di 90 studenti, oltre ad un certo numero di docenti interessati. Successivamente ha coinvolto solo le classi quarte che hanno approfondito autonomamente gli argomenti introdotti dal dott. Breda. In questa fase si è discusso, messo a fuoco ed approfondito gli spunti della conferenza che avevano suscitato particolare curiosità e interesse.

Figura 3.7: conferenza all'IT "Zanon".

Dopo una breve fase di allineamento dei requisiti di carattere matematico, un gruppo di studenti ha partecipato ai workshop nei laboratori della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università degli Studi di Udine. Durante il "mini-stage" gli studenti, apprese e consolidate alcune nuove nozioni, sono stati introdotti nel mondo della Rete e del World Wide Web, con l'obiettivo di comprendere gli aspetti fondamentali che permettono di ordinare i risultati di una ricerca di informazioni in un mondo tanto vasto come il web, di capirne la modellizzazione matematica per arrivare, infine, a realizzare un'implementazione con il software Matlab dell'algoritmo PAGERANK© utilizzato da GOOGLE©.

La rielaborazione dell'esperienza

L'attività ha reso consapevoli gli studenti che tematiche a forte contenuto matematico, anche avanzato, si possono spesso incontrare nella vita quotidiana e che alcune conoscenze basilari di matematica (quali le equazioni lineari e l'algebra delle matrici) rivestono un ruolo fondamentale in applicazioni informatiche riguardanti la rete e il web di notevole interesse ed uso. Ne è nata una sorta di riflessione "ad alta voce" che, ripercorrendo le varie tappe dell'attività di orientamento universitario, ha permesso agli studenti della 4AM di riversare l'esperienza PLS nella narrazione ipermediale "Scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!", vincitrice al concorso Policultura 2012.

La narrazione

Il mitico "quesito del mattone", muovendo da alcune considerazioni sull'uso (più o meno consapevole) delle equazioni nella vita quotidiana, ha condotto ad un breve viaggio fra intuito e ragionamento, lungo le vie della logica deduttiva ed induttiva, attraverso procedimenti di astrazione e generalizzazione, fino a cogliere lo stretto nesso esistente fra la matematica, da sempre considerata una disciplina esigente, rigorosa, ma troppo distante dalla vita di tutti i giorni, e la tecnologia. Il viaggio si è concluso con la riscoperta di alcune importanti applicazioni di rete che non avrebbero mai visto la luce senza l'aiuto della matematica.

Il risultato delle attività svolte è stato qualcosa di più di un semplice racconto: l'esperienza stessa è stata ripensata e rielaborata, e ogni studente ha fornito la propria interpretazione personale di un particolare aspetto del tema affrontato.

La partecipazione al concorso

Il concorso "Policultura: la tecnologia incontra la cultura" è un'iniziativa del Politecnico di Milano dedicata alle scuole per promuovere una didattica innovativa con le tecnologie dell'informazione e della comunicazione. La giuria del Concorso Policultura ha assegnato il primo premio della sezione Senior alla narrazione della classe 4AM con questa motivazione: "*La narrazione opera una scelta molto particolare: spiega come la matematica si applichi in molti aspetti della nostra vita quotidiana. Dal punto di vista didattico, è stata lasciata grande autonomia ai ragazzi, dando spazio alla originalità dei contributi ad alla creatività personale, nel rispetto delle diverse motivazioni di partenza, disponibilità ed attitudini dimostrate dagli allievi. Dal punto di vista della comunicazione, la scelta delle immagini è originale e insieme all'alternanza delle voci narranti rende la narrazione molto fruibile. I contenuti sono molto dettagliati e precisi. Il rap finale è veramente eccezionale!*".

Il parere degli studenti

"*Come classe, abbiamo partecipato ad una conferenza che il dott. Breda dell'Università di Udine ha tenuto presso l'Aula Magna del nostro Isti-*

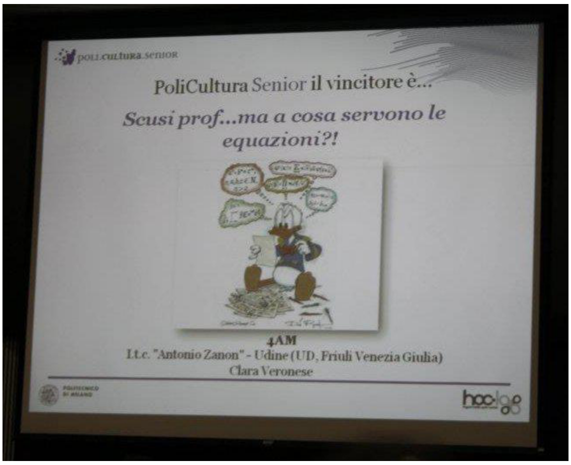


Figura 3.8: Il concorso "Policultura: la tecnologia incontra la cultura".

tuto: i contenuti avvincenti, le slide accattivanti, la presentazione originale e coinvolgente, ci hanno spinto a riflettere e a filtrare i contenuti più significativi, seguendo degli approfondimenti in classe e, per un gruppo, partecipando direttamente ad un mini-stage nei laboratori dell'Università stessa. Qui, il dott. Breda, con esempi pratici ha integrato le nostre conoscenze ed ha chiarito alcuni dubbi sulla domanda "a cosa servono le equazioni?". In quattro lezioni è riuscito, partendo dal semplice concetto di vettori, matrici e sistemi, a farci comprendere l'algoritmo che si nasconde dietro al motore di ricerca Google.

L'intenso lavoro che ha portato alla definizione di "rango di una pagina web" (pagerank), utilizzato da Page e Brin nell'ideazione del motore di ricerca più diffuso al mondo, si basa su dei calcoli riguardanti matrici di connettività e navigatori casuali. Alla fine delle lezioni abbiamo assistito ad un seminario sui social network e sul loro algoritmo di base. Quest'esperienza ci ha fatto comprendere che la matematica, anche se talvolta non amatissima da noi studenti, è un terreno fertile da cui nascono le nostre azioni quotidiane e le migliori idee di progresso.".

3.5 Conclusioni

Alla fine, un po' di numeri per rendicontare: i partecipanti alla conferenza iniziale del dott. Breda della durata di 2 ore presso lo "Zanon" erano circa una novantina (di cui la maggior parte erano studenti); una quindicina di allievi ha partecipato al mini-stage della durata totale di 7 ore presso l'Università, accompagnati da due insegnanti; un paio d'ore sono state dedicate alla co-progettazione iniziale, 4 per le fasi di allineamento dei requisiti sono condotte autonomamente dagli insegnanti e circa altrettante sono state dedicate ai lavori conseguenti il mini-stage (concorso "Policultura" e narrazione multimediale) e alle fasi finali di verifica.

Visto l'impegno complessivo e gli esiti positivi delle attività, possiamo sostanzialmente confermare quanto scritto a suo tempo alla fine dell'Introduzione in [23]: "*Con un po' di pazienza, e guidati dal motore principe della ricerca e delle innovazioni scientifiche e, in genere, culturali - la* curiosità - *la speranza alla fine di quest'esperienza è di guardare alle* matrici *e ai* sistemi *con un riguardo maggiore di quello che potremmo abitualmente concedere ad una semplice* tabella di numeri *o a delle* noiose equazioni da risolvere, *pur senza pretendere di coglierne a pieno tutte le notevoli potenzialità che celano al loro interno.*".

3.6 Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare in primis l'insegnante Stefania Pividori per la fattiva collaborazione alla progettazione e alla realizzazione delle attivià descritte in queste note, specie per quanto concerne le parti qui solamente citate, come l'allineamento dei prerequisiti, la verifica e, non ultimi, gli sviluppi condotti con i relativi studenti.

Un ringraziamento particolare va al dott. Massimo Franceschet del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Udine, docente di discipline informatiche ed esperto di reti sociali (e non solo), per aver fornito un contributo molto apprezzato dagli studenti attraverso il seminario "Who shall survive? Misure di centralità su reti sociali" [56].

Un ultimo ringraziamento va alla Prof.ssa Rossana Vermiglio, coordinatrice dell'intero PLS e del relativo laboratorio "La matematica c'è" in cui si è inserita l'attività qui descritta.

3.7 Codice Matlab

```
function [x,ind,e,k]=prank(C,alfa,TOL,kmax)
%PRANK pagerank.
%   [x,ind,e,k]=PRANK(C,alfa,TOL,kmax) calcola il pagerank x
% associato alla matrice di connettivita' C (sparsa) a meno
% di una tolleranza TOL e con numero massimo di iterazioni
% kmax per il metodo delle potenze. ind e' il vettore degli
% indici delle pagine web relative a C ordinato secondo il
%   pagerank x, e e' la stima dell'errore finale e k il
% numero di iterazioni eseguite.

%o verifica di sparsita'
if not(issparse(C))
    disp('ATTENZIONE: matrice C non sparsa!')
    return
end
%1: inizializzazione
n=size(C,1);%numero pagine web
u=ones(n,1);%vettore unitario
c=sum(C,1); %numero outlink
```

```
%2: costruzione matrice di connettivita' normalizzata H
H=sparse(n,n);
for j=1:n
    if c(j)~=0
        H(:,j)=C(:,j)/c(j);
    end
end
%3: costruzione vettore pagine penzolanti
d=not(sum(H,1))';
%4: metodo potenze per calcolo pagerank x
k=0;
xnew=u/n;
e=2*TOL;
while (e>=TOL)&(k<=kmax)
    k=k+1;
    xold=xnew;
    xnew=alfa*H*xold+u/n*(alfa*d'*xold+1-alfa);
    e=norm(xnew-xold);
end
%5: output ordinato secondo pagerank x
[x,ind]=sort(xnew,'descend');

%NB: i comandi tipo 'sparse' servono a non tener conto
% degli zeri nei calcoli. Ad esempio H=sparse(n,n)
% crea una matrice nxn di tutti zeri ma la memorizza
% come sparsa: quando viene modificata nelle
% successive istruzioni, gli zeri che rimangono non
% saranno comunque considerati nei calcoli.
```

Riferimenti bibliografici

[22] Dimitri Breda. «"...scusi prof...ma a cosa servono le equazioni?!"» http://www.uniud.it/didattica/facolta/scienze/la_facolta/piano-lauree-scientifiche-2010-2012/pls2/matematica-ce. 2012.

[23] Dimitri Breda, Stefania Pividori e Clara Veronese. «Equazioni lineari e matrici: la matematica in rete». http://www.uniud.it/didattica/facolta/scienze/la_facolta/piano-lauree-scientifiche-2010-2012/pls2/matematica-ce. 2012.

[56] Massimo Franceschet. «Who shall survive? Misure di centralità su reti sociali». http://www.uniud.it/didattica/facolta/scienze/la_facolta/piano-lauree-scientifiche-2010-2012/pls2/matematica-ce. 2012.

[79] Cleve Moler. *Experiments with MATLAB*. Freely available at http://www.mathworks.com/moler/index_exm.html. 2008.

[80] Cleve Moler. *Numerical computing with MATLAB*. Freely available at http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html. 2004.

[82] H Müntz. «Solution directe de l'équation séculaire et de quelques problémes analogues transcendants». In: *C. R. Acad. Sci. Paris* 156 (1913), pp. 43–46.

[83] H Müntz. «Sur la solution des équations séculaires et des équations intégrales». In: *C. R. Acad. Sci. Paris* 156 (1913), pp. 860–862.

[86] Lawrence Page et al. *The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web.* Technical Report 1999-66. Previous number = SIDL-WP-1999-0120. Stanford InfoLab, nov. 1999. URL: http://ilpubs.stanford.edu:8090/422/.

[111] R von Mises e H Pollaczek-Geiringer. «Praktische Verfahren der Gleichungs-auflosung». In: *Z. Angew. Math. Mech.* 9 (1929), pp. 58–77.

SINTESI ED ELABORAZIONE DEL SUONO

FEDERICO FONTANA

4.1 Introduzione

I recenti sviluppi applicativi del *design del suono* offrono opportunità notevoli al giovane che si avventuri nello studio di questa disciplina, opportunità che muovono dalla creazione artistica fino al *sound branding*, alla realizzazione di interfacce uditive per computer, giocattoli, dispositivi elettronici di ogni tipo, nonché alla scrittura di software per la generazione, il controllo, la manipolazione e la gestione del suono. Parallelamente a queste opportunità esiste tuttavia un problema di professionalità che, proprio in virtù degli spiccati legami con la musica e l'arte, fa del *sound designer* una figura poliedrica e di difficile collocazione: è dunque il *sound designer* un musicista, un artista in senso lato? È un esperto di utilizzo o di programmazione del calcolatore? Deve sapersi muovere con competenza in uno studio di registrazione, tra le centinaia di manopole e pulsanti posti sui pannelli delle effettiere e dei mixer? Deve conoscere persino il marketing di prodotto nel momento in cui si affida, al pari del designer grafico, a cataloghi di soluzioni con un focus nel settore in cui cui il brand deve essere valorizzato?

L'attività PLS di Sintesi ed elaborazione del suono propone, non provocatoriamente, un'ulteriore categoria: il sound designer è *un matematico*. Un suono, infatti, è certamente oggetto di manipolazioni, ricombinazioni e sovrapposizioni tanto più autorevoli quanto maggiori sono le conoscenze artistiche di chi lo rielabora, ma come nasce un suono di sintesi? Come si abilita una macchina, in particolare un computer, a sintetizzare un suono avente certe caratteristiche? In verità, tanto naturale è la generazione di un suono adoperando strumenti e oggetti concreti, quanto astrattamente matematica diventa la stessa attività nel momento in cui viene formalizzata nei modelli di sintesi.

L'attività PLS che è stata proposta puntava a fornire un'idea iniziale della complessità di questa astrazione.

4.2 Inquadramento storico

Il design del suono ha acquisito un'importanza via via crescente nella comunicazione contemporanea. Fino agli anni '80 è stato dominio esclusivo di un mondo prettamente artistico, impersonato da compositori, musicisti con la passione della tecnologia, rumoristi di cinema e di teatro capaci di realizzare nuovi suoni grazie a una profonda conoscenza della materia e dei suoi strumenti. Negli ultimi trent'anni, invece, il design del suono ha attraversato un imponente processo di volgarizzazione grazie all'avvento dell'elettronica a basso costo, che ha permesso a chiunque di accedere agli strumenti per la sintesi, il controllo e l'ascolto di suoni musicali e, con l'affermarsi

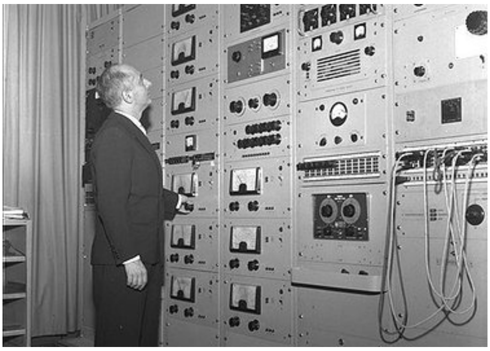


Figura 4.1: Anni '60: Studio di Fonologia RAI di Milano.

del personal computer, di avere accesso a generatori sonori in grado di sintetizzare in linea di principio *qualunque* suono possibile e immaginabile.

Gli effetti di questo processo sono stati oltremodo pervasivi: oltre alla nascita di una diffusa cultura della creazione musicale non più dominata solo dai grandi *studios* di produzione, il design del suono ha esteso la propria influenza in aree quali il marketing e il *branding*; gli stessi computer, che ne avevano sdoganato l'accesso a chiunque, presentano attualmente delle interfacce utente corredate da una miriade di icone uditive. Oggi esse sono più che mai alla ribalta, soprattutto a seguito della diffusione di smartphone, tablet e altri dispositivi mobili, in cui l'audio riveste un ruolo particolarmente rilevante per quanto riguarda l'interazione.

In definitiva possiamo tranquillamente affermare che una nuova epoca della comunicazione uditiva si è definitivamente affermata: i suoni di sintesi complementano costantemente e talvolta si sostituiscono al suono naturale con cui gli esseri umani hanno convissuto per millenni, intrattenendo un rapporto via via meno esclusivo man mano che la gamma di suoni artificiali e musicali si è arricchita. La vera e propria rottura risale all'inizio del secolo scorso, quando è iniziata la riproduzione artificiale del suono mediante l'altoparlante radiofonico, telefonico, stereofonico e infine televisivo, seguita a ruota dai primi esperimenti di musica elettronica, in cui il suono non è più necessariamente riconducibile a un oggetto sonante fisicamente esistente.

4.3 Descrizione

Nell'introduzione si è tentato di motivare l'attività del laboratorio di Sintesi ed elaborazione del suono all'interno del PLS di Matematica e Statistica. Concretamente, nel corso delle 16 ore previste per le attività si è posta enfasi sui fondamenti matematici che sono alla base delle tendenze più attuali della disciplina all'interno dell'informatica contemporanea. La progettazione di sistemi multimediali e la realizzazione di interfacce impone infatti, in aggiunta alla tradizionale modalità visuale, lo sfruttamento di canali sensoriali alternativi quali quello uditivo. Secondo questa visione, l'importanza del suono come vettore di informazione deriva dal fatto che il sistema uditivo, diversamente da quello visivo, è un canale sempre aperto e naturalmente capace di discriminare o integrare eventi temporali. Inoltre questi eventi sono spesso correlati con informazioni di tipo tattile.

Nel corso del laboratorio sono state dapprima spiegate e successivamente applicate alcune metodologie di base per la sintesi e l'elaborazione del suono in tempo reale. In altre parole, esse garantiscono che il ritardo necessario per generare il suono a seguito di una richiesta al sintetizzatore sia talmente esiguo da non poter essere percepito dall'utilizzatore umano-si pensi ad esempio a un musicista che preme il tasto di un pianoforte digitale, che genera un suono già pronto all'uso nella memoria dello strumento, piuttosto che riprodurlo.

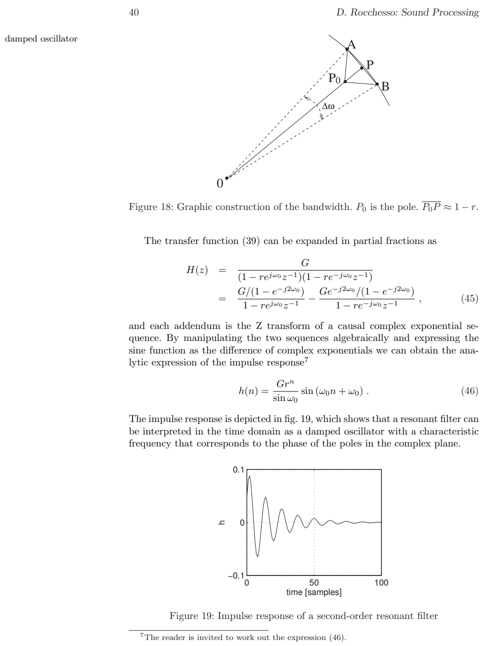
Alla spiegazione, perlopiù teorica, sono state dedicate 10 ore. Oltre alla lavagna, il docente ha fatto uso del testo *Introduction to Sound Processing* di Davide Rocchesso [38], reperibile anche pubblicamente nel web. Nello specifico queste ore sono state suddivise nel seguente modo:

- 2 ore di rudimenti di psicologia della percezione uditiva (psicoacustica) in cui si è posto l'accento, nell'ordine, sulla trasduzione del segnale di pressione sonora nel corrispondente meccanico da parte del timpano, e sulla successiva traduzione in perturbazione fluidodinamica all'interno della coclea. A questo punto si è insistito sul ruolo della membrana cocleare come analizzatore spaziale, in grado di rilevare l'evoluzione nel tempo delle diverse componenti frequenziali che compongono un suono.

- 2 ore in cui, facilitati dalle nozioni di psicoacustica, gli allievi hanno acquisito l'interpretazione matematica del segnale di pressione sonora come somma di una serie di componenti sinusoidali, avvicinandosi in tal modo in maniera semplificata alla più rigorosa decomposizione in serie di Fourier di una funzione periodica, attraverso un percorso concreto che ha condotto in pratica alla nozione di *spettro* di un segnale.

- 3 ore dedicate a un'introduzione ai segnali a tempo discreto, alla loro struttura e principali proprietà formali, e infine alla loro possibilità di rappresentare nel dominio digitale l'intera informazione contenuta in un segnale periodico a tempo continuo. In tal modo, ancora una volta si è tentato di motivare concretamente la capacità del calcolatore elettronico di immagazzinare in memoria una quantità di dati finita ma sufficiente a rappresentare il suono da riprodurre senza perdita d'informazione.

  L'evidenza dell'equivalenza dell'informazione a tempo continuo con quella discreta è stata giustificata in termini di egua-


40 D. Rocchesso: Sound Processing

damped oscillator

Figure 18: Graphic construction of the bandwidth. P_0 is the pole. $\overline{P_0 P} \approx 1 - r$.

The transfer function (39) can be expanded in partial fractions as

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{G}{(1 - re^{j\omega_0}z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0}z^{-1})} \\ &= \frac{G/(1 - e^{-j2\omega_0})}{1 - re^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{Ge^{-j2\omega_0}/(1 - e^{-j2\omega_0})}{1 - re^{-j\omega_0}z^{-1}} , \end{aligned} \quad (45)$$

and each addendum is the Z transform of a causal complex exponential sequence. By manipulating the two sequences algebraically and expressing the sine function as the difference of complex exponentials we can obtain the analytic expression of the impulse response[7]

$$h(n) = \frac{Gr^n}{\sin \omega_0} \sin(\omega_0 n + \omega_0) . \quad (46)$$

The impulse response is depicted in fig. 19, which shows that a resonant filter can be interpreted in the time domain as a damped oscillator with a characteristic frequency that corresponds to the phase of the poles in the complex plane.

Figure 19: Impulse response of a second-order resonant filter

[7] The reader is invited to work out the expression (46).

Figura 4.2: Estratto dal libro di testo (sezione sui risonatori digitali) [38].

glianza degli spettri dei segnali nei diversi domini temporali. Ciò ha richiesto di caratterizzare, a valle di quello a tempo continuo, lo spettro del segnale digitale, conducendo di conseguenza alla nozione di componente sinusoidale discreta, di trasformata di Fourier a tempo discreto e infine di trasformata di Fourier discreta(senza insistere eccessivamente sugli aspetti formali).

Ancorché la presentazione non fosse completamente rigorosa, è stato questo il momento in cui agli studenti è apparso più chiaro il significato della tradizionale catena ingresso-uscita di audio digitale, la quale:
i) in ingresso, partendo dall'acquisizione microfonica del segnale di pressione ne effettua una conversione analogico/digitale e successivamente quantizza i campioni nella memoria del calcolatore;
ii) in uscita inizialmente legge i dati in memoria e, dopo averli interpolati in un segnale continuo attraverso una conversione digitale/analogica, provvede ad amplificarli e infine a riprodurli nuovamente come segnali di pressione sonora mediante un altoparlante.

- 3 ore sono state infine dedicate alle manipolazioni di segnale che hanno per oggetto i dati presenti nella memoria del calcolatore. La ricchezza e la complessità delle tecniche di elaborazione del segnale audio digitale non poteva che essere minimamente sfiorata in un simile lasso temporale. Nondimeno, agli studenti sono stati presentati gli elementi fondamentali utilizzati rispettivamente nel *filtraggio* e nella *sintesi additiva* di audio digitale. Ciò ha permesso di apprezzare in buona misura le potenzialità del trattamento dei suoni nel dominio discreto.

Per quanto riguarda il filtraggio, si è illustrato come lo spettro di un segnale digitale possa essere agevolmente sagomato attraverso opportuni filtri. Tra i possibili modelli, particolare enfasi è stata posta sui *risonatori* come blocchi di filtraggio in grado di selezionare specifiche componenti frequenziali di segnale, governandone nel contempo il decadimento. A questo scopo scopo sono stati chiariti i meccanismi relativamente intuitivi alla base della possibilità di accordare detti filtri, ottenendo una serie di effetti variabili anche in base al tipo di sollecitazione effettuata al loro ingresso.

Per quanto riguarda la sintesi, l'argomento è stato affrontato con sforzo tutto sommato relativo sulla base delle nozioni di filtraggio appena acquisite. In particolare, l'accento è stato posto sulla possibilità di realizzare degli *oscillatori* come caso particolare dei filtri risonanti; parimenti si è spiegato come un risonatore diventi di fatto un generatore di suono non appena esso venga sollecitato con un ingresso *impulsivo* ovvero *rumoroso*.

Con ciò si è concluso l'apprendimento teorico di base degli studenti.

Nelle successive 6 ore gli allievi hanno potuto osservare e successivamente applicare gli strumenti concettuali precedentemente acquisiti all'interno dei laboratori del Dipartimento di Matematica e Informatica. In particolare:

- 3 ore sono state dedicate a presentare i risultati allo stato dell'arte nella sintesi del suono, tra cui alcuni ottenuti nel Laboratorio HCI dipartimentale di cui il docente fa parte.

  Dapprima si sono mostrate delle realizzazioni di oscillatori e banchi di filtri sviluppate attraverso gli ambienti di programmazione visuale Max/MSP e Puredata. Esse hanno evidenziato come la programmazione di sistemi e modelli per la sintesi risulti notevolmente semplificata se si svolge all'interno di ambienti di alto livello, specificatamente volti a creare un punto di contatto tra il designer di suoni e il materiale acustico, risolvendo in modo automatico il problema dell'ingegnerizzazione del software deputato alla sintesi.

  Successivamente si è presentato un sofisticato sistema software per la sintesi di suoni di pianoforte in tempo reale, corredato da un modulo parimenti elaborato per il controllo dei parametri di sintesi. Questo sistema ha costituito la base per lo sviluppo di un pianoforte digitale di fascia professionale attualmente in commercio: attraverso la comprensione di alcune tra le sue molteplici funzioni, gli studenti hanno potuto comprendere meglio l'eccezionale complessità di cui si compone un'applicazione allo stato dell'arte per l'intonazione e la taratura fine di un modello per la sintesi digitale di suoni musicali.

- le 3 ore conclusive sono trascorse dando la possibilità agli studenti di programmare esplicitamente un banco di risonatori, al fine di far eseguire al calcolatore una semplice melodia, simile a quelle prodotte da un telefono portatile di vecchia generazione durante l'arrivo di una chiamata. In pratica il docente ha realizzato un semplice modello per la sintesi all'interno dell'ambiente di programmazione Matlab, che propone un approccio basato su linguaggio di *scripting*, sollevando nel contempo il programmatore dall'accedere alle risorse di basso livello quali la scheda audio e i suoi driver. Ciò ha permesso agli studenti di istanziare i parametri significativi dei risonatori e successivamente di far eseguire la melodia al sistema di sintesi, interagendo attraverso un'interfaccia puramente testuale.

  Qui sotto si riporta parte del codice Matlab che è stato messo a disposizione degli studenti per creare le loro composizioni:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Lab. PLS Suoni 5/3/2012
% Sintesi mediante banco oscillatori smorzati
% https://www.dimi.uniud.it/Members/federico.fontana/
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;       % inizializza lo stato del sistema

n_res = 4 ;      % numero di filtri risonatori nel sintetizzatore

time_s = 7;     % durata del tune

Fs = 44100;      % frequenza di campionamento DEL SISTEMA

samples = Fs * time_s;   % campioni d'uscita

res_param = zeros(3*n_res,samples);  % tabella dei parametri [[A,f,tau],...,[A,f,tau]]' dei risonatori

b0 = zeros(n_res,samples);  % tabella dei coefficienti b0 dei risonatori
a1 = zeros(n_res,samples);  % tabella dei coefficienti a1 dei risonatori
a2 = zeros(n_res,samples);  % tabella dei coefficienti a2 dei risonatori

x = zeros(n_res,samples);   % ingressi ai risonatori (solo impulsi; si potrebbe generalizzare)
y = zeros(n_res,samples);   % uscite dai risonatori (di cui si adoperano anche i valori passati)

% codifica dello score (spartito)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% IL "COMPOSITORE" INTERVIENE QUI
% regola: ripetere le righe di codice qui sotto
% ordinate per tempi t crescenti
%
% A OGNI modifica di t, res, e/o param
% anche congiunti ACCODARE SEMPRE LE RIGHE
% res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
% x(res,ceil(t*Fs)) = 1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% t = 0.05 s

t = 0.05;                 %  al tempo t = 0.05 s...

res = 1;                  %  ...per il risonatore 1...
param = [1,1175,0.1];       % ...[A,f,tau] = [1,1000,1]

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;
```

```
res = 2;                  %  ...per il risonatore 2...
param = [1,1760,0.1];       % ...[A,f,tau] = [1,1000,1]

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;

% t = 1 s

t = 0.10;                 %  al tempo t = 1 s...

res = 1;                  %  ...per il risonatore 1...
param = [1,1175,0.1];       % ...[A,f,tau] = ...

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;

res = 2;                  %  ...per il risonatore 2...
param = [1,1397,0.1];       % ...[A,f,tau] = ...

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;

t = 0.50;
res = 3;                  %  ...per il risonatore 3...
param = [1,1976,0.8];       % ...[A,f,tau] = ...

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;

res = 4;                  %  ...per il risonatore 4...
param = [1,1397,0.8];       % ...[A,f,tau] = ...

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;

t = 0.70;
res = 1;                  %  ...per il risonatore 3...
param = [1,1319,0.8];       % ...[A,f,tau] = ...

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;

res = 2;                  %  ...per il risonatore 4...
param = [1,1319,0.8];       % ...[A,f,tau] = ...

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;

t = 0.90;

[...]

RESTO DELLA MELODIA

[...]

res = 4;                  %  ...per il risonatore 4...
param = [1,1760,0.8];       % ...[A,f,tau] = ...

res_param(3*(res-1)+1:3*(res-1)+3,ceil(t*Fs):ceil(time_s*Fs)) = param' * ones(1,ceil(time_s*Fs)-ceil(t*Fs)+1);
x(res,ceil(t*Fs)) = 1;



% t = ? s ...

% calcolo dei coefficienti preliminare all'esecuzione

b0 = res_param(1:3:3*n_res,:) .* exp(-1./(Fs*res_param(3:3:3*n_res,:))) .* sin(2*pi*res_param(2:3:3*n_res,:)/Fs);
a1 = -2 .* exp(-1./(Fs*res_param(3:3:3*n_res,:))) .* cos(2*pi*res_param(2:3:3*n_res,:)/Fs);
a2 = exp(-2./(Fs*res_param(3:3:3*n_res,:)));

% esecuzione (offline oppure REAL TIME) da parte del computer

y(:,1) = b0(:,1) .* x(:,1);
y(:,2) = b0(:,2) .* x(:,2) - a1(:,2) .* y(:,1);

for n = 3:ceil(time_s*Fs)
    y(:,n) = b0(:,n) .* x(:,n) - a1(:,n) .* y(:,n-1) - a2(:,n) .* y(:,n-2);
end

wavwrite(sum(y)/max(abs(sum(y)))/1.001, Fs, 'tune.wav');
```

Quest'ultima fase ha visto un attento e sincero coinvolgimento da parte degli studenti. Incentivando la classe attraverso una competizione che prevedeva un premio simbolico, le ultime ore di laboratorio hanno evidenziato una sorprendente ricettività del gruppo nei confronti di una serie di concetti di non immediata comprensione, testimoniando in definitiva il pieno successo dell'iniziativa.

4.4 La voce della scuola

La scuola ha fatto sentire la propria "voce" in primo luogo attraverso il lavoro finale della classe; la significatività delle composizioni degli studenti dipende specialmente dai rudimenti di lettura e composizione di brani musicali in loro possesso. Le composizioni stesse possono essere scaricate all'indirizzo `https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/moduli/matematica-per-la-sintesi-di-suoni/`.

Il laboratorio ha visto la partecipazione delle classi di Marina Adriano e Anna Maria Orlandi, entrambe insegnanti di Matematica presso il Liceo delle Scienze Applicate di Udine. Le docenti hanno per prima cosa tratteggiato il contesto delle rispettive classi in termini di retroterra culturale e disponibilità all'apprendimento. In base a questi assunti sono state pianificate le attività di apprendimento teorico e applicativo: in particolare, la proposta di collegare l'attività di valutazione delle capacità acquisite dagli studenti alla creazione di semplici "phone tunes" ottenuti mediante controllo in tempo e frequenza di un piccolo banco di oscillatori progettato durante il laboratorio è stata della professoressa Anna Maria Orlandi.

4.5 Conclusioni

Il Laboratorio di Sintesi ed elaborazione del suono ha offerto un approccio complementare alla tradizione del PLS: partendo dalla generazione del suono, la quale si configura inizialmente come un fenomeno perlopiù empirico e dalle connotazioni soprattutto artistiche, il laboratorio ha gradualmente portato gli studenti a scoprire una serie di risultati rigorosi che sono alla base della sintesi nel dominio digitale. Giunti in possesso di un bagaglio minimale di nozioni, gli stessi studenti hanno potuto applicarle in maniera proporzionalmente collegata alle loro conoscenze musicali e soprattutto alla loro creatività.

Da questo punto di vista il Laboratorio di Sintesi ed elaborazione del suono ha centrato l'obiettivo di far comprendere come matematica e creatività non viaggino mai scorrelate tra loro, e come l'utilizzo della seconda all'interno degli ambiti precisi segnati dalla prima possa portare a risultati di estremo interesse applicativo, artistico e non solo.

4.6 Ringraziamenti

L'autore ringrazia i tecnici del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Udine, i quali hanno dato un contributo fondamentale al funzionamento delle postazioni di laboratorio utilizzate nella realizzazione dell'attività conclusiva.

Riferimenti bibliografici

[38] D. Rocchesso. *Introduction to Sound Processing*. Online available at http://www.faqs.org/docs/sp/. Florence, Italy: Mondo Estremo, 2003.

“WELCOME TO NIMROD”:
UN’ESPERIENZA NELLA SCUOLA MEDIA

DORANNA DI VANO, MARIA ROSARIA CALVELLI, CIRO IAQUINTO, MARIA SENIS, CLAUDIO MIROLO

5.1 Introduzione

“Welcome to Nimrod” è l’invito a partecipare a una dimostrazione delle potenzialità di innovativi sistemi di calcolo automatico in occasione dell’esposizione che si svolse a Londra nel 1951, invito riproposto nell’ottobre dello stesso anno in una manifestazione analoga con sede a Berlino. L’elaboratore elettronico concepito per l’occasione, e denominato *Nimrod*, presenta di fatto un esempio precoce di “computer game”, dove l’evento ludico — il gioco del *nim* — era inteso ad attrarre l’attenzione dei visitatori verso il primo computer commerciale in senso moderno, il Mark I prodotto dall’impresa Ferranti sul modello dei prototipi pionieristici realizzati e sperimentati all’Università di Manchester.

Al di là dell’intento promozionale, che visti i costi esorbitanti poteva interessare esclusivamente organizzazioni di grandi dimensioni, a corredo della dimostrazione venne distribuito un fascicoletto piuttosto interessante al fine di divulgare presso un pubblico il più ampio possibile i principi base del funzionamento di un elaboratore, a quel tempo una novità nel panorama tecnologico, cercando anche di smitizzarne l’aura di “cervello elettronico” — etichetta sotto la quale, ironicamente, Nimrod sarebbe stato invece presentato solo pochi mesi più tardi a Berlino: *elektronen Gehirn*.

Il materiale reso disponibile on-line da Pete Goodeve per ricordare Nimrod a cinquant’anni dall’evento menzionato [62] è servito come spunto per progettare un Laboratorio didattico rivolto agli allievi della scuola secondaria di primo grado. Al centro delle attività proposte emergono non solo vari aspetti inerenti la rappresentazione delle informazioni e l’elaborazione algoritmica, che consentono di comprendere il funzionamento di un computer in generale, ma anche l’analisi matematica di una strategia specifica per competere al gioco del *nim*, analisi sviluppata e pubblicata dal matematico statunitense Charles Bouton all’inizio del ’900 [19], molto prima di essere adottata da Nimrod. Il percorso si integra pertanto molto bene con gli argomenti di Matematica e Scienze, suggerendo inoltre significativi agganci di natura interdisciplinare, in particolare richiamando l’influenza del contesto storico sugli sviluppi scientifici e tecnologici (storia), mettendo a confronto le tecnologie attuali con quelle del recente passato (tecnologia), nonché stimolando riflessioni di carattere “scientifico-filosofico” sul significato dell’*intelligenza* in generale (diverse discipline) e su come l’idea di “automa intelligente” abbia ispirato la letteratura di fantascienza (letteratura).

La collocazione di un *Laboratorio PLS* nell’ambito della scuola media è motivata dall’importanza, a nostro avviso, di stimolare l’interesse degli allievi per le discipline scientifiche fin da una giovane età. Infatti, i loro primi incontri con le discipline, l'immaginario che vanno via via costruendo al riguardo e gli eventuali pregiudizi nei confronti di alcune fra queste avranno una significativa incidenza ai fini delle scelte future, a partire da quella dell'indirizzo di studi nella scuola secondaria superiore.

Ciò vale in particolar modo per gli ambiti della matematica e dell'informatica, attorno ai quali si articola l'esperienza presentata in queste pagine. Da un lato la matematica viene prevalentemente percepita come una disciplina severa, un compendio di regole formali senza agganci convincenti con la realtà quotidiana. D'altro lato l'informatica finisce spesso per essere identificata con un mero *utilizzo* di tecnologie dell'informazione e della comunicazione, accezione in cui si perde il senso profondo di questa disciplina e che non consente ai ragazzi di dominare cognitivamente i processi messi in opera da questi strumenti.

In estrema sintesi, il materiale raccolto attorno al computer Nimrod propone stimoli di interesse per diverse discipline: per la matematica (significato e manipolazione della rappresentazione posizionale dei numeri, formalizzazione e analisi di una strategia di gioco); per l'informatica (rappresentazione ed elaborazione algoritmica di informazioni, distinzione e corrispondenza fra forma e significato); per le scienze, in particolare in relazione alla critica del problema "una macchina può pensare?" da parte di Alan Turing, che ne riformula gli aspetti assoggettabili a indagine in termini diversi e operazionalizzabili in un celebre contributo a sfondo filosofico del 1950 [106]. Inoltre, dal punto di vista storico è interessante affrontare le ragioni politiche, economiche e sociali che hanno posto le premesse dei rapidi progressi tecnologici avvenuti nell'arco di tempo che attraversa il secondo conflitto mondiale.

Nel seguito verranno descritte a grandi linee le attività proposte agli allievi. Tali attività si caratterizzano, fra l'altro, per un'impostazione didattica guidata dai seguenti criteri generali:

- l'attenzione è prevalentemente rivolta ai processi mentali richiesti delle attività, e solo in seconda istanza a concetti specifici;

- l'evoluzione storica è intesa sia come fonte di contenuti da portare in classe, sia come strumento di pianificazione didattica per gli insegnanti [75, 89];

- il ricorso al gioco ha la funzione di rendere meno "severo" il percorso di apprendimento, incoraggiando il coinvolgimento attivo di tutti gli allievi;

- la manipolazione di semplici artefatti, che consentano un controllo completo da parte dei ragazzi, permette di rinforzare le conoscenze acquisite;

- la realizzazione di simili artefatti con materiali d'uso quotidiano quali carta e cartoncino favorisce l'introspezione e lo sviluppo di meta-conoscenze;
- i collegamenti interdisciplinari favoriscono la collaborazione fra insegnanti e contribuiscono allo sviluppo di una visione unitaria della conoscenza.

5.2 Inquadramento storico

Il gioco del *nim* è un gioco molto antico, il cui primo riferimento in Europa sembra risalire al XV secolo. Benché il termine "nim" tragga verosimilmente la sua origine dalla radice tedesca del verbo "nehmen" (prendere), l'ipotesi più probabile è che il gioco ci sia pervenuto dalla Cina. Se ne conoscono numerose varianti, ma sostanzialmente la base è la seguente: data una disposizione di oggetti in più gruppi, ciascun giocatore a turno ne preleva uno o più da un solo gruppo. Alla fine, nella versione qui considerata, vince chi prende l'ultimo oggetto.

Dal nostro punto di vista risulta particolarmente interessante l'analisi del gioco da parte del matematico Charles Leonard Bouton, che ha pubblicato la strategia più efficace nel 1901 [19]. Tale strategia può essere descritta in modo elegante utilizzando la notazione numerica binaria.

Le caratteristiche del modello di Bouton, unitamente alla semplicità con cui è possibile rappresentare le configurazioni del nim, hanno ispirato la realizzazione di diversi dispositivi *automatici* specializzati nel condurre questo gioco. In particolare, nel settembre del 1940 viene registrato un brevetto di Edward U. Condon, Gereld L. Tawney and Willar A. Derr per una "macchina per giocare al nim" [36], presentata alla fiera mondiale di New York nella primavera dello stesso anno con il nome di *Nimatron*. La macchina concepita da Condon e colleghi applicava la tecnologia elettromeccanica, affidando la logica a circuiti di commutazione costituiti da relè.

Trascorrono poco più di dieci anni ed è la volta di *Nimrod*, di cui l'impresa Ferranti affida la realizzazione a John Bennett e Raymond Stuart-Williams per il Festival of Britain del maggio 1951 al fine di promuovere il computer commerciale Mark I. In questo caso il funzionamento si basava sulle valvole termoioniche, una recente innovazione che inaugura l'era dell'elaborazione elettronica e l'idea di computer come strumento di lavoro che andrà ad affermarsi così come la intendiamo ai giorni nostri. Cercando di sfidare Nimrod, i visitatori della fiera potevano diventare consapevoli delle nuove opportunità offerte dalle tecnologie sviluppate nel clima di pressante competitività che si instaurò negli anni del secondo conflitto mondiale.

Un ulteriore elemento che accompagna la riflessione sul concetto di *calcolabilità*, a partire dalla metà degli anni 30, e la nascita dei primi dispositivi di elaborazione automatica *general purpose* (non specializzati, cioè, in qualche compito specifico) è rappresentato dagli interrogativi sulle prerogative della mente umana suscettibili di essere trasferite a una macchina. Di particolare rilievo a questo riguardo è l'approccio proposto da Alan Turing [106], che ha contribuito ad alimentare il dibattito sulla natura dell'intelligenza e sulla possibilità di realizzare forme di intelligenza artificiale, dibattito che si protrae fino ai nostri giorni articolandosi in punti di vista contrastanti.

Nell'articolo citato Turing suggerisce di accantonare la domanda se una macchina può essere in grado di pensare, in quanto troppo ambigua, e di sostituirla invece con una domanda correlata, grosso modo se il comportamento di una macchina è in senso statistico discriminabile dal comportamento umano, per affrontare la quale delinea un esperimento concettuale denominato *gioco di imitazione*.

Sullo sfondo degli episodi richiamati, che sono stati scelti in quanto suggeriscono spunti interessanti da un punto di vista culturale, l'arco di tempo che va dalla metà degli anni '30 ai primi anni '50 si caratterizza marcatamente per la rapida evoluzione delle tecnologie di elaborazione di informazioni, di notevole rilievo per la nascita e gli sviluppi dell'informatica. A partire dai primi dispositivi elettromeccanici concepiti da Konrad Zuse già intorno al 1934, e passando attraverso la significativa impresa che, con il contributo di Alan Turing, porta alla realizzazione a Bletchley Park nel 1943 del calcolatore elettronico *Colossus*, decisivo nella decrittazione dei messaggi scambiati dall'esercito nazista, si arriva infine ai primi prototipi di computer moderno con programma residente in memoria, realizzati nel 1948 nei laboratori dell'università di Manchester e perfezionati per la commercializzazione dalla Ferranti nel 1951.

5.3 Descrizione

Le attività sono state proposte a quattro classi di due istituti della scuola secondaria di primo grado e, in vista degli obiettivi a lungo termine che ci eravamo prefissati, si sono articolate nell'ambito dell'intero ciclo triennale, dalla prima alla terza. Lo svolgimento ha impegnato circa una cinquantina di ore e si è sviluppato secondo modalità analoghe nei due istituti, pur lasciando spazio per approfondimenti che si adattassero alle peculiarità di ciascun contesto.

Dal punto di vista delle metodologie didattiche, si è fatto ricorso a modalità diversificate di intervento: lezioni frontali, lezioni partecipate, discussione collegiale, lavoro individuale e in piccoli gruppi (anche di tipo laboratoriale), attività ludiche. Anche gli strumenti utilizzati sono stati i più vari: da un lato materiale "povero", come penne e matite colorate, carta e cartoncino, forbici e colla; dall'altro l'impiego di computer e videoproiettore, nonché di software interattivo appositamente sviluppato per le specifiche attività.

Ecco, in sintesi, alcuni dei principali obiettivi generali che abbiamo cercato di perseguire progettando il percorso didattico:

- Comprendere che le modalità di analisi della matematica possono essere applicate anche per analizzare situazioni quotidiane, come nel caso del gioco;

- Accostarsi a un'interpretazione della realtà secondo la prospettiva computazionale (*computational thinking*);
- Utilizzare linguaggi e codici diversi per creare modelli efficaci al fine di affrontare nuovi problemi;
- Riflettere su limiti e potenzialità delle tecnologie dell'informazione;
- Capire che i principi alla base dell'elaborazione automatica non dipendono dalla tecnologia;
- Stimolare i processi di astrazione a partire dalle corrispondenze di situazioni concrete;
- Approfondire tematiche storiche per favorire una migliore comprensione del presente;
- Potenziare le capacità linguistiche descrittive.

Inoltre, fra gli obiettivi specifici menzioniamo, in particolare, i seguenti:

- Riuscire a mettere in relazione sistemi di numerazione e, più in generale, linguaggi differenti;
- Comprendere alcuni aspetti alla base della rappresentazione delle informazioni e della logica interna di un computer;
- Farsi una prima idea di procedura algoritmica;
- Rinforzare il concetto di "invariante";
- Consultare le fonti e interpretare un documento.

Primo anno

Principali attività, in sintesi:

- Carrellata su episodi della storia dell'informatica della metà del '900;
- Confronto delle tecnologie a distanza di 60 anni;
- Gioco del nim: regole e strategie individuali spontanee;
- Lavoro sul sistema binario di rappresentazione numerica;
- Surrogato del "gioco di imitazione", attraverso la rete di computer dei laboratori dell'università;
- Analisi della strategia di gioco elaborata dal matematico C. Bouton;
- Illustrazione dell'algoritmo di Nimrod.

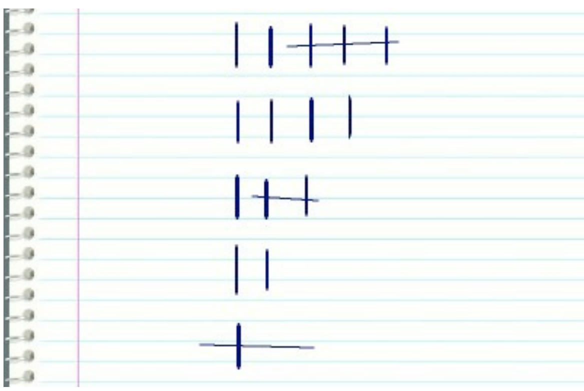
Segue una breve descrizione delle tappe salienti in cui si è articolato il percorso durante il primo anno di attività.

Londra, Maggio 1951: Festival of Britain

L'argomento viene introdotto attraverso la narrazione, illustrata con alcune foto dell'epoca, dell'episodio della storia dell'informatica che ha fornito lo spunto per il progetto: la presentazione del "Ferranti Mark I" a un'esposizione londinese del 1951. Poiché le dimensioni della macchina hanno costituito un elemento di sorpresa, si è passati ad un confronto tra quel computer pionieristico e un austero dispositivo mobile dei nostri giorni (Nokia E50, in uso intorno al 2010). Oltre all'ingombro, si sono messe a confronto le caratteristiche dei rispettivi componenti interni — unità di elaborazione, memoria principale, memoria permanente, strumenti di ingresso/uscita — in termini di caratteristiche fisiche, capacità di memoria e velocità di elaborazione. In questo modo gli allievi si sono resi conto che la tecnologia, nel corso della storia, ha consentito una graduale miniaturizzazione dei dispositivi di elaborazione, con l'evidente conseguenza di aumentarne la fruibilità e l'accessibilità da parte di tutti.

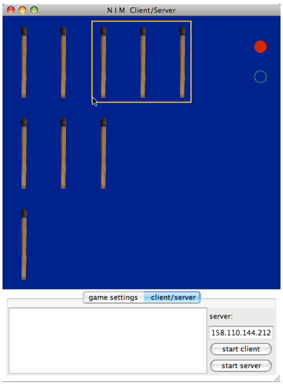
Un nuovo gioco

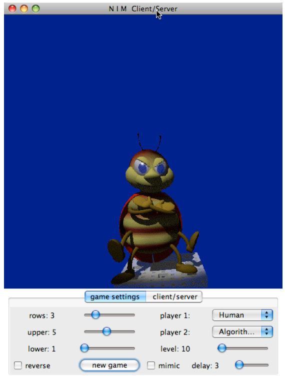
Successivamente gli allievi sono stati invitati a giocare al Nim, sia con carta e penna, sia con un'applicazione appositamente predisposta allo scopo. In particolare, si è optato per la versione in cui ciascun giocatore persegue l'obiettivo di prelevare l'ultimo oggetto (l'ultimo "fiammifero"). Trattandosi di un gioco pressoché sconosciuto ai giovani ragazzi, la novità si è rivelata fonte di divertimento, facilitandone il coinvolgimento quando è stata ripetutamente proposta per consentire loro di prendere confidenza con le regole del gioco su cui si sarebbero poi basate molte delle attività programmate.



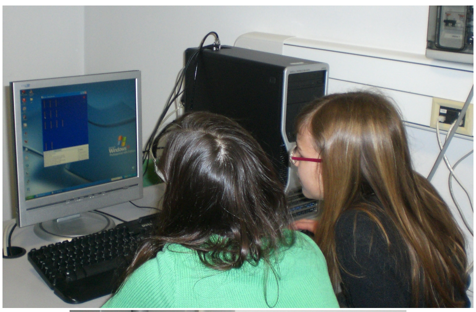
Gioco di imitazione... del giocatore di nim

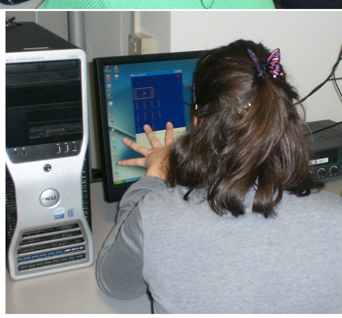
Ai piccoli tornei cartacei in classe è seguita un'altra esperienza molto avvincente: gli alunni sono stati invitati nei Laboratori universitari per giocare a "Nim" in coppie attraverso i computer della rete locale. La situazione creata si ispirava, in un certo senso, al gioco di imitazione immaginato da Alan Turing nel suo articolo seminale [106], infatti durante il gioco gli allievi non sapevano se avessero come avversari loro coetanei o un programma in esecuzione su un server.





La situazione è stata stimolante e i ragazzi si sono molto divertiti: il fatto di non conoscere l'identità dell'avversario ha creato interesse, oltre che un simpatico diversivo. La visita ai Laboratori dell'università ha fornito non solo l'opportunità di conoscere la sede, ma anche di scoprire "cimeli" di vecchi computer, esposti in una sala, che non avevano ancora avuto occasione di vedere. Inoltre, sono stati accompagnati da tutor d'eccezione, studenti universitari che hanno risposto alle loro infinite curiosità.





Brainstorming

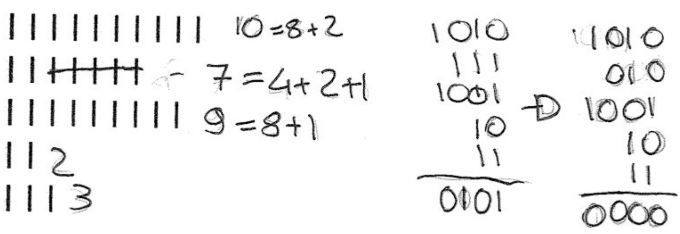
Subito dopo il "gioco di imitazione" gli allievi sono stati invitati a rispondere ad un questionario con varie domande. La prima richiedeva di cercare di identificare l'identità del proprio avversario in base alla conduzione del gioco. In effetti non si trattava di un compito facile: il 40% degli allievi è stato tratto in inganno e, in particolare, più della metà delle coppie che hanno giocato contro un programma pensavano invece di giocare contro dei compagni. Nel motivare la risposta, le affermazioni più comunemente riportate sono state: "L'avversario era il computer perché era molto veloce nel rispondere alle mosse"; oppure: "L'avversario era il computer perché era molto abile" (circa due terzi delle risposte). Vi sono state anche altre giustificazioni che traevano spunto da piccoli indizi di natura contestuale (come le reazioni dei compagni) a cui avevano prestato attenzione durante il gioco.

Come si poteva prevedere, dalle risposte alle domande che chiedevano di illustrare i criteri di scelta delle mosse (proprie o dell'avversario), sono emerse difficoltà a concepire (o verbalizzare) una strategia in termini di regole da seguire. Ciononostante, per circa i due terzi degli allievi il caso o la fortuna rivestono un ruolo marginale. In sintesi, le risposte al questionario sembrano confermare che i ragazzi concepiscono il computer come una macchina efficace ed efficiente, mentre il concetto di strategia resta ancora piuttosto ineffabile.

Bit e strategie

Dopo un lavoro preparatorio sui diversi sistemi di numerazione, in particolare su quello binario che sta alla base del funzionamento dei dispositivi di elaborazione, gli allievi sono guidati a scoprire l'algoritmo seguito da Nimrod per realizzare una strategia di gioco efficace. Come risultato dell'analisi di C. Bouton, infatti, una simile strategia può essere descritta in modo semplice se si ha familiarità con l'interpretazione numerica della notazione binaria e con una elementare operazione di *controllo di parità*.

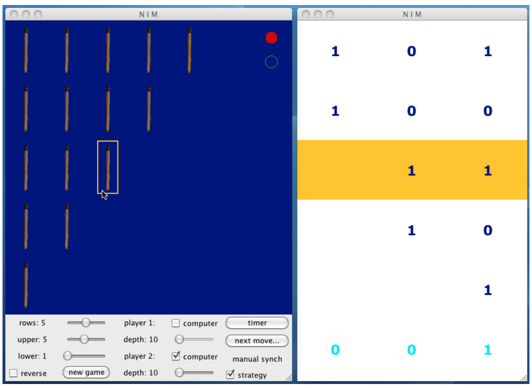
Osservando il frammento di un esercizio svolto da una ragazza, riportato nella figura seguente, si possono ricostruire i passi salienti della strategia. Una configurazione del gioco è definita da un numero qualsivoglia di righe, costituite a loro volta da un certo numero di oggetti (asticciole). Nel caso in esame si riconoscono 5 righe di 10, 7, 9, 2 e 3 oggetti, rispettivamente.



Come primo passo, i numeri di oggetti presenti in ciascuna fila vengono rappresentati nel sistema binario e incolonnati in modo appropriato (come per sommarli). Quindi, si aggiunge un'ulteriore riga (in figura sotto la barra orizzontale) che rappresenta il controllo di parità colonna per colonna. In altri termini, un bit (cifra binaria) della riga introdotta è scelto in modo tale che nella colonna con cui è allineato il numero complessivo di bit '1' (incluso quello aggiunto) sia pari. Se con una mossa si riesce a fare in modo che la riga aggiunta contenga solo '0', allora quella mossa permette di vincere al gioco.

Nel caso esemplificato l'allieva riconosce che a tal fine è sufficiente modificare la seconda riga trasformando '111' in '010', ciò che corrisponde a togliere 5 asticciole (tagliate con la penna). In questo caso si trattava dell'unica scelta possibile, ma in generale ci potrebbero essere più opzioni, o nessuna — nel qual caso non resta che sperare in un errore dell'avversario.

Per facilitare la comprensione della procedura suggerita da Bouton ci si è anche avvalsi dell'aiuto di un'applicazione che permette di visualizzare la configurazione del gioco affiancandovi la corrispondente "rilettura" nel sistema binario. Da un punto di vista operativo, la strategia è stata assimilata in modo soddisfacente dagli allievi. Ciò si evince, in particolare, dalle risposte fornite in un test assegnato verso la conclusione dell'anno scolastico: circa tre quarti delle soluzioni di esercizi riguardanti l'applicazione della strategia di Bouton sono risultate infatti corrette.



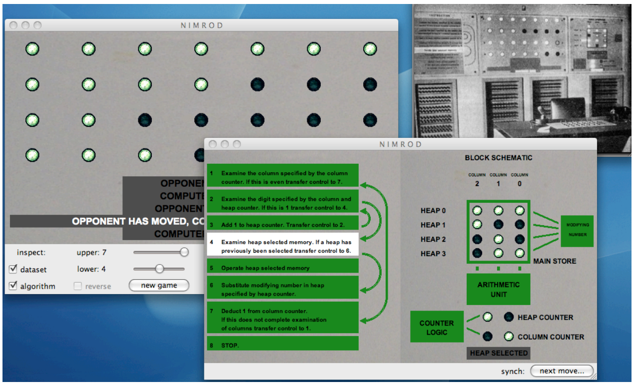
Procedure algoritmiche

A questo punto ci si è posti l'obiettivo di indagare più a fondo su come la procedura applicata per scegliere una buona mossa possa essere tradotta in termini "comprensibili" a una macchina. A tal fine si è utilizzato un modello che consente di simulare le operazioni e i passi elementari eseguiti da Nimrod, presentandoli nella forma che venne proposta ai visitatori dell'esposizione nel 1951.

La finestra in secondo piano nella figura mostra il monitor centrale di Nimrod, che rappresenta una configurazione del gioco in cui gli oggetti corrispondono a lampade accese, raggruppate per riga. La finestra in primo piano affianca i pannelli laterali che illustrano la rappresentazione interna delle informazioni (a destra), codificata in binario, nonché la struttura e il procedere dell'algoritmo (a sinistra), articolato in 8 passi da eseguirsi sequenzialmente o seguendo le linee di flusso indicate, a seconda delle situazioni che si verificano.

Benché un simile processo di simulazione passo-passo dell'algoritmo sia assolutamente meccanico, va comunque osservato che in base alla nostra esperienza molti allievi si scontrano con delle difficoltà, probabilmente legate al livello di dettaglio nella parcellizzazione delle operazioni. Se da un lato buona parte di loro — circa due terzi — individua con chiarezza la configurazione finale ed è in grado di raffigurarla esattamente nella forma presentata dal modello, d'altro lato solo la metà di questi riesce anche a tracciare con precisione la sequenza completa dei passi seguiti, pur avendo sotto mano il diagramma di flusso.

Questa constatazione ha suggerito di insistere, alla ripresa delle attività nell'anno successivo, con l'utilizzo di modelli "manipolatori" realizzati in carta e cartoncino.



Secondo anno

Principali attività, in sintesi:

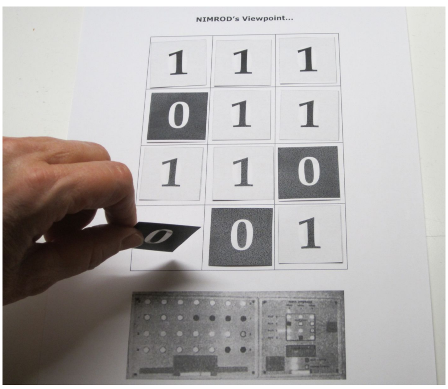
- Realizzazione di modelli in carta e cartoncino;
- Confronto fra simulazione e manipolazione;
- Codice binario in altri contesti ludici: "conta" ispirata a un racconto di Giuseppe Flavio;
- Ricerca di analogie relative a varianti del gioco del nim;
- Lavoro volto a stimolare processi di astrazione: analisi complessiva delle evoluzioni del gioco;
- Ricerca degli invarianti implicati dalla strategia di C. Bouton.

Alla ripresa delle attività nel secondo anno, al fine di integrare i nuovi allievi e per favorire la formazione di gruppi di lavoro trasversali alle classi partecipanti, si è ritenuto opportuno chiedere ai ragazzi stessi di fare resoconto dell'esperienza dell'anno precedente, mettendo in rilievo gli elementi più significativi dal loro punto di vista. Si è poi proceduto attraverso le tappe illustrate per sommi capi qui di seguito.

Giochi di prestigio con i bit

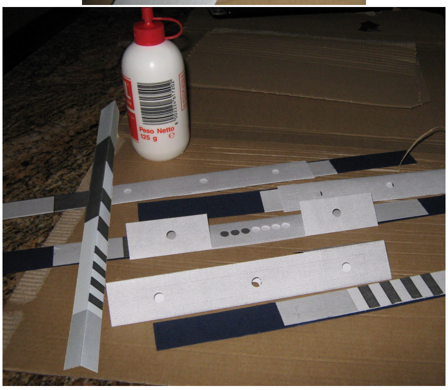
Come accennato poco sopra, viste le difficoltà riscontrate nel ricostruire con precisione i passi effettuati dal computer, i ragazzi sono stati invitati a sviluppare dei modelli in carta e cartoncino. Tra l'altro, l'uso di artefatti diversi con la funzione di modellare una stessa procedura si prefigge di agevolare i processi di astrazione e concettualizzazione (vedi anche [47]).

Un primo semplice artefatto è costituito da tasselli, ritagliati dagli allievi, che riportano la cifra 0 da un lato e 1 dall'altro. Disponendo tali tessere su una griglia 4×3 (vedi illustrazione) è possibile riprodurre la rappresentazione interna delle configurazioni del gioco adottata da Nimrod. Dopodiché, le principali operazioni previste dall'algoritmo possono essere simulate girando opportunamente i tasselli.



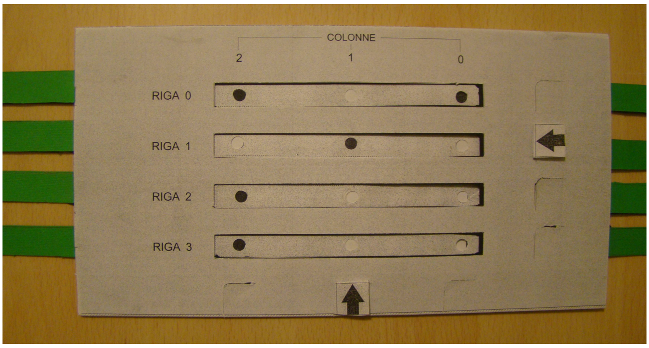
Tecnologia trasparente

Grazie anche alla collaborazione dell'insegnante di tecnologia, si è quindi passati alla realizzazione di un artefatto in cartoncino in grado di modellare il funzionamento di Nimrod in maggior dettaglio.



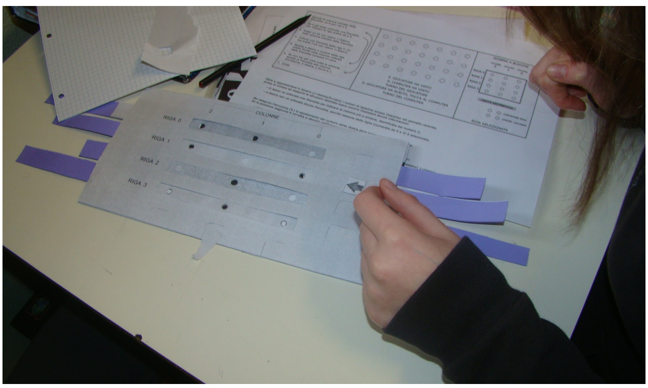
La configurazione del gioco (monitor centrale di Nimrod) e la rappresentazione interna binaria (pannello destro) sono rappresentate sulle due facce dell'artefatto, dove le lampadine sono simulate da fori circolari sotto i quali scorrono delle strisce di cartoncino con delle bande bianche e nere. Le bande bianche e nere sui due lati delle strisce sono disposte in modo tale da garantire automaticamente la coerenza fra le due rappresentazioni. In corrispondenza alla matrice binaria sono inoltre previste delle "tasche" per innestare dei tasselli con una freccetta allo scopo di tenere traccia della riga e della colonna selezionate nel corso dell'elaborazione.

Il modello così articolato si presta a simulare i passi dell'algoritmo a un livello di dettaglio analogo a quello visualizzato dai pannelli frontali di Nimrod. Gli studenti avevano inoltre a disposizione un foglio supplementare che riporta il diagramma di flusso opportunamente adattato e le istruzioni di Nimrod riformulate in termini di operazioni eseguibili con l'artefatto di cartoncino.



Questa "ginnastica" di mappatura fra un codice e un altro e il conseguente continuo passaggio dal concreto all'astratto, come già affermava Piaget [87], ha sicuramente contribuito a migliorare la comprensione della procedura analizzata. Ciò è testimoniato anche dalle risposte ai quesiti del questionario successivo, che sono risultate significativamente più corrette rispetto all'anno precedente.

Più in generale, da un punto di vista didattico è inoltre importante l'impiego di linguaggi di natura diversa in relazione alla verbalizzazione di procedure, alla manipolazione di artefatti, all'uso di simulazioni attraverso il computer.

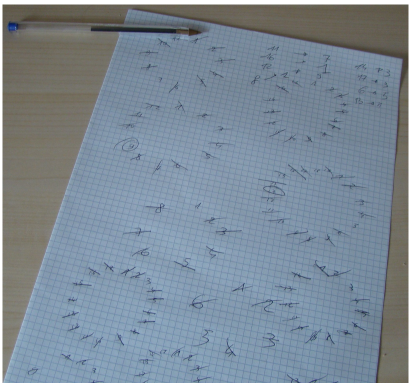


Sorprendenti potenzialità della manipolazione di bit

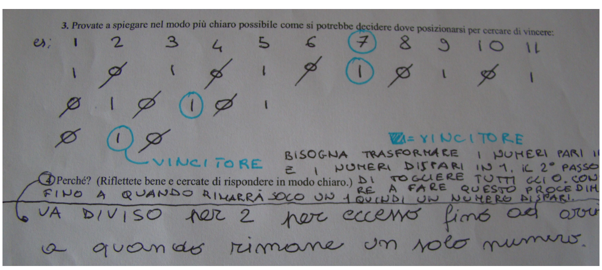
La tappa successiva ha proposto un diversivo, una sorta di "conta" ispirata all'epilogo del racconto dell'assedio Romano nell'opera di Giuseppe Flavio "Le Guerre Giudaiche". La rielaborazione proposta in [**graham_et_al_94**] come spunto per analizzare matematicamente un problema si presta a una drammatizzazione ludica. In estrema sintesi i ragazzi, disposti in cerchio, fanno circolare un testimone passandoselo l'un l'altro e uscendo uno si e uno no dal cerchio. In particolare, dopo il primo giro del testimone tutti i ragazzi inizialmente in posizione pari sono usciti e solo (circa) la metà rimangono in gioco nel cerchio. Si prosegue quindi in modo analogo con coloro che rimangono in gioco, fino a che un solo ragazzo si trova ancora nel cerchio, aggiudicandosi la "vittoria".

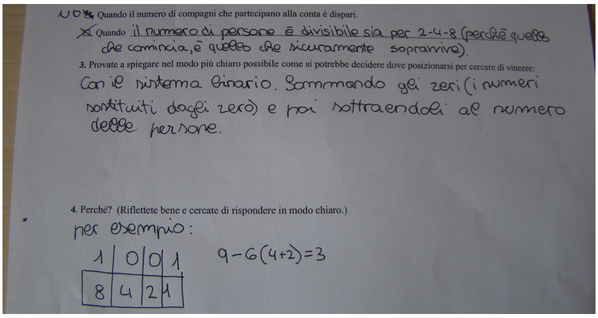
La domanda chiave è sorta spontaneamente: quale posizione bisogna occupare all'inizio per vincere? Nelle situazioni sperimentate si era scelto di volta in volta un numero diverso di partecipanti, mentre i compagni temporaneamente esclusi dal gioco avevano il compito di osservarne l'evoluzione registrando il numero di giocatori e la posizione iniziale del vincitore. Tuttavia non è così facile mettere in relazione l'esito del gioco con la disposizione iniziale.

Dopo un certo numero di osservazioni gli allievi, lavorando in coppia, sono stati invitati a ipotizzare possibili strategie per scegliere la posizione iniziale vincente, e a verificare le ipotesi fatte attraverso i dati raccolti ed eventuali ulteriori simulazioni con carta e penna.



L'attività, per sua natura chiassosa e movimentata, ha portato ad esiti molto interessanti. In particolare alcune ragazze hanno individuato autonomamente soluzioni (corrette) creative, una delle quali piuttosto originale e del tutto inattesa.





NO ☐ Quando il numero di compagni che partecipano alla conta è dispari.

☒ Quando il numero di persone è divisibile sia per 2-4-8 (perchè quello che comincia, è quello che sicuramente sopravvive).

3. Provate a spiegare nel modo più chiaro possibile come si potrebbe decidere dove posizionarsi per cercare di vincere:

Con il sistema binario. Sommando gli zeri (i numeri sostituiti dagli zero) e poi sottraendoli al numero delle persone.

4. Perché? (Riflettete bene e cercate di rispondere in modo chiaro.)

per esempio:

1	0	0	1
8	4	2	1

9 − 6 (4+2) = 3

Tutte le soluzioni trovate sono state esposte nella discussione finale e, ad un'analisi più approfondita, ci si è accorti che il sistema binario poteva di nuovo facilitarci il compito in modo insospettabile: il numero che si ottiene spostando la cifra più significativa della rappresentazione binaria del numero di giocatori a destra di quella meno significativa rappresenta la soluzione cercata. Per esempio, nel caso di 12 giocatori la posizione vincente è 9:

$$12 \quad \rightarrow \quad 1100 \quad \rightarrow \quad 1001 \quad \rightarrow \quad 9$$

Variazioni sul tema del "nim"

Questa attività è stata pianificata allo scopo di capire se ed eventualmente fino a che punto gli allievi sarebbero stati anche in grado di cogliere analogie e intuire le relazioni fra problemi all'apparenza diversi, ma che nascondono una struttura comune. I ragazzi sono stati quindi invitati a cimentarsi in coppia, contro il computer, su alcune "varianti" del gioco del nim così caratterizzate:

- Uno dei fiammiferi ha colore diverso e chi lo preleva perde; in questo caso ci si può ricondurre alla strategia nota semplicemente facendo finta che il fiammifero diverso non sia presente.

- variante "gelosia" del nim: perde chi preleva l'ultimo fiammifero, qualunque esso sia; in questo caso, pur non essendo evidente, la strategia nota funziona comunque fino al momento in cui una sola riga ha più di un fiammifero — dopodiché è ovvio come procedere.

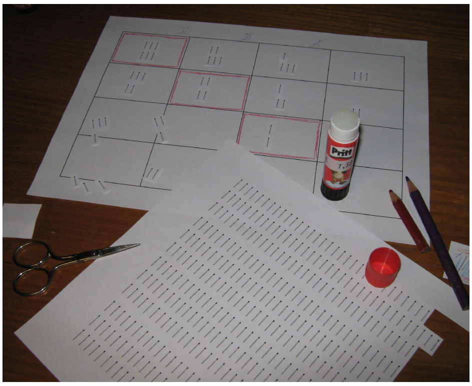
Inoltre, agli allievi è stato chiesto di esplorare strategie diverse seguite dal computer (alcune delle quali arbitrarie) cercando di caratterizzarne le regole. Tuttavia, in base all'esito del questionario somministrato alla fine di questa esperienza, i compiti assegnati si sono rivelati molto difficili per la maggior parte degli allievi, che hanno fornito risposte piuttosto superficiali.

Astrazione sul gioco

L'ultima tappa del II anno ha portato a un livello più astratto l'analisi della strategia di Bouton, proponendosi di far pensare *simultaneamente* diverse possibili evoluzioni del gioco, compito particolarmente impegnativo dal punto di vista cognitivo. La chiave dell'approccio risiede in un concetto di *invariante* che una buona strategia mira a realizzare ad ogni mossa. Si trattava, quindi, di fare emergere il ruolo dell'invariante in relazione al perseguimento di un esito favorevole del gioco.

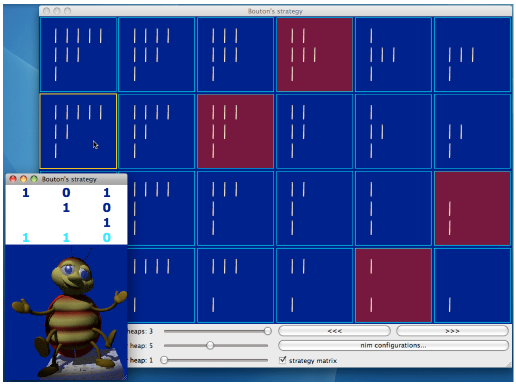
Poiché gli allievi dell'età considerata non sono ancora in grado di dominare il pensiero astratto, si è cercato di pianificare attività che costituissero un ragionevole compromesso fra concreto e astratto, dove ancora una volta l'esperienza "concreta" si è fondata sulla manipolazione di artefatti realizzati con carta, forbici, colla e matite colorate.

Presa come riferimento una configurazione iniziale costituita da due righe di tre fiammiferi ciascuna, agli allievi è stato innanzitutto chiesto di individuare tutte le configurazioni possibili del gioco che ne sarebbero potute conseguire, e di organizzarle in una griglia 4×4 in modo che ad una generica mossa corrisponda un spostamento (orizzontale) a destra oppure (verticale) in basso. Operativamente, gli studenti ritagliavano gruppi di fiammiferi da un foglio in cui ne erano stampate lunghe fila e li incollavano all'interno dei riquadri della griglia per rappresentare le diverse configurazioni.



Il compito successivo era di colorare i riquadri che rappresentavano configurazioni sfavorevoli per l'avversario, in cui il controllo di parità è verificato (che nel caso in esame si trovano lungo la diagonale principale della griglia), nonchè di osservare come esista sempre una mossa per passare da un riquadro non colorato ad uno colorato, mentre non è mai possibile passare in una sola mossa da un riquadro colorato a un altro riquadro colorato.

Successivamente si è ripetuta l'analisi nel caso un po' più complicato di una configurazione iniziale costituita da tre righe, rispettivamente con 5–3–1 fiammiferi, analisi che richiede una terza dimensione, nel caso concreto mappata su due fogli da sovrapporre (fiammifero nell'ultima riga presente o rimosso). Infine, attraverso una discussione collettiva, si è cercato di condurre i ragazzi a riflettere sull'evoluzione del gioco, quando uno dei giocatori applica la strategia di Bouton, in termini di "ripristino" dell'invariante realizzato nei riquadri colorati.



Terzo anno

Principali attività, in sintesi:

- Gioco in una mappa stile "Manhattan": insospettate analogie con il nim;
- Gioco del nim nella versione "gelosia";
- Confronto delle strategie per le due versioni del gioco del nim;
- Attività nello spirito della "filosofia per i ragazzi" (P4C);
- Animazione tramite la programmazione in Scratch;
- Visita di una mostra sulla storia degli strumenti di calcolo.

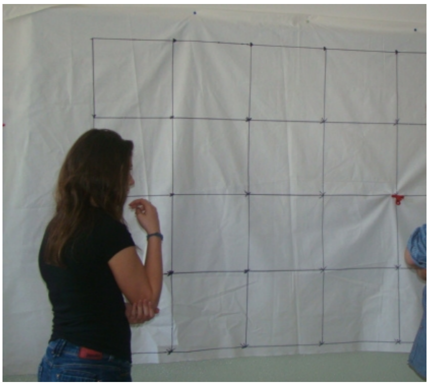
Anche per il terzo e conclusivo anno il percorso, a cui poteva essere dedicato meno spazio nell'ambito della programmazione scolastica, si è articolato in diverse attività, con una maggiore differenziazione fra i due istituti coinvolti. Ancora una volta l'arrivo di nuovi compagni da rendere partecipi di parte del lavoro svolto nelle fasi precedenti ha rappresentato l'occasione per una veloce ricapitolazione.

Istruzioni per un "flaneur" a Manhattan... drammatizzate

Questa attività, ispirata dagli strumenti utilizzati per analizzare le possibili evoluzioni del gioco alla conclusione del percorso dell'anno precedente, ripropone l'obiettivo di stimolare gli allievi a cogliere analogie e relazioni fra problemi che, al di là delle apparenze, condividono una struttura comune.

Specificamente, si è realizzato un gioco utilizzando un grande telo con disegnata una rete di strade allineate lungo due direzioni perpendicolari nello stile del quartiere New Yorkese di Manhattan. Le regole sono semplici: i giocatori spostano a turno un gettone, inizialmente collocato in un incrocio qualsiasi, con l'obiettivo di raggiungere l'angolo in basso a destra per vincere. Tuttavia gli spostamenti validi sono solo quelli lungo una singola strada, verso destra o in basso, di uno o più isolati.

Dopo aver lasciato il tempo di esplorare varie situazioni, giocando fra di loro, ai ragazzi è stato proposto un questionario con domande che avevano per oggetto la possibilità di mettere in atto una buona strategia. L'analogia con una delle esperienze fatte alla fine dell'anno precedente, se colta, consente di capire che per poter vincere è necessario cercare di posizionarsi in uno degli incroci disposti lungo la diagonale che include la destinazione finale. Può essere interessante osservare che tale analogia è stata riconosciuta dal 40% circa degli allievi, anche se non tutti sono poi riusciti a verbalizzare con sufficiente precisione le regole da seguire per decidere una mossa.



Un finale diverso

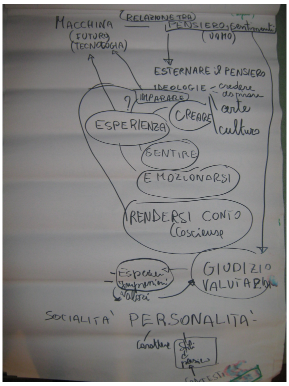
Successivamente si è ritornati ad esaminare in modo più approfondito la versione "gelosia" del gioco del nim, in cui perde chi preleva l'ultimo fiammifero. Dopo aver ripreso dimestichezza con le regole, giocando, si è tenuta una discussione collettiva durante la quale gli allievi sono stati guidati a ragionare e a comprendere i motivi di un certo modo di operare.

Un pizzico di filosofia...

Questa insolita attività ha coinvolto la docente di lettere che ha inteso indirizzare la discussione sulle tematiche emerse negli anni precedenti. In particolare, ha destato molto interesse la possibilità che un computer sia in grado di imparare come giocare dagli errori e dal comportamento dell'avversario, capacità che in genere sono considerate prerogativa degli esseri umani. Di conseguenza sono emerse alcune tematiche dell'intelligenza artificiale, tematiche che si è cercato di affrontare tramite le metodologia di Lipman della *Philosophy for Children* (P4C) e relative varianti [71, 109].

Il protocollo standard della filosofia per i ragazzi suggerisce che la classe, vista come di "comunità di ricerca", si disponga in circolo e condivida una lettura ad alta voce. Dopo una riflessione ci si comincia a porre delle domande inerenti al testo, le questioni vengono trascritte e il gruppo decide quali argomenti approfondire. L'insegnante, che assume il ruolo di facilitatore/moderatore, scrive su una lavagna gli interventi e funge da guida per raggiungere un'ipotesi condivisa. Lo stupore e la curiosità dell'interrogarsi di fronte al mondo sono infatti elementi propri dell'essere umano che già in giovane età inizia a porsi domande radicali sul senso del proprio esistere e della realtà che ci circonda.

Nel nostro caso, diversamente dal protocollo usuale, per stimolare la discussione erano stati scelti alcuni episodi del "giallo informatico Nouma" [37], una rappresentazione teatrale realizzata da allievi di liceo e registrata su DVD. Dopo un inizio timido, con interventi prevalentemente maschili, il dibattito si è ben presto acceso e ha coinvolto l'intera comunità: Sopprimere una macchina che ha comportamenti per certi versi "umani" è assimilabile a un assassinio? Il robot può commettere errori? E può sbagliare fino al punto di uccidere un umano?



Dalle risposte sono emersi alcuni spunti molto interessanti, tra cui la domanda, al centro del dibattito sull'intelligenza artificiale: "I robot possono pensare?" E le sorprese non sono mancate: cercare di assomigliare ad un altro significa anche capire le sue emozioni... È in questa prospettiva che il filosofare, inteso come capacità di riflettere su ciò che si ritiene importante ed essenziale, può divenire uno strumento educativo per educare a pensare.

Animazione della conta

Come si è accennato, alcuni sviluppi del progetto si sono differenziati nelle due scuole coinvolte. Mentre in una di esse si è sperimentato l'approccio della filosofia per i ragazzi descritto per sommi capi sopra, nell'altra i ragazzi sono stati invitati ad utilizzare l'ambiente di programmazione *Scratch* per creare brevi animazioni. La "conta" ispirata al racconto di Giuseppe Flavio ha fornito il pretesto per le animazioni, realizzate prestando particolare attenzione ai dati da fornire al computer per ottenere un certo risultato.

Scratch è un linguaggio di programmazione concepito a fini didattici [91], le cui strutture sono costituite da blocchetti che si combinano come tasselli di un puzzle, riducendo al minimo la necessità di fornire informazioni testuali. È particolarmente adatto a mettere in scena storie interattive (*storytelling* [68]), giochi, simulazioni, esperimenti virtuali; permette inoltre di condividere via web progetti pedagogici, o semplicemente di intrattenimento, coinvolgendo compagni di classe, amici, genitori.

Enigma alla fine

Il percorso si è concluso con la visita di istruzione alla mostra P.S.I.C. "Percorsi Storici dell'Informatica e del Calcolo" [17], allestita presso l'Istituto Tecnico "A. Volta" di Trieste.[1] Pur echeggiando nell'acronimo il celebre thriller psicologico di Hitchcock, il taglio del curatore Corrado Bonfanti non si presta alla facile evocazione di scenari fantascientifici, ma mette in luce i piccoli passi compiuti via via dall'uomo per realizzare strumenti di calcolo. La grande varietà di oggetti esposti racconta infatti una lunga storia nel corso della quale l'uomo ha concepito, progettato, costruito e utilizzato artefatti volti ad agevolare il calcolo e a potenziare le proprie capacità di elaborazione, diversificandoli a seconda delle situazioni problematiche da risolvere [16].

I ragazzi hanno visitato le sezioni della mostra osservando, e quando possibile "toccando" con mano, ogni strumento, dall'abaco, utilizzato fin dal 5000 a.C., ai dispositivi elettronici che risalgono solo a qualche decennio fa, ma che la rapida evoluzione a cui assistiamo ha già provveduto ad archiviare nei musei. Questa visita d'istruzione ha confermato l'importanza, anzi la necessità, di introdurre nella prassi didattica la dimensione storica, anche quando una materia come l'informatica sembrerebbe non averne bisogno. La riflessione sul progressivo cammino scientifico e tecnologico, il contatto con i vecchi strumenti e con i materiali utilizzati per costruirli (il legno per esempio) hanno molto sorpreso i giovani visitatori, ignari di questi antecedenti storici.

L'esperienza è stata infine arricchita dalla proiezione del film "Enigma" di Michael Apted, ispirato alle attività dei crittoanalisti di Bletchley Park, in cui si inserisce il significativo contributo di Alan Turing, per decodificare il codice della macchina *Enigma*, utilizzata dai nazisti durante la seconda guerra mondiale.

5.4 La voce della scuola

Le attività descritte nella precedente sezione si sono proposte di avvicinare i ragazzi ai contenuti *disciplinari* dell'informatica. Nel contesto della scuola media, l'ora di informatica tende prevalentemente a ridursi a una sorta di addestramento all'uso di alcuni strumenti ICT. In questo modo i ragazzi non si abituano a porsi in modo critico rispetto alle tecnologie che stanno adoperando; anzi, spesso l'atten-

[1] La mostra si articola in due sezioni: nella prima diversi poster illustrano personaggi, eventi, convegni e musei attinenti al tema della rassegna; nella seconda sono esposti un centinaio di reperti storici, i più antichi risalenti al XVIII secolo, molti dei quali tuttora funzionanti.

zione è concentrata esclusivamente sul prodotto, senza tener conto delle strutture sottostanti che ne permettono la realizzazione.

Un approccio diverso, volto a creare le condizioni di una crescita culturale, ci viene suggerito da progetti internazionali come *CS Unplugged* [10], da cui hanno tratto ispirazione anche parte delle attività da noi proposte. Seguendo questo tipo di impostazione non si pone l'accento sull'impiego di tecnologie, ma sulla concettualizzazione, sulla metodologia, sui processi cognitivi che possano concorrere alla formazione scientifica degli allievi. Comprendere i principi generali e la logica alla base degli strumenti di calcolo aiuta l'allievo a organizzare il proprio pensiero, a sviluppare un'attitudine critica e ad acquisire una maggiore consapevolezza della reale portata dell'informatica.

Per raggiungere questi obiettivi è stato scelto un gioco che favorisse il coinvolgimento attivo e che, nello stesso tempo, permettesse agganci con la storia e con altre materie di studio (matematica, scienze, letteratura) in un'ottica di interdisciplinarità.

Processi mentali vs. concetti

Più in generale, a nostro avviso è importante mirare l'azione pedagogica non solo all'acquisizione di concetti, ma (e soprattutto) ai *processi mentali* in cui i concetti prendono sostanza. A tale proposito è interessante l'analisi della cognizione matematica da parte di Duval: "Da un punto di vista epistemologico esiste una differenza di fondo fra la matematica e gli altri domini della conoscenza scientifica. Gli oggetti matematici [...] non sono mai accessibili alla percezione o agli strumenti [...]. Il solo modo di accedervi e di trattare con essi passa attraverso l'uso di segni e rappresentazioni semiotiche" [47]. Quindi, secondo Duval, due tipi di trasformazione giocano un ruolo centrale: *trattamenti* e *conversioni* di rappresentazioni.

I trattamenti sono essenzialmente trasformazioni algoritmiche all'interno di un dato registro semiotico. Le conversioni si basano su mappe fra rappresentazioni di natura diversa e sono più complesse dal punto di vista cognitivo in quanto presuppongono di riconoscere che l'oggetto denotato è lo stesso, dissociandolo dalla forma della rappresentazione. Di conseguenza, i processi mentali peculiari della matematica richiedono la capacità di coordinare cognitivamente rappresentazioni semiotiche diverse al fine di compensare la mancanza di accesso diretto (o strumentale) alle entità denotate. Pertanto, sulla base dell'analisi di Duval, risulta importante lavorare con rappresentazioni eterogenee di uno stesso oggetto astratto: gli artefatti utilizzati nelle attività qui presentate, come per esempio i modelli in cartoncino e le simulazioni interattive, svolgono anche questo ruolo (vedi inoltre [74]).

Infine, la discussione degli aspetti di natura filosofica connessi alla caratterizzazione dell'intelligenza nell'uomo e nelle macchine viene affrontata, senza ovviamente alcuna pretesa di approfondire una tematica così complessa, attraverso gli strumenti della "filosofia per i ragazzi". Questa metodologia didattica ha lo scopo di stimolare i giovani allievi ad esercitare il loro spirito critico e prevede la conduzione di un dibattito nel corso del quale sono sollecitati a porsi domande, ad ipotizzare (diverse) possibili risposte, a confrontarsi argomentando il proprio punto di vista e rispettando quello degli altri.

In sintesi, l'approccio nella conduzione del progetto ha voluto tener conto di diversi spunti pedagogici:

- Integrazione delle prospettive di diverse discipline, perseguendo una visione unitaria della conoscenza.

- Introduzione di concetti risalendo ai momenti della loro genesi, quando si sono presentati nella forma più semplice, ispirandosi all'analogia fra sviluppo soggettivo e sviluppo storico; oltre ad essere di per sé istruttivo, questo approccio rende la scienza più accessibile e meno astratta [59].

- Ricorso al registro narrativo, che rappresenta la prima forma di conoscenza del bambino [26, 27, 11], suscita curiosità e predispone all'ascolto.

- Ruolo pedagogico del gioco che, essendo percepito come esperienza non istituzionalizzata, non produce ansia ed evita la rinuncia a priori da parte degli allievi che riscontrano maggiori difficoltà, in particolare nella matematica [103].

- Attenzione al coinvolgimento emotivo, che favorisce l'apprendimento [112]; le situazioni di apprendimento, infatti, non sono mai neutre dal punto di vista emotivo ed affettivo [18].

Bilancio dal punto di vista della matematica

Da un punto di vista metodologico il gioco è servito agli allievi come mediatore per allenare la mente ad analizzare situazioni, cogliere i particolari, riconoscere pattern che si ripetono per poi indurre regole generali, mettere a confronto analogie e differenze. L'esercizio di individuare *invarianti* ha avuto ricadute positive nello studio delle trasformazioni geometriche. Il concetto di variabile, inoltre, è stato ritrovato nel calcolo letterale, facilitandone la comprensione. A questo proposito si è poi posta anche la questione del linguaggio da impiegare per esplicitare le regolarità individuate: per comunicare un'idea con sufficiente precisione è necessario fare ricorso a frasi più chiare e introdurre simboli idonei allo scopo.

Gli allievi sono rimasti molto sorpresi dallo scoprire le potenzialità del sistema di numerazione binaria, che nei problemi affrontati si è rivelato uno strumento agile e versatile in grado effettivamente di aiutarci. Questo ha sollecitato la loro curiosità al punto di chiedere di approfondirne la conoscenza e i campi di utilizzo. In relazione all'applicazione che si è fatta della rappresentazione in base due, anche il concetto di potenza ha assunto una valenza pratica importante che poi si è trasferita per lavorare con più facilità sulle unità di misura.

Da un punto di vista più generale, i ragazzi hanno potuto toccare con mano l'utilità di strumenti formali che di solito sembrano essere relegati alla sterilità, cosa che ha contribuito a percepire la matematica, con le sue regole da scoprire e i suoi linguaggi, come una disciplina "viva".

Bilancio dal punto di vista dell'informatica

Attraverso le attività proposte i ragazzi hanno potuto entrare "dentro" un computer e conoscere alcuni dei principi su cui si basa, il modo in cui sono rappresentate le informazioni e le caratteristiche della logica interna. In particolare, il confronto delle tecnologie degli anni di Nimrod con quelle attuali ha messo in evidenza che i principi di fondo ne sono indipendenti e riguardano molto di più il nostro modo di interpretare i fenomeni e le capacità organizzative della mente umana.

Il confronto di artefatti dalle caratteristiche così diverse ha permesso inoltre di impostare un lavoro che aiuti ad attribuire un significato alle unità di misura di grandezze di rilievo per l'informatica — e ai diversi ordini di grandezza delle entità misurate.

Per maggiori dettagli su motivazioni e implicazioni delle attività svolte d un punto di vista informatico si veda anche l'articolo [78].

Bilancio dal punto di vista delle scienze

Molte delle attività svolte hanno comportato momenti di esplorazione, osservazione e formulazione di ipotesi da sottoporre a vaglio. Il principale contributo all'assimilazione di un metodo scientifico riguarda proprio la necessità di verificare le proprie ipotesi e il saper essere critici nel momento in cui la risposta ottenuta non è quella attesa.

Anche il gusto della ricerca per affrontare con successo una situazione problematica ha animato le attività, mettendo in luce come le conoscenze acquisite in un ambito possano aprire nuove strade in un ambito diverso.

Bilancio dal punto di vista delle competenze generali

Nel corso del triennio gli allievi hanno gradualmente affrontato situazioni in cui la capacità di analizzare, gestire le conoscenze, ricercare soluzioni li ha sicuramente aiutati ad avere una maggior autonomia e a perseguire quella che è una delle competenze chiave: "imparare ad imparare". Complessivamente poi c'è stata una spinta a migliorare il proprio metodo di lavoro, messo ripetutamente alla prova per affrontare situazioni problematiche.

Le diverse attività pratiche e manipolative hanno ancora una volta dimostrato la forte correlazione tra il concreto e l'astratto, dove ciascuno dei poli complementa e potenzia l'altro. Il poter verificare concretamente le ipotesi fatte determina sicurezza e incentiva gli sviluppi successivi.

Le attività a piccoli gruppi hanno rafforzato la capacità di collaborazione e aiutato a limitare la propria individualità. Infine le attività ispirate alla metodologia della filosofia per ragazzi, basate sul continuo confronto con i compagni, ha migliorato le capacità espressive, argomentative e, soprattutto, di ascolto dell'atro.

Ulteriori riscontri

Pur trattandosi di una strategia per alcuni aspetti non banale, la semplicità delle regole e la ciclicità delle mosse permettono di proporla ad allievi della secondaria di primo grado. Si tratta eventualmente di limare alcune delle attività che si sono rivelate troppo impegnative dal punto di vista cognitivo, come l'esplorazione non guidata per scoprire analogie fra varianti del gioco del nim. A questo proposito forse sarebbe sufficiente prevedere dei percorsi più strutturati, con delle domande intermedie che aiutino l'allievo nel focalizzare la propria attenzione sugli aspetti rilevanti.

Probabilmente abbiamo infatti sottostimato la difficoltà di condurre un'analisi *sistematica*, competenza che, in base alle teorie dello sviluppo cognitivo che hanno ereditato l'impostazione di Piaget, è prerogativa dello stadio *operatorio formale*, non sempre pienamente raggiunto alle età della scuola media [101]. Un ulteriore aspetto su cui riflettere è la scarsa familiarità con forme linguistiche *rigorose*, come indicato dalla discrepanza fra inaccuratezza nel tracciare i passi dell'algoritmo di Nimrod e correttezza della rappresentazione interna finale raggiunta, nonché dalla vaghezza nella verbalizzazione di procedure in generale.

D'altro canto, una sorpresa inattesa è stato lo spontaneo coinvolgimento di ragazze e ragazzi non sempre motivati ad affrontare compiti scolastici, o con percorsi difficoltosi. In particolare due ragazze hanno individuato autonomamente soluzioni creative al problema della "conta", e una delle soluzioni era veramente originale da ogni punto di vista. La gioia delle allieve per il risultato conseguito e per il ruolo positivo assunto è stato forse il migliore coronamento dell'esperienza fatta.

5.5 Conclusioni

Al di là della consueta difficoltà di trovare il tempo per attività extracurricolari, l'esperienza complessiva si è rivelata utile per allievi e insegnanti. Il feedback raccolto attraverso questionari di percezione soggettiva e test di comprensione consente di farci un'idea riguardo l'efficacia nel breve termine di un simile programma, in relazione agli obiettivi che ci siamo posti, e rivela possibili punti di debolezza nella pianificazione di alcuni dei compiti.

Dal punto di vista del gradimento, per il 91% degli allievi valeva la pena cimentarsi nell'esperienza. Nel complesso i temi sono stati giudicati interessanti e l'86% degli allievi ritiene di aver migliorato le proprie conoscenze metodologiche. È inoltre interessante osservare che più dei due terzi di essi (68%) hanno dichiarato di aver cambiato la propria visione dell' informatica: da un lato è stata una sorpresa scoprire che anche questa disciplina potesse avere una storia; dall'altro la struttura e la logica interna dei dispositivi informatici ha destato notevole curiosità.

Altri quesiti si riferivano alle tematiche che avrebbero eventualmente preferito approfondire. Le scelte più frequenti sono state: l'informatica in generale (44%), le potenzialità e i limiti di computer (43%), la logica interna di Nimrod (42%), lo sviluppo storico della tecnologia (37%). Prese nel loro insieme, dunque, le risposte sembrano indicare che gli obiettivi generali sono stati perseguiti con ragionevole successo.

In relazione agli obiettivi più specifici, verificati in itinere, le risposte ai test di comprensione sono risultate meno omogenee, ma complessivamente gli stimoli forniti hanno favorito il confronto e lo sviluppo di un'attitudine critica verso la conoscenza. L' "a-tipicità" delle situazioni didattiche ha permesso anche ai ragazzi più deboli di mettersi in gioco, osservando, facendo ipotesi e producendo con successo soluzioni alternative.

Il coinvolgimento e la partecipazione sono stati notevoli, probabilmente perché le ore scolastiche dedicate a queste attività sono state percepite come un'occasione di divertimento oltre che di apprendimento, cosa che ha inoltre consentito un consolidamento dei rapporti interpersonali nel gruppo classe. Bisogna riconoscere che durante queste attività l'atmosfera poteva essere chiassosa e a volte un po' eccitata, ma vale la pena lasciare il posto al "disordine" se questo può essere fonte di creatività e se si crea un clima di positivo antagonismo. Lasciar da soli gli allievi di fronte ad una situazione problematica, consentire loro di sbagliare e di cercare di correggere gli errori in modo autonomo, oppure tramite un'attività di peer-tutoring, rafforza la loro autostima e l'interesse verso la scoperta. Infine, anche per i docenti coinvolti la progettazione ha costituito un momento di scambio di opinioni, di collaborazione e di maturazione della professionalità.

5.6 Ringraziamenti

Un particolare ringraziamento a Rossana Vermiglio, coordinatrice del PLS "Matematica e Statistica" per la sede di Udine, e agli insegnanti dei rispettivi consigli di calsse che hanno contribuito alla realizzazione del progetto.

Riferimenti bibliografici

[10] Tim Bell et al. «Computer Science Unplugged: School Students Doing Real Computing Without Computers». In: *The New Zealand Journal of Applied Computing and Information Technology* 13.1 (2009), pp. 20–29.

[11] M. Bernardi. «La narrazione orale tra bambini ed adulti: da flusso continuo a vena carsica?» In: *Ricerche di pedagogia e didattica* 5 (2010).

[16] Diana Bitto et al. «Spunti didattici attraverso la storia degli strumenti di calcolo». In: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 28.6 (2005), pp. 675–684.

[17] Corrado Bonfanti. «Premessa – PSIC a Trieste: una mostra permanente sulla storia degli strumenti di calcolo e dell'informatica». In: *QuaderniCIRD* 10 (2015), pp. 5–12. ISSN: 2039-8646.

[18] P. Boscolo. *La fatica e il piacere di imparare – Psicologia della motivazione scolastica*. UTET Università, 2012.

[19] Charles Leonard Bouton. «Nim, A Game with a Complete Mathematical Theory». In: *Annals of Mathematics*. Second Series 3.1 (giu. 1901), pp. 35–39.

[26] Jerome S. Bruner. «La costruzione narrativa della "realtà». In: *Rappresentazioni e narrazioni*. A cura di M. Ammanniti e D. N. Stern. Bari: Laterza, 1991.

[27] Jerome S. Bruner e Helen Haste. *Making sense – La costruzione del mondo nel bambino*. Anicia, 1998.

[36] Edward U. Condon, Gereld L. Tawney e Willard A. Derr. *Machine to Play Game of Nim*. U.S. Patent 2,215,544. Set. 1940.

[37] R. Crapiz e G. Trifiletti (a cura di). *"Nouma" – Giallo informatico (libro e DVD con i filmati dell'evento teatrale)*. Milano: Kangourou Italia Editore, 2011.

[47] Raymond Duval. «A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics». In: *Educat. Studies in Mathematics* 61.1–2 (2006), pp. 103–131.

[59] Giuseppe Gentile. «La storia della Matematica per la didattica della Matematica – Cosa può insegnarci Archimede?» In: *Atti del Convegno AICM-GRIM'05*. Pubblicazioni online dell'AICM, 2005.

[62] Pete Goodeve. *Welcome to... NIMROD*. Accessibile on-line (Dec 2014): http://www.goodeveca.net/nimrod+.

[68] Caitlin Kelleher. «Supporting Storytelling in a Programming Environment for Middle School Children». In: *Proc. of the 2nd ICIDS*. 2009, pp. 1–4.

[71] Matthew Lipman. «Philosophy for Children: Some Assumptions and Implications». In: *Ethik und Sozialwissenschaften: Streitforum für Erwägungskultur* 12.4 (2009), pp. 405–417.

[74] Michela Maschietto e Maria G. Bartolini Bussi. «Working with artefacts: gestures, drawings and speech in the construction of the mathematical meaning of the visual pyramid». In: *Educational Studies in Mathematics* 70.2 (2009), pp. 143–157.

[75] Marta Menghini. «On potentialities, limits and risks». In: *History in Mathematics Education – The ICMI Study*. A cura di John Fauvel e Jan Van Maanen. Kluwer, 2002, pp. 86–90.

[78] Claudio Mirolo e Doranna Di Vano. «"Welcome to Nimrod" to Learn CS Ideas in the Middle School». In: *Proc. of the 8th WiPSCE 2013*. Aarhus, Denmark: ACM, nov. 2013, pp. 61–70.

[87] Jean Piaget. *Dal bambino all'adolescente – La costruzione del pensiero*. Firenze: La Nuova Italia, 1969.

[89] Luis Radford. «Historical formation and student understanding of mathematics». In: *History in Mathematics Education – The ICMI Study*. A cura di John Fauvel e Jan Van Maanen. Kluwer, 2002, pp. 143–148.

[91] Mitchel Resnick et al. «Scratch: programming for all». In: *Communications of the ACM* 52 (11 2009), pp. 60–67.

[103] F. Spagnolo. *Insegnare le matematiche nella scuola secondaria*. Firenze: La Nuova Italia, 1998.

[106] Alan Madison Turing. «Computing Machinery and Intelligence». In: *Mind* 59.236 (1950), pp. 433–460.

[109] Nancy Vansieleghem e David Kennedy. «What is Philosophy for Children, What is Philosophy with Children — After Matthew Lipman?» In: *Journal of Philosophy of Education* 45.2 (2011), pp. 171–182. URL: http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9752.2011.00801.x.

[112] Lev S. Vygotskij. *Il ruolo del gioco nello sviluppo*. Anicia, 1966 (ed. originale).

"ARCHEOLOGIA DELL'INFORMAZIONE": NELLA SCUOLA ELEMENTARE

DIANA BITTO, CLAUDIO MIROLO

6.1 Introduzione

La sperimentazione presentata in questo articolo nasce da una serie di esperienze precedenti che hanno coinvolto vari ambiti e vari livelli scolastici, allo scopo di integrare il programma di storia con lezioni sulle conoscenze matematico-scientifiche riguardanti le civiltà antiche. Per raggiungere questo obiettivo si sono utilizzate riproduzioni di antichi oggetti relativi all'ambito logico-matematico attraverso i quali gli studenti hanno avuto l'opportunità di riflettere sul faticoso percorso intrapreso dall'Uomo per raggiungere l'attuale livello culturale.

Ne è nata una serie di unità didattiche che sono state modulate a seconda del livello scolastico e del tempo che vi si intende dedicare. Fra queste, le attività rivolte alla scuola primaria sono state particolarmente apprezzate per la loro efficacia formativa in virtù del parallelismo fra il percorso effettuato dall'Uomo per sviluppare il pensiero logico-matematico e quello del bambino nei primi anni di vita. Si è infatti osservato che illustrare tale percorso ai piccoli allievi permette di aiutarli a rintracciare nel proprio vissuto gli elementi costitutivi del proprio modo di ragionare e dei propri personalissimi "algoritmi" di calcolo elementare, e contribuisce così a consolidare le loro basi di aritmetica.

Inoltre la presentazione in classe di copie di reperti archeologici per la codifica di dati numerici e di modelli di antichi strumenti di calcolo si è rivelata un efficace stimolo alla riflessione sui concetti fondamentali della matematica elementare e un mezzo per migliorarne l'assimilazione [7, 54]. Si è quindi puntato molto, nella fase del laboratorio, sulla riproduzione di tali oggetti che offre l'occasione per attività manipolatorie e organizzative, particolarmente importanti per la scoperta e l'apprendimento.

Il "pensiero matematico" è prevalentemente supportato da una rete di collegamenti fra le aree corticali preposte alla rappresentazione delle quantità, all'identificazione visiva, al trattamento dei linguaggi, alla ideazione di strategie e piani, e così via [41]. In particolare da studi relativamente recenti è emerso che, anche solo per effettuare un semplice calcolo numerico, utilizziamo tre diversi sistemi di manipolazione numerica: il sistema verbale, quello visivo e quello analogico.

Il primo di questi ha sede nell'emisfero sinistro, viene attivato dalle parole-numero (ad esempio "sette") ed utilizzato per operazioni semplici o per le tabelline già memorizzate attraverso l'esercizio orale. Il sistema visivo si attiva in presenza di segni grafici come appunto le cifre indo-arabe ("7"). Ad esso si ricorre quando le operazioni coinvolgono numeri troppo alti per il sistema verbale (es. cinquantatre per diciassette) ed il cervello richiede la visualizzazione delle cifre per iniziare l'algoritmo di calcolo. Il sistema analogico, invece, percepisce il numero in modo approssimativo e quindi è solamente in grado di rilevare se due numeri sono abbastanza vicini o distanti. Lavora in parallelo con gli altri due sistemi e non controlla se i risultati sono esatti ma solo se sono plausibili.

Per un buono sviluppo del pensiero logico-matematico è dunque importante che si creino fra le varie aree corticali stabili legami neurali. La costruzione di questa complessa rete inizia nei primi mesi di vita e prosegue nel tempo, permettendo al bambino di acquisire in forma molto personale i concetti di corrispondenza biunivoca, quantità, numero, operazione. Tutto ciò avviene soprattutto attraverso la vita di relazione, l'esplorazione dello spazio, la manipolazione degli oggetti e la comprensione del loro funzionamento.

È in base a queste osservazioni che si è deciso di inserire nel progetto le classi del primo ciclo della scuola primaria, possibilmente iniziando dalla classe prima.

6.2 Inquadramento storico

Studi fatti su animali, su popolazioni che hanno ancora uno stile di vita assimilabile a quello paleolitico e su neonati, hanno evidenziato che essi fra i sistemi accennati precedentemente usano il sistema analogico in una forma che chiameremo "sensazione numerica" o "senso del numero" [108]. Essa è semplicemente la capacità di distinguere, fra collezioni di oggetti, quale sia la più numerosa. A questo stadio dello sviluppo cognitivo l'insieme considerato non viene visto come un aggregato di elementi distinti ma come un tutt'uno in cui il concetto di quantità dipende spesso dalla forma dell'insieme e dal volume complessivo. È una fase arcaica, probabilmente legata a priorità di sopravvivenza, nella quale la dimensione delle prede o dei predatori è predominante sul numero. Ancor oggi nel valutare la numerosità di un insieme, risentiamo di questa sensazione numerica ma abbiamo imparato a superarla confrontando gli insiemi attraverso una corrispondenza biunivoca o contandone gli elementi.

Inizia in questo periodo anche un primo uso del sistema verbale, che non utilizza ancora parole apposite ma modifica il sostantivo in funzione della quantità. Per questo alcune popolazioni primitive hanno inventato parole diverse per dire un pesce, due pesci... un po' come se dicessimo perla, braccialetto, collana, per riferirci al numero di perle che li compongono.

In un momento successivo vengono introdotte le prime parole-numero per denotare la cardinalità di insiemi contenenti uno o due elementi mentre rimangono indifferenziati gli insiemi più numerosi (si parla di "molti") [65]. È la numerazione tipica dei cacciatori raccoglitori che non hanno necessità di stoccaggio né possiedono arnesi se non in quantità limitata (appunto uno o due). Ne sono un esempio gli indigeni del Mato Grosso che usano solo tre forme verbali: *amero* per dire uno, *alene* per dire due e poi dal tre in avanti *balene*, cioè "tanti" [70]. Si possono trovare tracce "fossili" di questo esiguo conteggio anche nei nostri linguaggi attuali. In francese per esempio il termine *très* serve a comporre il superlativo (*très bien*, *très bon*, ...) e, all'interno delle lingue indoeuropee, il prefisso *tr–*, o uno simile, indica spesso qualcosa di grande o numeroso. Altre popolazioni utilizzeranno combinazioni di termini analoghi ma sempre per quantità molto limitate (2+1; 2+2, 2+2+1..) e poi "molti".

Queste osservazioni rivelano aspetti profondi della nostre strutture cognitive ampiamente sperimentati. È provato per esempio che noi non cogliamo istantaneamente, senza contare, la numerosità di un insieme con più quattro elementi [6]. Possiamo indovinare la cardinalità cinque o sei se la posizione degli oggetti ricorda una struttura nota come quella delle facce di un dado. In caso contrario il cervello deve scomporre preliminarmente l'insieme in tanti piccoli gruppi da addizionare.

Nel seguito vedremo come tutto ciò abbia influenzato in vario modo la nascita della scrittura numerica e la scelta degli strumenti di calcolo.

I modelli

Con la formazione di gruppi sociali più numerosi nascono esigenze di maggiore controllo sui beni posseduti o sul numero di componenti del clan. Ne deriva l'utilizzo di piccoli oggetti da porre in corrispondenza biunivoca con gli elementi dell'insieme considerato. Dal punto di vista quantitativo essi rappresentano un *modello*. Il primo modello fu probabilmente il corpo le cui componenti, non solo le dita ma anche gomiti, spalle ecc.., furono messe ordinatamente in corrispondenza con gli elementi da contare. Contemporaneamente si utilizzarono, come già detto, piccoli oggetti come ciottoli, bastoncini, conchiglie oppure elementi singoli come taglie o cordini variamente annodati.

Va notato comunque che simili modelli di cardinalità non presumono necessariamente un concetto astratto di numero [6]. Nei millenni seguenti, nelle regioni in cui sorsero consistenti insediamenti stanziali con problemi di scorte e di scambi commerciali si rese necessario sviluppare modelli più articolati. Ecco quindi ognuno dei sitemi in uso evolversi per rappresentare un intervallo più ampio di numeri e consentire un primo approccio al calcolo. Si sono trovate tracce di questa evoluzione un po' in tutto il mondo e sono interessanti gli sviluppi che ogni sistema ha avuto. Nel seguito sono citati gli esempi più significativi e documentati.

Le parole numero

Ci si può chiedere perché raccogliere pietruzze o incidere tacche su un bastone... quando si potrebbe esprimere la quantità con una parola. Il motivo è che inventare una nuova parola con una semantica condivisa richiedeva anni di interscambi.

Figura 6.1: Semplici modelli per rappresentare cardinalità.

Esaminando le parole numero di alcune popolazioni ancora a livello primitivo si è potuto rilevare che esse derivano quasi sempre dall'utilizzo del corpo come modello. Questo uso ha generato sistemi di numerazione con basi diverse a seconda delle parti del corpo coinvolte. In tempi storici le basi più usate furono la base 20 (per esempio presso i Maia, gli Aztechi, i Celti, gli Esquimesi) e la base 10 che usiamo attualmente.

Si suppone inoltre che sia emersa, nel giro di qualche millennio, una differenziazione tra la parola che indicava un determinato dito e quella che rappresentava la quantità corrispondente: mentre la parola relativa all'arto subiva nel tempo una variazione linguistica, quella originaria rimaneva praticamente invariata nell'indicare un numero fino a diventare la parola astratta che usiamo tuttora. Ciò giustificherebbe le notevoli assonanze, specialmente fra le prime dieci cifre, in tutte le lingue indoeuropee [29].

Le mani

Il nostro modo di enumerare utilizzando le dita si limita alla prima decina, ma varie popolazioni hanno inventato altre tecniche per arrivare a numeri più grandi utilizzando chi le nocche, chi le falangi ed anche queste in modi alquanto diversi; particolari segni con le dita si notano tuttora nelle contrattazioni al mercato o in borsa e, forse dall'uso delle falangi, è nata in Mesopotamia la numerazione in base 60.

Il modo di flettere le dita che ha continuato ad essere usato per secoli è l'*indigitatio*: un tipo di rappresentazione numerica nata probabilmente in Egitto e da qui diffusa in ambito greco-romano [65].

Figura 6.2: Allegoria dell'Aritmetica in un bassorilievo della Fontana Maggiore di Perugia.

Essa è stata ampiamente utilizzata fino al tardo '700 e viene ancora usata, ad esempio, dalla popolazione Masai. È un modo di comunicare quantità, che non avviene più esibendo un modello e cioè tante dita quanti sono gli oggetti ma ogni numero viene rappresentato attraverso una combinazione diversa delle dita stesse che saranno più o meno flesse, estese o sovrapposte. Superata la corrispondenza biunivoca, viene quindi attivato il sistema visivo che riconosce il numero nella particolare configurazione della mano o nella combinazione delle due mani.

Una seconda modalità, che consente di effettuare non solo somme o sottrazioni ma anche moltiplicazioni, consiste nel calcolo manuale, particolarmente utile fino all'avvento di supporti per la scrittura a basso costo [65, 115]. Questa tecnica digitale fu assorbita dai romani che la introdussero nei loro curricoli scolastici come una delle materie fondamentali. Dopo la morte di Boezio, l'ultimo e forse unico matematico romano, la pratica andò scomparendo, ma nel 725 d.C. un monaco irlandese conosciuto come il Venerabile Beda ne promosse la diffusione attraverso il suo libro "De Temporum Ratione". Da allora l'indigitatio ha trovato numerosi ed importanti sostenitori e, nelle allegorie medioevali, l'Aritmetica è spesso rappresentata da una donna che atteggia le mani in una posizione del calcolo digitale.

Tutto ciò richiede comunque un notevole esercizio ed una certa cultura matematica. Popolazioni ad un livello culturale più elementare si sono accontentate di manipolare altri modelli per esempio tacche su ossa o su legno.

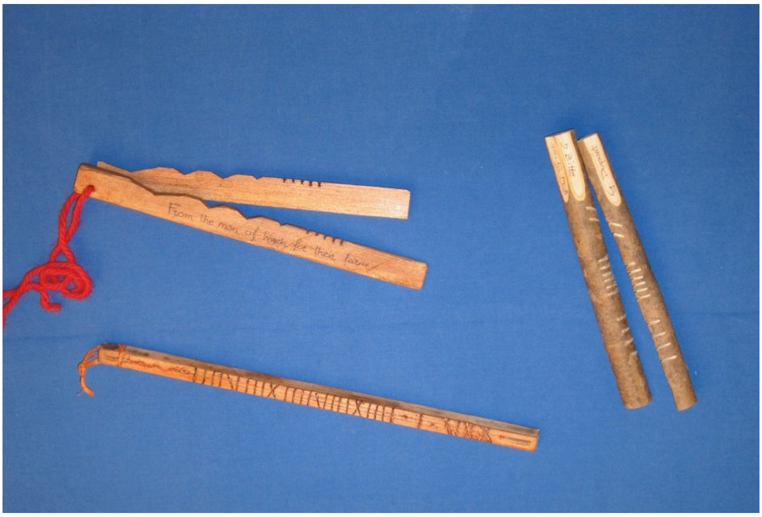


Figura 6.3: Ricostruzioni di taglie.

Le taglie

Si chiama taglia un qualsiasi oggetto sul quale vengono incise delle tacche in corrispondenza biunivoca con l'insieme di cui sono il modello. La più antica taglia attualmente conosciuta è stata rinvenuta in Congo. Si tratta di un osso di babbuino (20.000–18.000 a.C.) con incisioni poste a gruppi distinti che sono state interpretate in vario modo, anche come computi di fasi lunari.

Taglie in legno sono state utilizzate ad uso personale fino a tempi recenti. Data la scarsa possibilità di falsificare o cancellare un intaglio il loro uso era particolarmente consigliato anche per la redazione di contratti, tasse e bolle di accompagnamento [65].

Se le tacche erano più di quattro emergeva però il limite alla lettura visiva che è stato descritto precedentemente e quindi ben presto si iniziò ad incidere una tacca inclinata o di forma diversa ogni quattro per differenziare non solo la quinta ma anche la decima, la quindicesimaÉ e così via. Se esaminiamo le taglie presenti nei musei etnografici noteremo che molte incisioni somigliano a qualcosa di noto come la X e la V dei numeri romani e quindi si può ritenere che sia proprio da questo metodo di intaglio che il sistema visivo abbia estrapolato la numerazione romana.

I ciottoli

Un esempio di modello, che ha subito una importante evoluzione nel tempo, è rappresentato dalle collezioni di ciottoli. Nella *Mezzaluna Fertile* (Mesopotamia) essi vengono inizialmente sostituiti con palline di creta ma, con lo sviluppo dei primi agglomerati urbani intorno al 7000 a.C., compaiono alcune forme di numerazione tattile. Si tratta di gettoni figurati che rappresentano una determinata quantità di un

Figura 6.4: Ricostruzioni di oggetti in creta rinvenuti in Mesopotamia: gettoni, bulle e tavolette con informazioni di contabilità.

bene conteggiato ma la cui forma varia a seconda della categoria a cui si riferisce.

Questo tipo di rappresentazione numerica, ancora legata al concreto, verrà sostituita nei secoli da gettoni-numero di tipo puramente geometrico (bastoncino, pallina, dischetto, cono, ...), ognuno corrispondente ad un valore numerico noto. La loro comparsa indica il raggiungimento di una rappresentazione astratta del numero [97].

Nel quarto millennio a.C., dalle città-stato sumere si diffonde l'uso di una particolare forma di contabilità: la *bulla*. Si tratta di una palla cava di creta contenente una serie di gettoni-numero, probabilmente usata come bolla di accompagnamento negli scambi commerciali. Col passare del tempo, sulla superficie delle bulle compaiono impronte eseguite con gettoni analoghi a quelli custoditi all'interno. Questo evento (circa 3300 a.C.) viene considerato universalmente come la nascita della scrittura. Nello spazio di pochi anni, la bulla si trasformerà in una tavoletta di creta recante notazioni numeriche additive accostate a ideogrammi, che rappresentano gli oggetti inventariati [84].

In seguito si passerà dagli ideogrammi alla scrittura cuneiforme e alla scrittura numerica babilonese [5, 1]. Essa utilizza un minor numero di simboli in un sistema misto decimale sessagesimale e introduce una notazione posizionale con il tentativo di rappresentare lo zero. Attraverso questo sistema la matematica babilonese raggiunge elevati traguardi, testimoniati per esempio da tavolette come la YBC 7289 (della Yale Babylonian Collection), databile tra il 1900 ed il 1600 a.C., contenente il valore della radice di 2 esatto fino alla quin-

Figura 6.5: Attività ludiche sulla scrittura sillabica con i quipu.

ta cifra decimale. Il tipo di notazione continuerà ad essere utilizzato, specialmente dagli astronomi, fino ai tempi di Tolomeo e lascerà la sua traccia nel nostro modo di conteggiare il tempo e la misura degli angoli.

Una volta acquisito il concetto di scrittura, i vari popoli del Mediterraneo utilizzano la forma decimale additiva e analoghe tecniche di calcolo, seppure con simboli diversi. Un caso a parte è la scrittura usata dagli ebrei e dai matematici alessandrini [64]. In ambedue i casi le lettere dell'alfabeto sono usate come significante numerico. Gli alessandrini per esempio utilizzano le 24 lettere dell'alfabeto greco più tre desuete: le prime nove per le unità, altre nove per le decine e le ultime per le centinaia, da usare comunque additivamente. Per le quantità di ordine superiore venivano usati altri accorgimenti.

I nodi

Un diverso sistema di rappresentazione numerica si basa sui nodi. Esso è stato utilizzato in varie parti del mondo, annodando principalmente paglia o fili di lana. Il più studiato è quello rappresentato dai *quipu* incaici [107, 76]. Esso consiste in un insieme di fili di lana su ognuno dei quali sono distribuiti gruppi di nodi variamente distanziati

Come negli abachi—dove il valore dei gettoni (tutti uguali) dipende dalla posizione sulla scanalatura—in questi artefatti non è la forma, ma la posizione dei gruppi di nodi che determina il valore numerico. Per ottenere un vero significato posizionale tali fili debbono essere allacciati ad una corda detta madre in modo da acquisire il giusto ordine di lettura. Questo sistema di "scrittura" posizionale decimale può a volte risultare ambiguo in quanto lo zero, non aven-

Figura 6.6: Vari tipi di abaco utilizzati in luoghi ed epoche diverse.

do un suo simbolo tangibile, è rappresentato solo da un tratto di filo libero un po' più lungo fra i gruppi di nodi, ad esempio tra centinaia e unità.

Dalle ultime scoperte pare inoltre che l'uso dei quipu si sia evoluto in un esempio notevole di scrittura sillabica. Si tratta dei quipu filografati, nei quali un piccolo oggetto legato all'inizio del filo e seguito da un numero opportuno di nodi, corrisponde ad una sillaba.

Strumenti di calcolo

Nel ripercorrere la storia della numerazione viene spontaneo chiedersi se i diversi stili di registrazione dessero anche la possibilità di eseguire calcoli (proprietà *operative* di una rappresentazione [46]), ed eventualmente con quali metodi, ma anche se non vi fossero tecniche o strumenti che consentissero di alleggerire il noioso ripetersi della stessa procedura al variare dei dati da introdurre.

In effetti, a parte l'impiego delle mani, anticamente sono stati inventati pochi strumenti da calcolo. Oltre ai gettoni sumeri e alle varie forme di abaco—le cui origini si perdono nella notte dei tempi e che si possono considerare una particolare evoluzione dell'uso dei ciottoli—si hanno vaghe notizie solo di regoli a scorrimento e compassi di proporzione [115].

Dopo il ritrovamento del "calcolatore di Antikythera" risalente al primo secolo a.C., si può comunque ipotizzare la presenza di strumenti meccanici altamente specializzati ma estremamente costosi e quindi di diffusione estremamente limitata.

La parte di storia della matematica dedicata alla scuola primaria si esaurisce a questo punto, eventualmente includendo i bastoncini di Nepero, utilizzati per una rivisitazione dell'algoritmo di calcolo che oggi usiamo nelle moltiplicazioni. Si tralasciano, invece, le costruzioni di tipo geometrico di derivazione greca e strumenti che applicano proprietà geometriche come il mesolabio.

6.3 Descrizione

È noto che il bambino acquisisce i concetti di quantità e di sequenza ordinata di azioni in ambito prescolare. La complessa struttura di collegamenti fra le varie zone del cervello che contribuisce all'apprendimento di principi matematici ed algoritmici si forma autonomamente nei primi anni di vita ed ogni piccolo costruisce modelli molto personali circa la rappresentazione mentale della quantità [41]. A volte gli insegnanti sono tratti in inganno dal fatto che gli alunni conoscono le parole numero e la tiritera della conta; questo non significa che abbiano fatto proprio il concetto di numero. All'inizio della prima elementare non tutti i bambini hanno superato la fase tattile, alcuni sono ancora fermi alla sensazione numerica che porta a confondere la numerosità con il volume complessivo. Per questi sarà ancora necessario fare in modo che osservino e confrontino insiemi di piccoli oggetti e che li riproducano in un disegno schematico (dal concreto alla fase grafica). In seguito potranno imparare a contare verbalmente collegando la filastrocca, spesso udita da genitori e nonni, con il significato delle parole numero. Solo alla fine di questo percorso si sarà costituito un legame solido tra la numerosità di un insieme, la parola e il simbolo grafico che la denota.

Inoltre, l'approccio dei piccoli alle procedure di calcolo può essere assai vario, influenzato dall'ambiente e, specialmente nel caso di bambini con genitori provenienti da realtà diverse, da particolari abitudini familiari. Ne sono un esempio i bambini indiani che a casa usano la matematica vedica [60]. Altri possono aver elaborato autonomamente strategie specifiche—"*sette più otto: si deve fare sette più dieci meno due, no: si va al dieci, cioè tre, più quello che manca all'otto, no: togli due e tre da venti*". Si tratta appunto di strategie già elaborate in modo inconscio in età prescolare e che ben difficilmente potranno essere modificate. All'inizio della scolarizzazione può quindi capitare che alcuni bambini vedano negli algoritmi imposti dall'insegnante qualcosa di estraneo alla propria esperienza, una temibile regola calata dall'alto che si pone in conflitto con la strategia che si è già strutturata nel loro cervello e ciò, erroneamente, li fa *sembrare* ma specialmente *sentire* inadatti allo studio della matematica.

Alla luce di queste considerazioni si è proceduto ad organizzare un lavoro interdisciplinare che ha coinvolto le insegnanti di matematica, di italiano, di storia e di educazione all'immagine e sono stati proposti alcuni incontri per far conoscere alle insegnanti il percorso storico relativo allo sviluppo del pensiero logico-matematico. Si è passati quindi alla progettazione didattica che è stata sviluppata in due forme diverse: come introduzione alla conoscenza dei numeri e dell'aritmetica elementare per le classi prima e seconda; come integrazione della storia dei popoli antichi e riflessione sulla numerazione e sugli algoritmi di calcolo già noti nelle ultime tre classi del primo ciclo (si veda anche [13]).

Classi I e II

I bambini della prima classe non hanno ancora il senso dello scorrere del tempo e quindi della storia, ma, con l'aiuto dell'insegnante di italiano, si possono narrare delle storie per evocare la figura degli uomini primitivi e delle loro abitudini di cacciatori-raccoglitori per poi interrogarsi sulla necessità o meno di saper contare. In effetti per chi girovagava per i boschi o per la savana (Roberto: *"e non hanno nemmeno le tasche"*.) sarà stato difficile portarsi appresso più di due oggetti per cui tre saranno stati considerati "molti". Le tre parole-numero *amero* (uno), *alene* (due), *balene* (tanti), ancora usate nel Mato Grosso, divertono i piccoli e rappresentano uno stimolo per riflettere sul concetto di quantità.

In seguito, con salti spazio-temporali l'aula diventa lo spiazzo al centro del villaggio dove le tribù barattano oggetti vari. Gruppi di matite e pennarelli diventano allora insiemi di pesci e pellicce da mettere a confronto. Questi scambi, eseguiti manualmente, rafforzano il concetto di corrispondenza biunivoca, ma specialmente chiariscono il significato di espressioni come "differenza", "supera di...", "è inferiore di..." che spesso non appaiono ben chiari nemmeno a livello di scuola superiore. Infine se, avendo due insiemi Ð uno di pesci (più numeroso) e l'altro di frecce Ð si invitano i bambini ad appaiare un pesce con una freccia, fino all'esaurimento dell'insieme numericamente più piccolo, si può far intuire perché la differenza si ottenga con una sottrazione, che spesso viene eseguita "in fiducia" senza averne colto la motivazione. Questo laboratorio sui baratti farà inoltre rafforzare il concetto di *valenza* (*"Quanto vale una pelliccia?" "Una mano di pesci."*) già utilizzato dai bimbi nei loro giochi e fondamentale per l'introduzione della decina.

Per avviare le trattative servirà portare tutte le pellicce? Non basterà portare un modello? Per esempio colorare le dita in corrispondenza di ogni pelliccia. Ma finite le dieci dita?... Una uscita nel cortile della scuola offre la possibilità di pensare ad altri modelli: sassolini, foglie, rametti, che sono facilmente trasportabili finché non sono troppo numerosi. Ecco allora un sasso più grosso per rappresentare (*valere*) un certo numero di sassolini, e ugualmente il rametto più grosso, la foglia più grande. Si introduce così il passaggio alla decina e quindi l'avvio alla scrittura posizionale che richiede non solo l'acquisizione di parole nuove ma specialmente l'uso di cifre identiche con valenza diversa.

Una concreta visualizzazione della nuova situazione si può ottenere in classe utilizzando come modello degli stuzzicadenti o meglio dei salamini di creta. La piccola fascina contenete 10 stuzzicadenti accostata ad altri tre sfusi, porta a riflettere sulla semantica della nuova parola "tre-dici". Allo stesso modo la pallina ottenuta utilizzando 10 salamini accostata ad altri 8, chiarisce l'etimologia e facilita la memorizzazione di "dici-otto". L'uso della pallina risulta particolarmente formativo: inizialmente essa viene modellata utilizzando i dieci salamini ma, data la mole complessiva ottenuta, si passa all'uso di una pallina più piccola ma che si conviene *valere* 10 unità. Si arriva così a un passaggio fondamentale: il *cambio*, il *riporto* e l'*andare a prestito*.

"Scrivere" numeri utilizzando palline e bastoncini si dimostra molto utile nella classe seconda quando si prosegue con la numerazione oltre il 20 e si incontrano nuove parole che, con il suffisso enti, enta, anta, non evidenziano chiaramente un collegamento specifico con la decina. Inizialmente si prova a "scrivere" numeri entro il centinaio con palline e bastoncini disposti in ordine sparso; in seguito si osserva la comodità di raggrupparli per genere e si traduce la nuova situazione con la scrittura in cifre, secondo la convenzione del sistema posizionale. Continua poi il parallelismo fra le operazioni con questi "numeri tattili" e le scrittura in cifre. Nelle addizioni, l'aggiunta di una pallina corrisponde al riporto e nella sottrazione si rileva a volte la necessità del prelievo (prestito) di una delle palline. Analogamente, in seguito, si ragionerà sulla moltiplicazione e la divisione, prima con i numeri tattili e poi cercando la corrispondenza sulla pagina scritta.

Una volta acquisito il metodo, è semplice passare a numeri di ordine superiore, inventando una forma che valga 10 palline, per passare poi all'astrazione, aiutati anche dalla lingua italiana (due-cento, sette-cento, cinque-mila...). Questa notazione è comunque di tipo additivo e il valore dipende dalla forma dei gettoni, mentre nella nostra scrittura le cifre assumono valenza diversa a seconda della posizione. Per rafforzare questo concetto può essere utile la presentazione di una scrittura numerica basata sui nodi come quella incaica. Da che parte si tiene il filo? E se non ci sono decine? è un modo divertente per riflettere sul concetto di posizione e sulla necessità di rappresentare lo zero.

Il progetto rivolto al primo biennio finisce a questo punto. Riprenderà con un ripasso nella seconda metà della terza, quando l'insegnante illustrerà i primi passi dell'uomo del Paleolitico.

Classi III, IV, V

In queste classi, il percorso narrativo è presentato cronologicamente integrando la storia con spunti di matematica e tecnologia per cui è importante la collaborazione fra gli insegnanti di storia, matematica e immagine. Inizialmente, ad integrazione di quanto esposto dall'insegnante di storia riguardo le popolazioni preistoriche, si ripete il programma del ciclo precedente ma con maggiori esemplificazioni. Ritorna il concetto di corrispondenza biunivoca attraverso la descrizione delle varie strategie escogitate dai primitivi per esprimere quantità usando parti del proprio corpo. Gli alunni, divisi in piccoli gruppi, si divertono ad inventare corrispondenze diverse utilizzando non solo le dita, ma anche i gomiti, le spalle, le ginocchia, i piedi... (*"Ho un gomito destro di frecce, un mignolo sinistro di guerrieri..."*). Giocando ad indovinare il codice altrui, acquisiscono concetti basilari.

Figura 6.7: Corrispondenza biunivoca fra insiemi di oggetti diversi.

Durante la conta, mentre elencano le parti del corpo, essi notano che è necessario nominarle secondo un ordine precedentemente concordato, e quindi generare una sequenza *ordinata* di parole-numero [60]. Inoltre, apprendono che tale sequenza si conclude con la parola"uomo". Cosa significherà quindi *"Ho pescato un uomo e un ginocchio destro di pesci"*? Si osserva allora che è fondamentale conoscere il numero di parti coinvolte e ciò porta al concetto di *base* (un *uomo*). Si tratta di un processo sostanzialmente analogo a quello che ci porta a pensare una "decina" quando solleviamo il decimo dito per contare con le mani.

Passando poi a ricordare l'insieme degli oggetti usati nelle corrispondenze biunivoche, ci si propone di scoprire, di pari passo con la storia, la loro evoluzione e trasformazione in numeri e le eventuali proprietà *operative*—cioè la potenzialità di ricavare nuove informazioni attraverso manipolazioni formali.

La Mezzaluna Fertile

Lo studio della storia prosegue con la presentazione delle prime civiltà stanziali in Anatolia e Mesopotamia. Studiando i reperti archeologici si può seguire l'evoluzione dei conteggi, dall'uso di palline di creta, ai gettoni figurati, ai gettoni numero, alle "bulle", fino alle prime forme di registrazione scritta [97]. Ad ogni tappa, gli alunni vengono invitati a riprodurre le copie dei reperti presentate durante la lezione: i gettoni figurati che indicano una quantità (convenzionale ma a noi sconosciuta) del bene che raffigurano; i gettoni-numero la cui forma non dipende più dal bene conteggiato e che quindi rappresentano l'idea astratta di quantità; le bulle, palle di creta cave,

Figura 6.8: Strumenti per la contabilità e il calcolo in Mesopotamia.

contenenti gettoni-numero; le prime tavolette di creta, preludio della scrittura cuneiforme.

Avranno questi oggetti proprietà operative? I gettoni-numero certamente si. Con la loro forma: salamino (unità), pallina (decina), conetto (sessantina)... ricordano le operazioni già svolte in seconda elementare anche se ora la base è 60. Le impronte sulla superficie della bulla corrispondenti ai gettoni contenuti all'interno, segnano la nascita della scrittura e stimolano una riflessione su cosa significhi leggere e scrivere. Le tavolette di creta, recanti in un verso la distinta e sul retro il totale dei beni inventariati consentono di risalire al valore delle impronte-numero. Segue quindi l'evoluzione della scrittura da sumerica a cuneiforme e, a discrezione dell'insegnante, si può confrontare la notazione cuneiforme sessagesimale col nostro calcolo dei tempi o nelle operazioni con gli angoli.

L'Egitto

La civiltà egiziana con i suoi monumenti e le sue molteplici divinità occupa certamente la fantasia degli alunni e i simboli misteriosi della matematica egiziana li affascinano. La notazione decimale additiva, peraltro già sperimentata con i babilonesi, rende semplici i calcoli nelle addizioni e sottrazioni ed offre un bell'esempio di applicazione della proprietà distributiva nell'algoritmo della moltiplicazione [28]. L'occhio di Horus porta il discorso sulle frazioni ed alcuni dei problemi del papiro di Rhind offrono lo spunto per parlare della funzione dei geometri, della geometria e delle tecniche di costruzione dei templi. Lo spago chiuso ad anello e suddiviso in 12 parti uguali che si trasforma in un triangolo rettangolo con i lati di 3,4,5 intervalli non solo viene usato in giardino per tracciare sul terreno la pianta di una futura piramide, ma si presta a riprendere il concetto di misura e a cogliere intuitivamente le similitudini.

L'area mediterranea

Un breve excursus tra le civiltà mediterranee e sulle relative notazioni numeriche stimola la riflessione sui supporti usati per la scrittura. Ne vengono esaminati alcuni esempi e ricostruzioni: tavolette di creta per le civiltà micenee, cretesi e per tutto il medio oriente; papiro per l'Egitto (solo se i documenti erano importanti); cocci di terracotta (*ostracon*) per greci ed egiziani; corteccia di betulla per il nord Europa e, più tardi, pergamena, per tutta l'area mediterranea, ma usata solo per libri o atti importanti. Dalle missive private su tavolette cuneiformi imbustate in un "sacchetto di creta" con relativo indirizzo, passando per papiri e pergamene con la legatura sigillata, per tavolette di cera, molto usate dai romani, si arriva alle lavagnette che i bambini utilizzano a scuola nei film sul Far West. Osservando come tutti i supporti utilizzati siano o costosi o di limitata estensione, possiamo ben capire perché, per secoli, l'abaco e gli abacisti siano stati la colonna portante del calcolo commerciale e amministrativo.

La Grecia

Nell'illustrare la matematica greca, dopo aver descritto brevemente la notazione con numeri acrofonici [28]—utilizzati ancora nel V sec a.C. negli scambi economici—e dopo aver accennato alle operazioni effettuate con i numerali alfabetici detti alessandrini (Anna: "*... ma queste tabelline sono MOSTRUOOOSE!*"), è più interessante soffermarsi sui grandi matematici greci.

Ciò consente di introdurre il discorso sulla geometria attraverso alcune attività ludiche. Per esempio, imitando Talete, in una giornata di sole si può osservare l'ombra di un bastone piantato nel cortile per stimare l'altezza dei pali della luce. In seguito l'equivalenza fra figure piane, analizzata impiegando carta e forbici, aiuta a chiarire i concetti di superficie e di misura dell'area: probabilmente anche Pitagora aveva affrontato in termini analoghi la relazione fra i quadrati costruiti sui lati di un triangolo rettangolo.

Presentando invece la figura leggendaria di Archimede, si sollecita l'osservazione di fenomeni come il galleggiamento di barchette di carta di alluminio, il travaso di liquidi tra recipienti comunicanti, il gioco delle altalene, l'effetto termico degli specchi ustori. Attraverso simili esperienze si può accennare a cosa significhi "studiare la fisica".

Tornando infine alla scrittura numerica alessandrina, utilizzata da Archimede, si può citare l' "Arenario" dove egli illustra per la prima volta un metodo per poter rappresentare qualsiasi numero, per quanto grande. Con il nostro sistema posizionale ciò sembra scontato, ma con un sistema additivo come quello greco si sarebbe dovuto introdurre un simbolo diverso per ogni nuova unità di grandezza. Un buon punto in favore della notazione posizionale, che comunque dovrà attendere centinaia di anni per essere universalmente accettata.

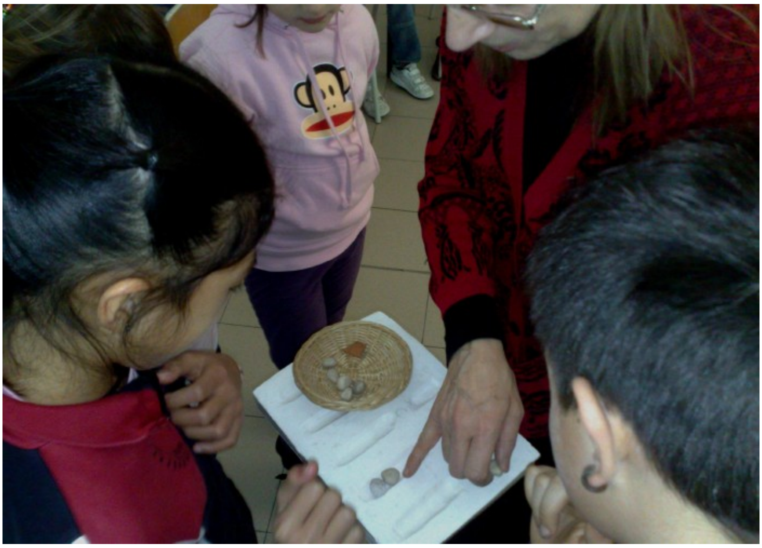


Figura 6.9: Proprietà operative della rappresentazione numerica posizionale in un abaco romano.

Roma

All'epoca dei Tolomei il centro della scienza si era progressivamente spostato ad Alessandria che, anche dopo la conquista romana e fino alla morte di Ippazia, mantenne il suo ruolo di polo scientifico per eccellenza in tutto l'impero. Che dire quindi a proposito della civiltà romana? Il suo pregio è stato il saper cogliere e sfruttare quanto c'era di buono nella scienza sviluppata da altri popoli. L'ingegneria idraulica e l'arco degli Etruschi, il calcolo e l'abaco della Grecia e del Medio Oriente, l'indigitatio e il calendario dell'Egitto ne sono alcuni esempi. Per quanto riguarda il sistema di numerazione, si fa osservare ai bambini che esso è talmente simile a quello etrusco da potersi considerare una sua derivazione [65]. Quello etrusco, a sua volta, proviene probabilmente dall'uso dei pastori che, nell'incidere le tacche sulle taglie, strumento già trattato precedentemente, differenziavano la quinta, la decima, e così via.

Restano da descrivere alcuni strumenti e metodi di calcolo. Il posto d'onore spetta certamente all'abaco, usato ancor oggi in varie parti del mondo, ma si possono considerare anche regoli a scorrimento per moltiplicazioni e divisioni (*"Così non servono le tabelline!"*), antesignani di quelli molto più complessi, usati fino a qualche decennio fa. L'illustrazione del "calcolatore di Antikythera" [81] fa ipotizzare l'esistenza di strumenti più raffinati.

Alla fine del percorso si possono citare alcune tecniche di calcolo, anche se estranee alle civiltà studiate. In particolare l'uso dello schema "a gelosia" per le moltiplicazioni o, allo stesso scopo, il divertente sistema Maya (o vedico), che non presuppone la conoscenza delle odiate tabelline. Ambedue i casi serviranno a far riflettere sulla proprietà distributiva della moltiplicazione, sul valore posizionale delle cifre e sulle analogie del nostro algoritmo per la moltiplicazione in colonna. Con la stessa finalità si possono infine presentare e far costruire i bastoncini di Nepero [31].

6.4 La voce della scuola

L'approccio proposto in questo articolo interpreta l'evoluzione storica non solo come fonte di contenuti da portare in classe, ma anche come strumento di pianificazione pedagogico-didattica [75, 89].

Gli argomenti illustrati non erano noti a gran parte delle insegnanti, che vi hanno però ravvisato corrispondenze con il percorso cognitivo dei propri alunni. Hanno pertanto colto l'opportunità di servirsi di un'attività didattica interdisciplinare, che mettesse a confronto non solo le discipline tra di loro, ma anche i processi cognitivi individuali con quelli sociali. Al termine del percorso didattico, le insegnanti hanno rilevato molteplici aspetti positivi:

a) La valorizzazione delle attività manipolatorie, piuttosto trascurate ultimamente, ma fondamentali per la conquista del concetto astratto—“*Nulla c'è nell'intelletto che precedentemente non sia passato per i sensi*” (Aristotele).

b) L'utilizzo di piccoli oggetti, che ha facilitato la comprensione del passaggio dall'unità alla decina e dato un senso logico alla scrittura posizionale dei numeri.

c) L'aspetto ludico, che ha fatto da sfondo all'attività didattica, potenziando l'interesse degli alunni e rendendoli più ricettivi a nuove conoscenze [61].

d) La riproduzione di oggetti e tecniche di calcolo in uso nell'antichità, che ha messo in evidenza abilità inaspettate proprio negli alunni scolasticamente più carenti, dando loro coraggio e fiducia in se stessi e spronandoli a cimentarsi anche con la pagina scritta.

e) L'interdisciplinarità, che ha favorito una visione più completa delle civiltà studiate attraverso l'acquisizione di un'idea unitaria e non frammentaria della cultura.

I bambini sono sempre apparsi particolarmente interessati. Superata l'iniziale timidezza, sono intervenuti, talvolta animatamente, per comunicare le proprie impressioni, per riferire le proprie esperienze, oppure per fare delle proposte. Hanno cercato di contribuire alle spiegazioni portando a scuola libri per l'infanzia contenenti illustrazioni o testi corrispondenti a quanto appreso. Questo tipo di attività favorisce un approccio giocoso al calcolo e alla matematica. L'aspetto teatrale coinvolge, diverte e rende partecipi anche gli alunni più schivi.

In questo contesto la presenza della lavagna luminosa ha enfatizzato il lato spettacolare. Le immagini proiettate sullo schermo richiamano la televisione ma non suscitano lo stesso atteggiamento passivo:

su di essa si può interagire e far vedere ai compagni il proprio operato. Possono appoggiarci sopra oggetti o gettoni e far vedere, per esempio, la costruzione di una corrispondenza biunivoca a tutta la classe o fare operazioni con l'abaco cogliendo i suggerimenti dei compagni. Posare un lucido in una posizione sbagliata, per esempio a rovescio, risveglia l'attenzione e tutti partecipano con suggerimenti per la correzione, curiosi di vederne il contenuto. Non c'è la preoccupazione della "interrogazione alla lavagna" e anche i più timidi sono attratti dal lavorare su questo strumento ormai sconosciuto.

Va inoltre osservato che questo tipo di esperienze mette il bambino in condizione di esercitare il coordinamento delle funzioni senso-motorie e della verbalizzazione, indispensabile per porre le basi dell'apprendimento soprattutto nei primi anni di scolarizzazione. Per esempio, per contare gli oggetti di un insieme il bambino deve stabilire una "corrispondenza biunivoca tra quattro categorie distinte di elementi: gli oggetti da enumerare, i gesti del braccio e della mano, i movimenti dello sguardo, la pronuncia delle parole" [110]. (Al riguardo si veda anche [69].)

Il metodo interdisciplinare ha mostrato la sua piena validità, e ne è un bell'esempio il momento in cui, su invito dell'insegnante di storia, gli alunni hanno simulato un mercato nella piazza di Ur, divertendosi a manipolare gettoni, dividendo, moltiplicando, sommando, sottraendo, sotto la supervisione dei "sapientini" che con carta e penna controllavano l'esattezza dei calcoli. L'insegnante di matematica ha sfruttato l'occasione per invitare gli alunni a formalizzare le procedure di scambio e di baratto, trasformandole in testi di problemi da sottoporre ai propri compagni. Per ottenere una stesura completa e non ambigua, è stata coinvolta anche l'insegnante di italiano, che ne ha tratto un divertente esercizio di lettura e scrittura di un testo "scientifico".

Vale infine la pena richiamare che, come sottolineato da Duval nel caso della matematica [48, 47], per l'apprendimento di concetti astratti l'obiettivo principale dell'educazione primaria non dovrebbe essere tanto quello di acquisire conoscenze disciplinari specifiche, ma di favorire lo sviluppo di una "architettura cognitiva". Duval quindi sottolinea che "le acquisizioni cruciali in questo senso non sono concettuali ma funzionali" [48].

Questo approccio alla conoscenza dei concetti matematici consente inoltre di porre le basi per un corretto apprendimento dell'informatica, che vada al di là dell'accezione strumentale oggi prevalente. L'utilizzo di applicazioni quali internet, editor di testo, fogli elettronici, ecc. a supporto di varie attività non è di per sé adeguato a favorire lo sviluppo di strutture mentali nei bambini [24, 25, 45, 55]. I concetti e le attività qui descritte possono invece risultare utili per un corretto insegnamento dei fondamenti dell'informatica, recuperando l'approccio dell'*informatica povera*, o *unplugged* [10], purtroppo dimenticata anche nella scuola di base dove invece sarebbe particolarmente appropriata. Per una discussione più articolata delle implicazioni dell'approccio da un punto di vista specificamente informatico si rimanda agli articoli [14, 15].

6.5 Conclusioni

Nonostante le difficoltà incontrate nell'organizzazione delle ore di compresenza e per la sovrapposizione di altri progetti, ci sembra che le attività abbiano avuto una accoglienza positiva sia da parte degli alunni, sempre interessati e coinvolti, sia delle insegnanti.

Al fine di una valutazione più oggettiva, gli allievi sono stati invitati a rispondere a un questionario di percezione e, cinque mesi dopo la conclusione delle attività, a un test sulle conoscenze acquisite che includeva esercizi sulle tecniche di codifica e di trattamento dell'informazione. I riscontri raccolti consentono di farsi un'idea riguardo l'efficacia del percorso proposto in termini di coinvolgimento dei bambini e di ritenzione delle nozioni apprese. Si è così potuto osservare che, a distanza di tempo, gli allievi sono ancora in grado di ricordare più cose di quante si possa immaginare, avendo assimilato comunque meglio ciò di cui hanno avuto esperienza *concreta*, in particolare attraverso il lavoro manuale che hanno molto apprezzato.

A conferma dell'interesse suscitato, alcune insegnanti hanno espresso il desiderio di riproporre autonomamente il lavoro alla ripresa del ciclo scolastico: *"Si è così creato un importante 'ponte' culturale che, abbracciando discipline diverse come matematica, tecnologia, storia ed arte, ha saputo condurre gli alunni ad una comprensione più profonda, corroborata da esperienze laboratoriali, anche degli strumenti che l'uomo ha ideato per risolvere problemi non solo matematici in epoche storiche ed in civiltà diverse". "Abbiamo valutato positivamente la metodologia usata che prevedeva il ruolo attivo dei bambini nel trovare soluzioni sia nella ricerca simbolica, che nella registrazione dei dati". "È stata un'esperienza assolutamente valida, da ripetere e diffondere".*

6.6 Ringraziamenti

Un particolare ringraziamento a Rossana Vermiglio, coordinatrice del PLS "Matematica e Statistica" per la sede di Udine, e alle insegnanti che hanno contribuito alla realizzazione del progetto.

Riferimenti bibliografici

[1] AA. VV. «L'écriture depuis 5000 ans – des hiéroglyphes au numérique». In: *Les collections de L'Histoire* 29 (ott. 2005).

[5] Bruno G. Bara. *Il sogno della permanenza*. Bollati Boringhieri, 2003.

[6] John D. Barrow. *Pi in the Sky: Counting, Thinking, and Being*. Ed. italiana: La luna nel pozzo cosmico, Adelphi. Oxford University Press, 1992. ISBN: 9780198539568.

[7] Maria Bartolini Bussi. «Artefacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education». In: *J. of Mathematics Teacher Education* 14.2 (2011), pp. 93–112.

[13] Diana Bitto. «Archeologia della matematica alle elementari». In: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate – Rivista del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin"* 34A–B.3 (2011), pp. 267–282.

[14] Diana Bitto e Claudio Mirolo. «"Archaeology of Information" in the Primary School». In: *Proc. of ISSEP 2013*. Vol. 7780. LNCS. Springer, 2013.

[15] Diana Bitto e Claudio Mirolo. «Archéologie de l'information à l'école primaire». In: *Sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC) en milieu éducatif*. DidaPro-DidaSTIC 2013. Clermont-Ferrand, France: EduTice, 2013. URL: http://edutice.archives-ouvertes.fr/.

[24] Éric Bruillard. «From the didactics of computer science towards the didactics of instrumental activities with ICT». In: *2nd Greek Conference on Didactics of Informatics*. Volos, 2004.

[25] Éric Bruillard. «Informatique en contexte scolaire, enseignement, diffusion: quelles recherches?» In: *Séminaire de didactique des sciences expérimentales et des disciplines technol.* STEF, 2006, pp. 115–128.

[28] Lucas N.H. Bunt, Phillip S. Jones e Jack D. Bedient. *The historical roots of elementary mathematics*. Ed. italiana: Le radici storiche delle matematiche elementari, Zanichelli. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

[29] Brian Butterworth. *The Mathematical Brain*. Ed. italiana: L'intelligenza matematica, Rizzoli. London, UK: Macmillan, 1999. ISBN: 978-0-333-76610-1.

[31] Jean-Luc Chabert et al. *Histoire d'algorithmes: du caillou à la puce*. english edition: A history of algorithms, Springer (1999). Belin, Paris, 1994.

[41] Stanislas Dehaene. *La Bosse des Maths*. english edition: The number sense, Oxford University Press (1997). Paris: Odile Jacob, Paris, 1997.

[45] Charles Duchateau. «Mais qu'est la didactique de l'informatique devenue?» In: *Le technologies en éducation: Perspectives de recherches et questions vives – Actes du symposium*. INRP, 2002, pp. 33–42.

[46] Paul E. Dunne. *Course notes on the History of Computation*. Retrieved (Sept 2013) at: http://cgi.csc.liv.ac.uk/ ped/teachadmin/histsci/content.html.

[48] Raymond Duval. «Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres». In: *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. Vol. 7. IREM, 2002, pp. 83–105.

[54] John Fauvel e Jan Van Maanen, cur. *History in Mathematics Education – The ICMI Study*. Springer Netherlands, 2002.

[55] Cédric Fluckiger. «L’école l’épreuve de la culture numérique des élèves». In: *Revue française de pédagogie* 163 (2008), pp. 51–61.

[60] George Gheverghese Joseph. *The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics*. 3rd edition; 1st edition: I.B. Tauris, London/New York, 1991. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2011. ISBN: 978-0-691-13526-7. URL: press.princeton.edu.

[61] Daniel Goleman. *Emotional intelligence*. New York: Bantam Books, 1995.

[64] Lancelot Hogben. *Maps, Mirrors and Mechanics: Beginnings of science*. London: William Heinemann, 1973.

[65] Georges Ifrah. *Histoire universelle des chiffres*. english edition: Universal history of numbers, Harville Press (1998). Paris: Robert Laffont, 1994.

[69] A.-S. Lecontre e V. Camos. «Le role du geste dans les apprentissages numériques: les stratégies de dénombrement chez les patients infirmes moteurs cérébraux». In: *A.N.A.E. – Approche neuropsychologique des apprentissages chez l’enfant* 78 (2004), pp. 195–201.

[70] Claude Lévi-Strauss. «La vie familiale et sociale des Indiens Nambikwara». In: *Journal de la Société des Américanistes* 37 (1948), pp. 1–132. DOI: 10.3406/jsa.1948.2366.

[76] Clara Miccinelli e Carlo Animato. *Quipu: Il nodo parlante dei misteriosi Incas*. Genova: ECIG, 1989.

[81] Xenophon Moussas. *The Antikythera Mechanism – The oldest computer and mechanical Cosmos*. School of Physics and Astronomy, University of Birmingham. Booklet commissioned by the School of Physics and Astronomy, University of Birmingham for the Antikythera Mechanism Exhibition held on Tuesday 17 October 2014. 2014.

[84] H.J. Nissen, P. Dameron e R.K. Englund. *Frühe Schriften und Techniken der Wirtschaftsverwaltung im alten Vorderen Orient*. english edition: Archaic bookkeeping, The University of Chicago (1993). Hildesheim: Verlag Franzbecker, 1990.

[97] Denise Schmandt-Besserat. *How Writing Came About*. Austin: The University of Texas Press, 1996.

[107] Gary Urton. *Signs of the Inka Khipu: Binary Coding in the Andean Knotted-String Records*. Austin: The University of Texas Press, 2003.

[108] Giorgio Vallortigara e Nicla Panciera. *Cervelli che contano*. Milano: Adelphi, 2014. ISBN: 978-88-459-2932-8.

[110] Gérard Vergnaud. «Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance». In: *Actes du colloque GDM: La notion de compétence en enseignement des mathématiques*. A cura di J. Portugais. 2002, pp. 6–27.

[115] Michael R. Williams. *A History of Computing Technology*. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 1997.

RIVOLUZIONI MATEMATICHE: LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

GIOVANNA D'AGOSTINO, SARA DELLA SCHIAVA, MARINA ADRIANO, FABIO BOVE, LAURA CANDOTTI, CORRADO LANERA, CHIARA MILAN, ANNA MARIA ORLANDI

7.1 Introduzione

In questo lavoro viene descritto il Laboratorio "Rivoluzioni Matematiche" svolto negli anni 2011-2012/2012-2013 all'interno del PLS del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Udine, in collaborazione con alcuni Licei della Provincia di Udine.

Il Laboratorio è nato in seguito alla costruzione, sviluppata all'interno del corso di Laurea Magistrale in Matematica, di un insieme di strumenti per disegnare sul Semipiano di Poincaré utilizzando il Software Dinamico Geogebra. Strumenti simili erano già presenti in rete, ma svilupparli autonomamente attraverso un software libero quale Geogebra creava un certo vantaggio per il loro utilizzo in ambito scolastico, sia per la facilità ed economicità di installazione di Geogebra, che per un uso più consapevole dello strumento informatico (vedi la sezione " Costruzione degli Strumenti Iperbolici"). Dopo aver realizzato gli strumenti per disegnare nella geometria iperbolica, ci è venuta l'idea di utilizzarli all'interno di un Laboratorio del Progetto Lauree Scientifiche dedicato alla storia e allo sviluppo delle geometrie non euclidee. Lo scopo di questi laboratori, a nostro avviso, consiste nel cercare di cambiare la visione statica, rigida e meramente tecnica che troppo spesso viene associata alla matematica da parte dei non matematici. Questo pregiudizio si forma in ambito scolastico: è quindi fondamentale avvicinare gli studenti [delle scuole] a una visione dinamica della matematica, dove concetti apparentemente consolidati vengono rivoluzionati da nuove scoperte, spesso ad opera di giovani studiosi solo qualche anno più vecchi degli studenti a cui i laboratori PLS sono dedicati. Sviluppare questo aspetto culturale, però, richiede tempo ed è difficile riuscire a farlo all'interno dell'orario curricolare, visto che i programmi si concentrano in primo luogo sullo sviluppo di competenze tecniche della matematica.

L'obiettivo principale del laboratorio è quindi fornire ai ragazzi spunti di riflessione sulla natura della scoperta matematica e sulla struttura non definitiva delle sue verità. Lo studio delle geometrie non euclidee si presta a questo scopo, poiché l'idea stessa di geometria è stata radicalmente rinnovata all'inizio del XIX secolo: dopo aver attraversato molte resistenze, l'allora ingenua visione della geometria si trasformò in una più consapevole.

7.2 Inquadramento storico

La geometria nasce come scienza della misura già fra gli antichi Egiziani, vari millenni prima di Cristo. Anche gli antichi Greci si dilettavano nello studio di figure e superfici, ma dobbiamo a Euclide (attorno al 300 a.C.) la prima raccolta e sistematizzazione del sapere matematico dell'epoca: gli *Elementi di Geometria*. Quest'opera in 13 volumi ebbe ampia diffusione e fu tradotta in moltissime lingue, tanto da essere considerata un'impareggiabile libro di testo per circa 2000 anni.

Euclide scrisse gli Elementi basandoli su affermazioni semplici ed intuitive dette *postulati*, grazie ai quali articolò i ragionamenti alla base delle dimostrazioni di proposizioni e teoremi. Nel primo libro degli Elementi troviamo la Geometria (piana) Euclidea, alla cui base Euclide pose i seguenti cinque postulati:

1. Per due punti distinti passa un'unica retta.
2. Un segmento rettilineo può essere prolungato all'infinito.
3. Esiste una circonferenza con un centro e un diametro dati.
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Se una retta r interseca due rette in modo che la somma degli angoli interni dallo stesso lato di r sia minore di 180 gradi, allora le due rette si intersecano da quel lato.

Il postulato V di Euclide attira immediatamente l'attenzione a causa della sua complessità e lunghezza. Euclide stesso non lo utilizzò prima della proposizione 29:

la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180 gradi,

anteponendogli tutte le proprietà della Geometria piana che possono essere dimostrate senza bisogno del quinto postulato.

I postulati della Geometria Euclidea ci appaiono così ovvi che è difficile per noi immaginare una geometria che non li soddisfi, infatti nel corso dei secoli i matematici si sono arrovellati non tanto sulla verità o meno dei postulati di Euclide ma sulla loro indipendenza: per descrivere in modo completo la Geometria piana è necessario assumere tutti e cinque i postulati, oppure il quinto, che è di gran lunga il più lungo e complicato, è una conseguenza degli altri? In quest'ultimo caso il postulato V assumerebbe uno status simile al teorema che afferma che gli angoli opposti al vertice hanno uguale misura: non abbiamo bisogno di assumere questa proprietà come postulato, visto che riusciamo a ricavarla come teorema.

Per spiegare meglio la situazione, riproponiamo il problema in un ambito più semplice. Consideriamo solo i primi due postulati di Euclide e chiediamoci se il secondo non sia già una conseguenza del primo. Possiamo dimostrare il secondo postulato basandoci solo sulle regole logiche e sul primo postulato? In questo caso ci convinciamo facilmente che non è così aiutandoci con un *modello*. Consideriamo la geometria della superficie della Terra invece di quella "ideale" di Euclide, in cui punti e rette sono quelli che riusciamo a disegnare sulla superficie terrestre; le "rette" di questa geometria sono quindi cerchi massimi di una sfera (dobbiamo disegnare "per terra" e la superficie della terra non è piatta ...). Limitandoci poi a considerare i punti sull'emisfero boreale, cioè i punti che si trovano a nord dell'equatore (e quindi le semicirconferenze come nuove "rette") ci accorgiamo che per ogni coppia distinta di "punti" passa un'unica "retta". Quindi il primo postulato di Euclide è vero in questa geometria terrestre.

Consideriamo ora il secondo postulato: un segmento di retta terrestre (cioè una porzione di cerchio massimo) ha una lunghezza limitata da quella dei semicerchi massimi della superficie terrestre e non è quindi prolungabile indefinitamente. Quindi il secondo postulato di Euclide non è valido nella geometria terrestre. Abbiamo quindi trovato una geometria dove il primo postulato è verificato ma non il secondo: questo ci dice che il secondo postulato non può essere dimostrato logicamente dal primo, altrimenti ogni geometria che rendesse vero il primo postulato dovrebbe obbligatoriamente verificare anche il secondo. Quindi il secondo postulato non è una conseguenza del primo.

Per molto tempo i matematici si sono domandati se il postulato V fosse conseguenza o meno degli altri, ovvero, se fosse possibile o meno immaginare una strana geometria in cui i punti e le rette soddisfino i primi quattro postulati di Euclide ma non il quinto. Una buona parte di loro pensò di aver dimostrato la *dipendenza* del quinto postulato dagli altri quattro, e che quindi nessuna "geometria", per quanto strana, potesse soddisfare i primi quattro postulati senza soddisfare anche il quinto. Oggi sappiamo che tutti questi tentativi di dimostrazione sono errati, perché si basano sull'implicita assunzione di qualche altra proprietà, oltre ai primi quattro postulati; ad esempio:

data una retta e un punto esterno ad essa, per quel punto passa un'unica parallela alla retta data (postulato di Playfair);

oppure

due rette parallele sono sempre equidistanti .

Questa situazione d'incertezza perdurava ancora agli inizi del 1800; furono Carl Fredrich Gauss, Nikolai Lobačhevski e Janos Bolyai, nei primi decenni del 1800, a credere per primi alla possibilità di una convivenza fra i primi quattro postulati e la negazione del quinto, sviluppando quella che oggi conosciamo con il nome di Geometria Iperbolica.

Essi provarono a dimostrare nuovi teoremi geometrici a partire dai primi quattro postulati euclidei e dalla negazione del postulato V. La loro impresa ha dell'incredibile, visto che non potevano aiutarsi con una rappresentazione concreta degli oggetti che stavano studiando; in altre parole, non potevano utilizzare "disegni", cosa che tutti noi facciamo per risolvere anche i più semplici esercizi di Geometria Euclidea.

(a) Johan Carl Fredrich Gauss (1777-1855)

(b) Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856)

(c) Janos Bolyai (1802-1860)

Figura 7.1: Precursori *della G*[g]eometria *I*[i]perbolica

Pur non avendo un modello concreto della nuova geometria, Gauss, Lobachevski e Bolyai si spinsero molto avanti nella sua esplorazione, arrivando a formulare teoremi di trigonometria e calcolo delle aree (ad esempio l'area di un triangolo nella nuova geometria non è data dalla formula (base $\times$ altezza)/2, ma si calcola a partire dalla misura degli angoli del triangolo).

(a) Eugenio Beltrami (1836-1900)

(b) Jules Henri Poincaré (1854-1912.

(c) Felix Christian Klein (1849-1925)

Figura 7.2: Ideatori modelli iperbolici

L'obiettivo di concretizzare la nuova geometria e di "disegnare" figure iperboliche venne raggiunto qualche decennio più tardi grazie all'opera di Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein, che proposero delle realizzazioni (dette anche *modelli*) della Geometria Iperbolica.

7.3 Descrizione

Nel Laboratorio "Rivoluzioni Matematiche" abbiamo utilizzato uno dei modelli di Poincaré: il *Semipiano di Poincaré*. Per visualizzare i punti e le rette di questo modello ci si basa sull'usuale Piano Cartesiano, ma senza considerarne tutti i punti. Un'altra differenza è che non tutte le rette iperboliche "assomigliano" alle usuali rette euclidee. Nonostante ciò, come vedremo, molte proprietà della Geometria Euclidea sono ancora valide nel sistema dei punti e delle rette iperboliche e con un (bel) po' di sforzo si potrebbe verificare che essi soddisfano tutti i postulati di Euclide tranne il V.

L'insieme dei punti e delle rette iperboliche descritte nel prossimo paragrafo costituisce un modello di *Geometria Iperbolica* (piana) e realizza la strana geometria sviluppata da Gauss, Bolyai e Lobačevskij agli inizi del 1800.

Punti e rette nel Semipiano di Poincaré

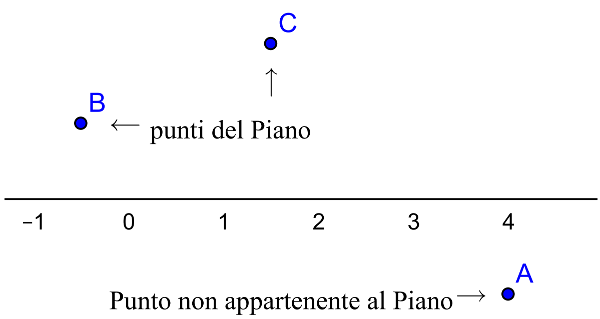


Figura 7.3: Punti del piano $\mathbb{H}$.

Esistono differenti rappresentazioni per la Geometria Iperbolica piana; il modello che utilizzeremo è detto Semipiano di Poincaré e lo indicheremo in breve con la lettera $\mathbb{H}$. L' insieme dei suoi punti è costituito da tutti i punti del piano cartesiano con ordinata (strettamente) positiva, cioè dai $P = (x_P, y_P)$ con $x_P, y_P \in \mathbb{R}$ e $y_P > 0$ (vedi figura 7.3). In simboli

$$\mathbb{H} := \{P = (x_P, y_P) \mid x_P, y_P \in \mathbb{R},\ y_P > 0\}. \tag{7.1}$$

In questo modello l'asse delle x svolge un ruolo particolare: i suoi punti non fanno parte del Semipiano di Poincaré, così come non ne fanno parte i punti con ordinata negativa. L'asse in questione viene detto *Orizzonte*.

I punti di $\mathbb{H}$ sono particolari punti del Piano Euclideo e sono facili da descrivere. La trattazione delle rette, invece, è più delicata e non tutte le nuove "rette" somigliano a rette euclidee: questo è il prezzo che il modello di Poincaré deve pagare per fare sì che il quinto Postulato non sia vero in questo ambiente, mentre gli altri quattro postulati continuano invece a valere.

Rette del Semipiano di Poincaré

Gli oggetti che nel Semipiano di Poincaré vengono chiamati *rette* (o *iper rette*) sono di due tipi. Per descrivere una retta del primo tipo, fissiamo un numero reale k e consideriamo la retta euclidea verticale di equazione $x = k$, ovvero la retta verticale passante per il punto $(k, 0)$ del Piano Cartesiano. Tutti i punti di questa retta verticale con ordinata positiva appartengono alla nuova retta iperbolica che chiameremo L_k (vedi figura 7.4).

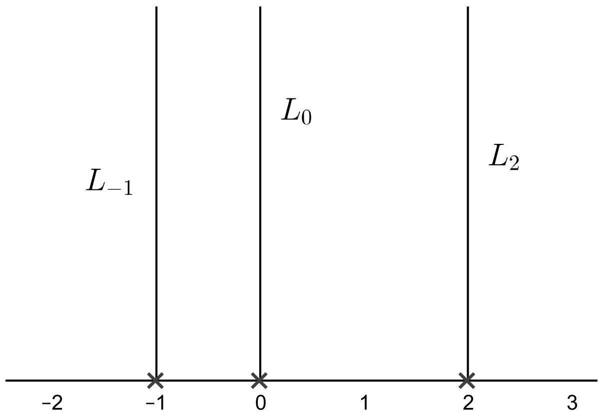


Figura 7.4: Rette del primo tipo.

Non possiamo però limitarci a considerare rette di questo tipo, altrimenti non varrebbe il postulato I (che assicura l'esistenza di una retta per ogni coppia di punti distinti): se considerassimo soltanto rette del primo tipo, non ce ne sarebbe alcuna passante per punti che non sono allineati verticalmente, come ad esempio i punti $P = (0, 1)$ e $Q = (1, 1)$.

Dobbiamo introdurre dunque nuove rette, che chiameremo del secondo tipo. Esse non sono porzioni di rette euclidee, come quelle del primo tipo, anzi sono curve (da un punto di vista euclideo ortodosso...)*!* Per descrivere una retta di questo tipo fissiamo un numero $c \in \mathbb{R}$ ed $r > 0$: con questi elementi possiamo determinare la circonferenza euclidea di centro $(c, 0)$ e raggio r. Tutti i punti di questa circonferenza appartenenti ad $\mathbb{H}$ costituiscono una retta del secondo tipo, che indicheremo con ${}_cL_r$ (vedi figura 7.5). Tale retta iperbolica è quindi la semicirconferenza superiore della circonferenza euclidea di equazione $(x - c)^2 + y^2 = r^2$, privata degli estremi.

Qualche domanda sulle nuove rette...

Una volta definiti i nuovi punti e le nuove rette (gli iper punti e le iper rette) siamo pronti a porci le prime domande; ad esempio è vero che:

1. per due iper punti diversi passa sempre un'unica iper retta?

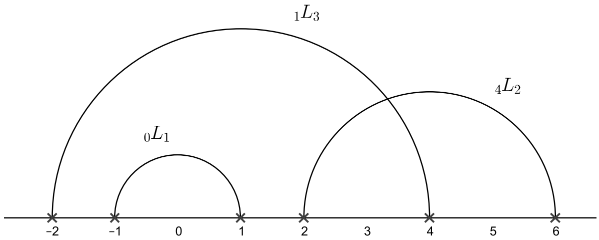


Figura 7.5: Rette del secondo tipo.

2. due iper rette diverse si intersecano in al più un punto?

3. data una iper retta r e un punto P che non appartiene ad r, esiste una sola iper retta parallela ad r che passa per P? (due iper rette si dicono parallele se coincidono o se non si intersecano)

4. se r è parallela ad s ed s è parallela a t, allora r è parallela a t?

Più le domande si complicano, più sentiamo l'esigenza di avere a disposizione un mezzo veloce e preciso per iper disegnare...

Nel prossimo paragrafo daremo un'idea di come si possa utilizzare il Software Geogebra per disegnare sul Semipiano di Poincaré.

Esempio di costruzione di uno strumento: la semiretta iperbolica fra due punti

Utilizzando il Software GeoGebra è possibile ricreare il Semipiano di Poincaré e disegnarci sopra dinamicamente, cercando di scoprire in questo modo quali delle proprietà geometriche a noi familiari sono ancora valide in questo mondo e quali no.

Costruire uno strumento iperbolico GeoGebra per degli studenti richiede di fare in modo che il risultato ottenuto sia indipendente da particolari configurazioni del sistema informatico in uso. Per esempio non si potranno sfruttare specificità configurabili del software o strumenti già creati in precedenza, ma il tutto dovrà essere auto-consistente. Allo stesso tempo bisogna capire come *ragiona* il software, per far sì che le costruzioni siano sempre ben definite, soprattutto quando (come nel caso delle rette iperboliche) si può passare *dinamicamente* da una retta di un tipo a una dell'altro muovendo i punti in gioco.

Presentiamo ora a titolo di esempio le considerazioni che sono alla base della costruzione dello strumento per disegnare *semirette iperboliche* (o iper semirette). Questo tipo di presentazione è stata sfruttata nella lezione di *strumenti GeoGebra* con lo scopo di avvicinare i ragazzi a ragionare per passi successivi fino ad arrivare alla definizione dello strumento, facendo proposte, analizzando di volta in volta le criticità residue e offrendone una soluzione. Per ragioni di spazio non alleghiamo il protocollo di costruzione vero e proprio, che comunque è consultabile fra gli allegati a questo libro.

Per costruire uno strumento che disegni l'iper semiretta prevediamo in input due punti, per i quali sarà importante l'ordine: l'iper semiretta dovrà partire dal primo con direzione il secondo. Un'altra considerazione preliminare sulla costruzione dello strumento è che questo dovrà essere sia in grado di disegnare entrambi i tipi di iperrette (tipo 1 e tipo 2), sia dovrà permettere il passaggio "trasparente" tra queste quando i punti dati in input sono mossi "dinamicamente".

Cominciamo con la costruzione dell'iper semiretta di tipo 2. Quello che vogliamo ottenere è un arco che parta dal primo punto, vada verso il secondo e finisca nell'orizzonte (escluso), il tutto su una circonferenza con centro nell'asse x. Il primo vero problema che si incontra è quello di definire la direzione di questo arco. Per risolverlo troviamo l'asse euclideo tra i due punti, che ci permette di identificare il centro $C = (c, 0)$ della *circonferenza di supporto* della semiretta iperbolica come intersezione di tale asse con l'orizzonte. Sappiamo quindi che l'equazione della circonferenza di supporto della semiretta iperbolica è $(x - c)^2 + y^2 = r$, dove r è la distanza di C da uno dei punti di input. Per identificare la giusta direzione della iper semiretta utilizziamo quel punto Q d'intersezione fra la circonferenza di supporto e l'orizzonte che è dalla stessa parte del secondo punto in input rispetto all'asse già trovato. Un modo *sintetico* per individuare Q è il seguente: se è P l'intersezione fra l'orizzonte e la retta (euclidea) parallela all'asse passante per il secondo punto, Q è l'intersezione fra la semiretta (euclidea) $\overrightarrow{CP}$ e la circonferenza di supporto. Possiamo quindi definire la nostra iper semiretta come l'arco di circonferenza passante per i due punti di input e per Q.

Osserviamo che tale definizione porta a trovare un arco che comprende anche il punto all'orizzonte. Questo non crea problemi se adottiamo un test per garantire la stretta positività delle ordinate dei punti in input (che dovrà quindi essere presente in ogni strumento creato per la geometria iperbolica). D'altra parte questa caratteristica ci permette di enfatizzare un concetto: disegnando tale punto con una "x" al posto dell'usuale pallino, rendiamo evidente agli studenti che tale punto non appartiene all'iper semiretta.

Passiamo ora alle semirette iperboliche di tipo 1, ricordandoci che vogliamo essere in grado di passare dinamicamente da semirette di un tipo a semirette di tipo diverso. Poiché GeoGebra (o almeno la versione che abbiamo utilizzato per costruire i nostri strumenti) non è in grado di definire oggetti di natura differente in base a un condizionale, non possiamo utilizzare una costruzione del tipo chiedere "se... allora disegna un arco, se invece... allora disegna un a semiretta"; dobbiamo costruire la nostra iper semiretta sempre come un *arco*, come nel caso di semirette di tipo 2. Questo è possibile perché GeoGebra permette di definire archi degeneri, cioè "segmenti", ma per definire questo arco degenere servono tre punti. Per fare in modo che lo strumento sia in grado di capire se siamo in questo caso impostiamo un test di *verticalità* e, nel caso in cui il secondo punto stia sotto al primo, sarà sufficiente formare l'arco degenere tra il primo punto di input, il secondo e il piede della sua perpendicolare all'orizzonte. Al contrario, quando il secondo punto in input sta sopra al primo, dobbiamo riuscire a identificare il "punto all'infinito". Per risolvere questo problema abbiamo un'ulteriore opportunità di far ragionare gli studenti sull'universo matematico visto dal punto di vista informatico, dove l'infinito non esiste. Sfruttiamo quindi i limiti intrinsechi del software definendo il punto all'infinito come "il punto con ascissa: la stessa dei punti dati, e ordinata: il massimo numero rappresentabile dal sistema". Così facendo otteniamo, nel mondo interno a GeoGebra, un oggetto che (di fatto) è un segmento, ma non è distinguibile agli occhi di GeoGebra (e quindi ai nostri) da una semiretta euclidea. Questo conclude la costruzione.

Altri strumenti, altre domande...

Utilizzando ancora Geogebra possiamo continuare la costruzione del modello di Poincaré, definendo angoli, triangoli, misure... e ponendoci nuove domande: il Teorema di Pitagora vale nel nuovo mondo? E i criteri di congruenza fra i triangoli? E...

7.4 La voce della scuola

In questo paragrafo la descrizione del laboratorio viene affidata ai docenti della scuola superiore che hanno partecipato in prima persona alla sua realizzazione.

Liceo Scientifico Tecnologico "Arturo Malignani" - Udine

Il tema del laboratorio "Le rivoluzioni matematiche: le geometrie non euclidee" non solo è stimolante di per sé, ma rientra anche fra i contenuti curricolari previsti per il quinto anno di studi liceali. La scelta di partecipare con gli allievi è stata una conseguenza naturale e finalizzata ad un doppio canale di indagine (teoria astratta unita al metodo laboratoriale), in modo che l'esperienza non risultasse per gli allievi appesantita dalla necessità di procedere a calcoli che, in qualche misura, possono sottrarre tempi ed energie nell'affrontare i concetti inerenti la ricerca.

Ovviamente, rientrando la materia fra gli argomenti curricolari, era implicita la partecipazione delle tre classi quinte nella loro interezza.

L'attività laboratoriale è stata preceduta da un seminario tenuto dal Prof. S. Sonego (Ordinario di Fisica Matematica presso l'Università degli Studi di Udine) che ha saputo suscitare l'interesse e la curiosità degli studenti e degli insegnanti presenti, delineando le origini e gli sviluppi storici delle geometrie non euclidee. Lo stesso Prof. Sonego ha concluso il ciclo delle attività con un secondo seminario, incentrato sulle relazioni tra le geometrie non euclidee e l'ambito della Fisica, cosa che ha certamente contribuito ad arricchire le conoscenze degli studenti in una materia potenzialmente presente nelle prove dell'Esame di Stato.

Gli studenti hanno potuto agevolmente prender parte all'attività laboratoriale in quanto, negli anni scolastici precedenti, avevano già avuto modo di utilizzare il software GeoGebra per realizzare semplici costruzioni geometriche all'interno della geometria euclidea.

Al laboratorio hanno partecipato tre classi quinte del Liceo, seguite da tre diverse docenti. Per necessità organizzative, dipendenti dal monte ore settimanale degli allievi, le attività di laboratorio si sono svolte in orario curricolare; le docenti hanno seguito autonomamente gli allievi, supportate dalla docente dell'Università.

La collaborazione con l'Università si è esplicitata nel modo seguente:

- lezione-formazione iniziale ai docenti sull'utilizzo di strumenti informatici specifici per realizzare costruzioni sul semipiano di Poincaré;

- contatti settimanali via email per chiarimenti, *focus group* e scambio di materiali;

- intervento diretto nella seduta finale del laboratorio in compresenza con le docenti e le tre classi coinvolte.

Prima di iniziare il lavoro in classe, agli allievi sono stati forniti gli strumenti informatici e ci si è assicurati che tutti potessero utilizzare il software a casa. L'utilizzo di software libero e multi-piattaforma è perciò stato molto importante, proprio per permettere agli allievi di utilizzarlo nello svolgimento del lavoro domestico assegnato loro.

In altre parole, il PLS ha comportato una interazione tra Università e docenti dell'istituto, i quali hanno avuto l'opportunità di approfondire alcune tematiche e di utilizzare metodiche nuove; inoltre:

- gli studenti sono stati coinvolti direttamente dal personale universitario ed indirettamente dai loro docenti;

- i docenti si sono trasformati in "mediatori" sulle tematiche e sulle metodiche citate;

- gli studenti infine si sono appropriati essi stessi di strumenti informatici, dei quali hanno fatto uso in aula e nelle esercitazioni domestiche.

L'attività si è svolta in tre lezioni, durante le quali sono state affrontate, una alla volta, le schede di lavoro fornite dalla docente universitaria: un primo momento della lezione è sempre stato dedicato all'introduzione teorica degli argomenti, il resto del tempo all'attività laboratoriale svolta in piccoli gruppi. A casa poi gli allievi avevano il compito di compilare le schede individualmente e di fornire all'insegnante le costruzioni effettuate, anche utilizzando la piattaforma *moodle* dell'Istituto. Dato che l'orario di due classi lo consentiva, un paio di incontri sono stati svolti lavorando insieme, il terzo invece si è tenuto separatamente. Quando necessario, durante le lezioni sono stati anche forniti chiarimenti sul lavoro svolto a casa. L'incontro finale con la docente universitaria ha poi contribuito a rinforzare gli apprendimenti e a chiarire i dubbi rimasti.

In conclusione, l'attività svolta ha avuto una ricaduta senz'altro positiva sia per gli studenti che per i docenti che li hanno seguiti.

Gli elementi positivi per gli allievi sono stati i seguenti:

- hanno avuto modo di affrontare un argomento curricolare mediante attività laboratoriale, utilizzando la sperimentazione per comprendere concetti astratti;

- hanno lavorato in gruppo, confrontandosi fra pari e utilizzando competenze comunicative che *sono raramente sfruttate in matematica*;

- sono stati messi nelle condizioni di utilizzare strumenti tecnologici per l'apprendimento;

- hanno avuto modo di confrontarsi con studenti di altre classi nelle attività *di* laboratorio, durante l'incontro a conclusione dell'attività e durante i seminari;

- hanno vissuto un'esperienza spendibile in termini di orientamento in uscita.

Gli aspetti positivi per i docenti sono stati i seguenti:

- hanno avuto modo di affrontare un argomento curricolare mediante attività laboratoriale, cosa che, richiedendo tempi più dilatati, si riesce a fare raramente;

- hanno lavorato insieme, confrontando i diversi metodi di lavoro e contribuendo ad arricchire la didattica all'interno dell'Istituto;

- hanno utilizzato strumenti tecnologici per l'insegnamento, incrementando le proprie competenze.

La consapevolezza dei buoni risultati conseguiti ha portato all'esigenza di ripetere l'esperienza, allargandola ad altre classi e ad altri docenti della scuola.

Liceo Scientifico " Magrini"- Gemona

Nel primo ciclo di istruzione gli studenti imparano a riconoscere le figure geometriche e a studiarne le prime proprietà: l'approccio è intuitivo e basato prevalentemente sull'esperienza, con frequenti modellizzazioni di situazioni e oggetti della vita reale. All'inizio del liceo i ragazzi si scontrano con le prime formalizzazioni di questioni che ritengono acquisite, ma delle quali sfugge ancora il senso profondo. Ad esempio, alla domanda "che cos'è un angolo giro?" solitamente la risposta è "un angolo di 360 gradi" e, quando si chiede cosa intendano per grado, rispondono: "la trecentosessantesima parte dell'angolo giro!". Ed è faticoso per loro darsi ragione della necessità di un processo deduttivo rigoroso nel quale, partendo da enti primitivi ed assiomi, riorganizzare le conoscenze di geometria. L'allenamento all'organizzazione rigorosa delle conoscenze permea tutto il percorso liceale. Quando, in quinta, ogni tassello sembra andare al suo posto, ecco che da più parti (in filosofia, in matematica, in fisica) viene prospettata l'esistenza di nuove geometrie coerenti, che nascono dalla discussione degli stessi fondamenti della Geometria Euclidea accettati con fatica.

Quando, ad inizio anno, l'Università di Udine ha proposto alle scuole della provincia una serie di laboratori inseriti nella cornice del PLS, abbiamo pensato che era il momento giusto per anticipare nella nostra classe terza un laboratorio sulle geometrie non euclidee e far sperimentare forme di astrazione non necessariamente legate all'esperienza quotidiana. E' stata scelta una classe molto curiosa e storicamente aperta alle proposte extracurricolari offerte dalla scuola: l'adesione degli studenti è stata libera e in tredici si sono impegnati a frequentare le attività (non necessariamente quelli con i migliori risultati in matematica).

Diverse le motivazioni che hanno portato i ragazzi ad accettare l'invito: avere dei contatti con il mondo dell'Università, iniziare un percorso di orientamento post-diploma (le famiglie sono molto sensibili e presenti nel sollecitare iniziative con questa finalità) e, non ultima, la possibilità di uscire fuori dal proprio territorio ed "andare in città".

L'impostazione del lavoro, che ha privilegiato il coinvolgimento diretto dei ragazzi nella scoperta delle figure e delle proprietà nelle nuove geometrie, è stata molto apprezzata ed ha portato ad invogliare al confronto dei nuovi risultati con i corrispondenti nella geometria euclidea e ad individuare quelli indipendenti dall'adozione del quinto postulato. Volgendo lo sguardo indietro e sfogliando il libro della classe prima, è stato possibile riconoscere come l'autore abbia presentato dapprima tutti i risultati validi per la geometria assoluta, del tutto indipendenti da assunzioni sulle parallele, ed abbia posticipato quelli conseguenza dell'introduzione del quinto postulato.

L'utilizzo del software Geogebra, opportunamente adattato per la costruzione degli oggetti della geometria iperbolica, ha permesso agli studenti di visualizzare i risultati e di interpretarli: questa modalità accattivante, stimolante e coinvolgente ha fatto sì che gli studenti si fermassero con entusiasmo più volte per altre due ore a scuola nel pomeriggio dopo una breve pausa pranzo.

Il seminario "Geometrie non euclidee tra matematica e fisica" tenuto dal prof. Sebastiano Sonego, seppur impegnativo e non sempre, per contenuti, accessibile agli studenti di una classe terza, li ha fatti riflettere su come, con la scoperta di una pluralità di geometrie e l'accettazione dell'ipotesi di Einstein dell'esistenza di un'interazione tra materia e spazio, rimanga superata l'implicita corrispondenza tra spazio geometrico euclideo e spazio fisico concreto. La questione sarà successivamente ripresa nella classe quinta.

L'intero percorso ha tanto incontrato il gradimento degli studenti che gli stessi non hanno esitato a partecipare ad un incontro aggiuntivo opzionale con il dott. Corrado Lanera, sviluppatore degli strumenti iperbolici ad-hoc utilizzati in Geogebra nel corso, per avere una panoramica generale su come realizzare la creazione di strumenti per particolari esigenze.

In conclusione, la proposta del laboratorio ha permesso a noi docenti di proporre contenuti e riflessioni che altrimenti non avrebbero trovato spazio nel curricolo ordinario e, nello stesso tempo, di fare esperienza diretta di "scoperta condivisa" con gli studenti e dei vantaggi di un approccio in cui il docente si cala nel ruolo di mediatore, per guidare il processo di apprendimento attraverso la scoperta.

7.5 Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento agli insegnanti e agli studenti delle scuole Liceo Scientifico Le Filandiere di San Vito al Tagliamento, Liceo Scientifico Magrini di Gemona, Iti e Liceo delle Scienze Applicate Malignani di Udine, che hanno partecipato al laboratorio nei vari anni in cui è stato realizzato. Un ringraziamento particolare al Prof. Sebastiano Sonego che ha curato la parte interdisciplinare del laboratorio, ed in particolare i legami fra spazio geometrico e fisico.

Riferimenti bibliografici

[30] J.N. Cederberg. *A course in Modern Geometry*. Springer, 2001.

[40] Donald M. Davis. *The Nature and Power of Mathematics*. Princeton University Press, 1993.

[77] R.S. Millman e G.D. Parkerm. *Geometry: a Metric approach with models*. Springer-Verlag, 2014.

LA SICUREZZA NELLE BASI DI DATI

NICOLA VITACOLONNA, MARIA CONCETTA BROCATO

8.1 Introduzione

Il Laboratorio di Basi di Dati è stato realizzato con l'obiettivo di sensibilizzare gli studenti rispetto a problemi di riservatezza dei dati e di fornire alcune nozioni tecniche fondamentali inerenti alla sicurezza nel contesto specifico dei sistemi di gestione di basi di dati. L'idea di affrontare tale argomento è maturata da una coincidenza di circostanze, alcune soltanto marginalmente legate alla realizzazione concreta dell'attività. Innanzitutto, lo scandalo delle intercettazioni massicce e (non più) segrete effettuate dalla *National Security Agency* americana e da enti governativi di altre nazioni, rese note dall'ormai famoso Edward Snowden. La gravità di questa notizia forse non è stata apprezzata appieno dall'opinione pubblica (soprattutto al di fuori degli USA) — e questo sarebbe già qualcosa su cui bisognerebbe riflettere — ma una parte della comunità IT è (fortunatamente) rimasta profondamente turbata, non tanto perché non si sapesse che il governo americano ha la tendenza a ficcare il naso in tutto ciò che è legato alla sicurezza informatica, quanto per la portata difficilmente immaginabile delle azioni condotte, che hanno *"sovvertito la rete Internet a ogni livello, facendola diventare una vasta, stratificata e robusta piattaforma di sorveglianza"* [99]. L'idea che il problema del *data gate* non sia soltanto etico, politico e sociale, ma anche tecnologico (come si può "ricostruire" Internet in modo che una sorveglianza totale non sia più possibile?) significa che dobbiamo formare una generazione di nuovi scienziati, informatici e ingegneri che abbia sì competenze tecniche, ma anche un'adeguata sensibilità verso tali problematiche.

In secondo luogo, nel periodo in cui mi è stato proposto di svolgere un'attività con le scuole superiori, stavo preparando il materiale del corso di *Complementi di Basi di Dati* che tengo all'Università di Udine, all'interno del quale avevo pensato, sull'onda emozionale degli eventi summenzionati, di dedicare maggior spazio alla parte relativa alla sicurezza. Consultando vari testi, mi sono reso conto che il tema della privatezza dei dati è trattato superficialmente, o è addirittura completamente ignorato[,] in molti libri di testo sulle basi di dati, soprattutto per quanto riguarda gli aspetti più formali. Il Laboratorio mi è sembrato un'occasione appropriata per affrontare tali argomenti, che rivestono una notevole importanza pratica oltre che teorica.

Infine, più o meno nello stesso periodo, mi è capitato tra le mani un articolo intitolato *Hippocratic Databases* [2], che non avevo mai letto prima, in cui si auspica che la futura ricerca nel campo delle basi di dati includa la confidenzialità dei dati come *principio fondante* nella progettazione dei sistemi informatici e nella gestione responsabile delle informazioni. Pur essendo un articolo di dodici anni fa, mi è sembrato estremamente attuale, un ottimo ponte tra le questioni di principio, oggi più che mai messe in discussione, e gli aspetti tecnologici legati alla realizzazione di sistemi in grado di soddisfare opportuni requisiti di privacy.

8.2 Inquadramento storico

La sicurezza dei dati si è evoluta rapidamente a partire dalla metà degli anni '70 del XX secolo. In quegli anni vi sono stati straordinari avanzamenti nel campo della crittografia (basti pensare all'invenzione della crittografia a chiave pubblica); sono state sviluppate tecniche per verificare in modo formale che un programma non esponga dati confidenziali a soggetti non autorizzati; sono stati studiati in modo sistematico gli attacchi alle basi di dati statistiche. In generale, si è giunti a una migliore comprensione delle limitazioni teoriche e pratiche inerenti alla sicurezza dei dati [93]. In particolare, la ricerca sulle basi di dati statistiche, intensa negli anni '70, ha dimostrato, in modo abbastanza sconfortante, che è impossibile garantire che informazioni confidenziali non trapelino da una base di dati, anche se sono divulgati soltanto dati aggregati [43]. Solo in anni recenti sono stati scoperti nuovi metodi di tipo probabilistico che permettono di dimostrare che una base di dati è "sufficientemente sicura", ossia che i rischi di rivelare informazioni riservate possono essere resi "sufficientemente bassi" [50].

Sempre negli anni '70 è stata definita la nozione di *modello dei dati* [33] ed è stato inventato il *modello relazionale* [34, 32], che è ancora oggi il fondamento della maggior parte dei sistemi di gestione delle basi di dati e che include diverse caratteristiche legate alla sicurezza [35]. Non è sorprendente, perciò, che una parte significativa della ricerca nel campo della sicurezza (concernente ad esempio il controllo degli accessi) abbia trovato un fertile terreno di sviluppo nel contesto dei sistemi relazionali. Gli attuali sistemi di gestione di basi di dati offrono un ampio ausilio alla sicurezza, con funzionalità che comprendono meccanismi di autenticazione, sofisticati controlli sugli accessi ai dati, monitoraggio delle attività degli utenti (*logging* e *auditing*), verifica automatica di vincoli d'integrità, creazione di viste parziali sui dati, sessioni criptate e memorizzazione dei dati in forma cifrata.

Con l'avvento di Internet negli anni '90 e con l'esplosione del commercio elettronico, del *cloud computing* e dei *social network* nel nuovo millennio, la sicurezza dei dati è diventata un tema ancora più cruciale e complesso, sia perché i sistemi hardware e software sono sempre più [sistemi] distribuiti sia perché è aumentata in modo esponenziale la quantità di informazioni che ciascuno di noi condivide attraverso la rete. La ricerca in anni recenti è stata motivata soprattutto dalla crescente tendenza a considerare i sistemi di gestione di basi di dati come *servizi* offerti da organizzazioni esterne. In tale contesto, un argomento di ricerca importante è lo sviluppo di tecniche di processamento delle interrogazioni su dati criptati. Lo sviluppo di applicazioni web cooperative, spesso operanti in contesti più ampi della singola organizzazione o azienda, e di applicazioni mobili, nonché la necessità di adeguare i sistemi informatici alle nuove leggi sulla privacy promulgate in molti paesi (inclusa l'Italia), hanno fornito un'ulteriore spinta verso lo sviluppo di nuove tecniche di protezione dei dati [12]. Infine, è necessario menzionare la recente voga dei *big data*, che pone nuove questioni di tipo etico, sociale e legale inerenti alla gestione responsabile di enormi quantità di dati sensibili (ad esempio, genomi umani, dati biometrici, sulla localizzazione geografica degli individui, e così via), questioni che costituiscono una delle sfide dell'Informatica nel prossimo futuro.

8.3 Descrizione

Un approccio completo alla sicurezza dei dati richiede di considerare i seguenti tre aspetti [12, 53]:

- l'integrità dei dati;
- la disponibilità dei dati;
- la confidenzialità dei dati.

L'*integrità* si riferisce al fatto che i dati devono essere protetti da modificazioni non consentite (accidentali o meno), vale a dire cambiamenti che comprometterebbero la correttezza delle informazioni memorizzate nella base di dati. Si tratta ovviamente di un requisito fondamentale in molte applicazioni, in cui dati inaccurati possono arrecare gravi danni economici, portare a decisioni errate o aumentare il rischio di frodi. I sistemi di gestione di basi di dati offrono diversi strumenti per la specificazione e la verifica automatica di vincoli d'integrità.

La *disponibilità* riguarda la prevenzione e il recupero a fronte di guasti hardware e software, intenzionali o meno, nonché qualunque forma di attacco a un sistema informatico volta a interromperne il funzionamento. Il problema di garantire un elevato grado di disponibilità delle informazioni è un complesso, interdisciplinare e richiede conoscenze approfondite sulle reti informatiche, i sistemi operativi, le basi di dati e i sistemi distribuiti.

Il terzo aspetto, la *privacy* dei dati, è quello su cui è stata posta l'enfasi nel laboratorio proposto agli studenti, e si riferisce al fatto che l'accesso ai dati deve avvenire sempre e soltanto da parte dei soli utenti autorizzati secondo le modalità previste. La perdita di confidenzialità può avere ripercussioni sociali, etiche e legali, tanto più gravi quanto più sensibili sono i dati trattati (si pensi ad esempio alla diffusione non controllata di dati personali sulla salute).

Diverse tipologie di contromisure possono essere adottate per proteggere i dati da potenziali minacce alla confidenzialità degli stessi:

Controllo dei flussi d'informazione: con quali modalità e attraverso quali canali le informazioni possono passare da un soggetto a un altro?

Controllo degli accessi: quali meccanismi si possono sfruttare per vincolare l'accesso alle risorse da parte degli utenti di un sistema?

Controllo delle inferenze: in che modo è possibile dedurre *indirettamente* informazioni confidenziali [in modo indiretto], conoscendo soltanto dati di carattere statistico su un insieme di individui?

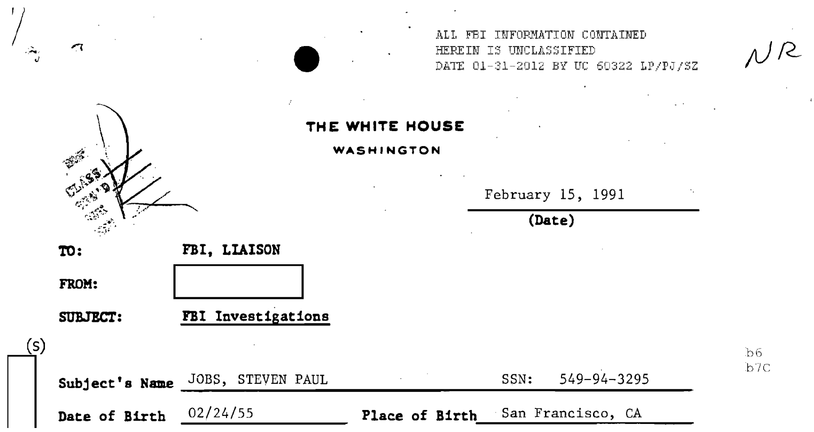
Cifratura dei dati: quali tecniche crittografiche si possono usare per trasmettere e memorizzare informazioni sensibili?

L'uso della crittografia è un tema trasversale rispetto alle basi di dati ed è stato discusso in un laboratorio separato. Perciò, nonostante sia chiaramente un argomento di fondamentale importanza nel contesto della sicurezza dei dati, non è ulteriormente approfondito.

Flussi d'informazione

Una caratteristica interessante delle misure di controllo nelle basi di dati è che, entro una certa misura, possono essere modellate matematicamente in modo relativamente semplice. In termini estremamente generali, possiamo immaginare che alcuni *soggetti* (che possono essere, ad esempio, utenti autorizzati, spie, o anche processi quali applicazioni client legittime oppure software malizioso) operino in qualche modo su un insieme di *oggetti* (ad esempio, documenti cartacei, file del file system o tabelle di una base di dati). Gli oggetti non hanno tutti la stessa "importanza": alcuni possono contenere dati di dominio pubblico, altri [possono contenere] informazioni estremamente sensibili che non devono essere in alcun modo diffuse. A ciascun oggetto, perciò, può essere assegnato un *livello di sicurezza*, che corrisponde in qualche modo al grado di confidenzialità che vogliamo associargli. Intuitivamente, l'informazione non può in generale essere trasferita liberamente da oggetti con un dato livello di sicurezza ad altri con un livello di sicurezza diverso, altrimenti non vi è alcun modo di garantire la confidenzialità delle informazioni. Una *politica di flusso dell'informazione* descrive le regole che stabiliscono in che modo l'informazione possa essere trasferita da un livello di sicurezza ad un altro. Detto $\mathcal{L}$ l'insieme di tutti i possibili livelli di sicurezza, possiamo scrivere $A \to B$ per indicare che è ammissibile che l'informazione passi da oggetti nel livello di sicurezza A a oggetti nel livello [di sicurezza] B. C'è poi il problema di stabilire quale livello di sicurezza assegnare a un oggetto quando questo è ottenuto combinandone altri (ad esempio, unendo due documenti, uno contenente dati sensibili e uno contenente dati non sensibili). Se indichiamo l'operazione di "combinazione" di due oggetti con $\oplus$, allora possiamo scrivere $A \oplus B = C$ per indicare che il livello di sicurezza di un oggetto ottenuto combinando in qualche modo un oggetto di livello A e uno di livello B dev'essere C.

Con la notazione appena introdotta è possibile specificare in modo preciso varie politiche di flusso dell'informazione. Ad esempio,



ALL FBI INFORMATION CONTAINED
HEREIN IS UNCLASSIFIED
DATE 01-31-2012 BY UC 60322 LP/PJ/SZ

NR

THE WHITE HOUSE
WASHINGTON

February 15, 1991
(Date)

TO: FBI, LIAISON

FROM:

SUBJECT: FBI Investigations

(S)

b6
b7C

Subject's Name JOBS, STEVEN PAUL SSN: 549-94-3295

Date of Birth 02/24/55 Place of Birth San Francisco, CA

Figura 8.1: Un documento dell'FBI con livello di sicurezza *Unclassified*, e dunque di dominio pubblico (Fonte: `http://vault.fbi.gov/steve-jobs`).

in molte entità governative e militari (e in molti film di spionaggio...) i documenti sono classificati mediante una tra quattro possibili etichette che, in ordine di grado di segretezza decrescente, sono: *Top Secret*, *Secret*, *Confidential*, *Unclassified* (Figura ??). Ovviamente, non si vuole che un'informazione "top secret" sia scritta all'interno di un documento soltanto "confidenziale", mentre non c'è nessun problema se un'informazione "confidenziale" è scritta in un documento "top secret". In altre parole, il flusso lecito d'informazione è *Unclassified* $\rightarrow$ *Confidential* $\rightarrow$ *Secret* $\rightarrow$ *Top Secret*. Inoltre, se si combinano due documenti con livelli di sicurezza distinti, è naturale che il documento risultante abbia livello di sicurezza pari al più alto dei livelli di sicurezza dei documenti originali. In altre parole, l'operazione $\oplus$ è definita in questo modo:

$$
\begin{aligned}
\mathit{Unclassified} \oplus \mathit{Unclassified} &= \mathit{Unclassified} \\
\mathit{Unclassified} \oplus \mathit{Confidential} &= \mathit{Confidential} \\
\mathit{Unclassified} \oplus \mathit{Secret} &= \mathit{Secret} \\
\mathit{Unclassified} \oplus \mathit{Top\ Secret} &= \mathit{Top\ Secret} \\
\mathit{Confidential} \oplus \mathit{Unclassified} &= \mathit{Confidential} \\
\mathit{Confidential} \oplus \mathit{Confidential} &= \mathit{Confidential} \\
\mathit{Confidential} \oplus \mathit{Secret} &= \mathit{Secret} \\
\mathit{Confidential} \oplus \mathit{Top\ Secret} &= \mathit{Top\ Secret} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

e così via. Dovrebbe essere chiaro che le operazioni $\rightarrow$ e $\oplus$ non possono essere definite in modo completamente arbitrario, altrimenti si ottengono politiche di flusso dell'informazione prive di senso. In effetti, una politica di flusso dell'informazione ragionevole deve obbedire a quattro semplici assiomi, detti *assiomi di Denning* [93, 95]:

1. l'insieme $\mathcal{L}$ dei livelli di sicurezza è finito;
2. la relazione $\rightarrow$ è un ordinamento parziale su $\mathcal{C}$;
3. $\mathcal{L}$ ha un estremo inferiore rispetto a $\rightarrow$;
4. $\oplus$ è un operatore totale di estremo superiore.

Cerchiamo di chiarire il significato degli assiomi. La prima proprietà è ovvia: esiste un numero limitato di etichette di sicurezza che è possibile assegnare.

La seconda proprietà richiede che la relazione che determina i flussi d'informazione sia un *ordinamento parziale*, ossia una relazione *riflessiva* (ogni elemento è in relazione con sé stesso), *transitiva* (se x è in relazione con y e y è in relazione con z allora x è in relazione con z) e *antisimmetrica* (se x è in relazione con y e y è in relazione con x allora x e y sono uguali). Ciascuna di queste proprietà ha un'interpretazione intuitiva in termini di requisiti di sicurezza:

- riflessività: per ogni livello di sicurezza A si ha $A \rightarrow A$, ossia l'informazione può fluire liberamente tra oggetti allo stesso livello di sicurezza;
- transitività: se $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$ allora $A \rightarrow C$, ossia se l'informazione può fluire indirettamente dal livello A al livello C attraverso B, allora la stessa informazione può passare direttamente da A a C;
- antisimmetria: se $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$ allora $A = B$, ossia è inutile avere livelli di sicurezza distinti se l'informazione può passare liberamente dall'uno all'altro.

Anche il terzo assioma esprime una proprietà abbastanza intuitiva: esiste un livello di sicurezza minimo[,] tale che l'informazione può sempre passare da quel livello a qualunque altro [livello] (ad esempio[,] un livello di sicurezza per informazioni di pubblico dominio).

L'ultimo assioma è meno banale. Che cosa significa che $\oplus$ è un "operatore totale"? Vuol dire che è definito per ogni possibile coppia di livelli di sicurezza, e dunque è sempre possibile assegnare un livello di sicurezza all'oggetto risultante dalla combinazione di altri due oggetti. Il fatto che $\oplus$ debba essere l'operatore di "estremo superiore" cattura in modo preciso l'intuizione dell'esempio precedente, cioè essenzialmente che la combinazione di due documenti non può avere un livello di sicurezza più basso di uno dei due documenti originali, e non ha senso che abbia un livello di sicurezza strettamente più alto. Più formalmente, si deve avere che

- $A \rightarrow A \oplus B$ e $B \rightarrow A \oplus B$;
- se $A \rightarrow C$ e $B \rightarrow C$ allora $A \oplus B \rightarrow C$;

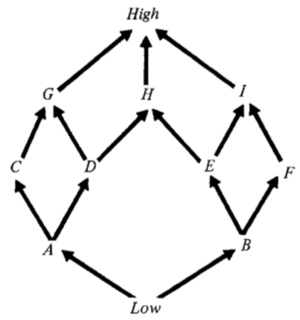


Figura 8.2: Un esempio di reticolo [(Fonte:][93][).]

- $\oplus$ è commutativo (cioè[,] $A \oplus B = B \oplus A$) e associativo (cioè[,] $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$).

Si può dimostrare che dalle precedenti proprietà discende che le politiche di flusso dell'informazione sono strutture matematiche chiamate *reticoli* (Figura ??). Questo è un fatto interessante, perché i reticoli sono ben noti ai matematici (e agli informatici — almeno ad alcuni). La formalizzazione matematica delle politiche di flusso dell'informazione apre perciò la porta allo studio rigoroso delle loro proprietà e permette di capirne i vantaggi e i limiti. Ad esempio, la specificazione formale dei requisiti di sicurezza richiesti da un sistema permette, almeno in linea di principio, di validare i meccanismi di controllo degli accessi ai dati e individuare eventuali vulnerabilità. Un limite è dato dal fatto che, sebbene sia possibile dimostrare il rispetto di una politica di sicurezza rispetto ai flussi d'informazione noti, in pratica bisogna tenere in considerazione anche potenziali canali di scambio dell'informazione impliciti o *nascosti*. Ad esempio, un soggetto ostile potrebbe inferire il testo di un documento senza aver la possibilità di leggerlo direttamente, ma soltanto registrando il suono del ticchettio della tastiera dell'utente che lo sta scrivendo. Un altro esempio di flusso implicito d'informazione è proposto nella sezione successiva.

Si può infine dimostrare che il problema di controllare che tutti e soli i flussi d'informazione autorizzati siano possibili è molto più complesso di quanto le presenti note possano lasciar intendere (in generale è indecidibile!) [93]. La matematica richiesta in questo ambito può diventare piuttosto sofisticata (un ruolo importante è giocato dalla *teoria dell'informazione* di Claude Shannon) e ha numerose applicazioni, ad esempio in crittografia.

Controllo degli accessi

La protezione dei dati rispetto ad accessi non autorizzati è possibile grazie alle funzionalità messe a disposizione dai sistemi di gestione di basi di dati [35, 12]. In particolare, tali sistemi forniscono opportuni *meccanismi di controllo degli accessi*, il cui obiettivo è implementare una data politica di flusso dell'informazione che garantisca l'accesso alle risorse disponibili solo ai soggetti autorizzati e secondo le regole stabilite [dalla politica]. Tali meccanismi si basano sull'idea di assegnare ai soggetti opportune *autorizzazioni*[,] o *privilegi* (ad esempio di lettura, scrittura, creazione, cancellazione[,] e così via) per operare sugli oggetti della base di dati.

Uno dei più semplici e più diffusi meccanismi di sicurezza prende il nome di *accesso discrezionale* (*discretionary access control* o *DAC*, in inglese). In tale modello, ogni oggetto della base di dati è assegnato a un soggetto *proprietario* (che, tipicamente, è l'utente che ha creato l'oggetto). Il proprietario ha tutti i privilegi sugli oggetti che possiede e può concedere alcuni di tali privilegi ad altri soggetti. La concessione di un privilegio su un oggetto è pertanto a discrezione del proprietario, da cui il nome dato al modello.

Il modello discrezionale non è usato solo nelle basi di dati, ma anche per la gestione dei permessi sui file nei sistemi operativi. Il difetto principale di tale modello è che non preclude la possibilità di flussi d'informazione indesiderati (intenzionali o accidentali). Per illustrare tale affermazione, useremo per semplicità un esempio riferito all'accesso a un file su disco [95].

Supponiamo che Anna, Biagio e Carla siano tre colleghi di lavoro che hanno accesso a uno stesso computer. Supponiamo inoltre che Biagio abbia scritto un documento per Anna in cui esprime un giudizio fortemente negativo sul modo di lavorare di Carla. Biagio vuol far leggere il documento ad Anna, ma non a Carla. Inizialmente, dunque, la situazione potrebbe essere la seguente:

	Documento
Anna	-
Biagio	proprietario
Carla	-

Poiché Biagio ha creato il documento, ne è il proprietario. Gli altri utenti non hanno alcun privilegio su di esso e in particolare non possono leggerlo. Dopo aver creato il documento, Biagio decide di concedere il privilegio di lettura ad Anna:

	Documento
Anna	lettura
Biagio	proprietario
Carla	-

Ora Anna può leggere la lamentela di Biagio, ma Carla ancora no. Tuttavia, nell'account di Anna è presente un *malware* (installato da Carla?), che crea automaticamente una copia di ogni documento leggibile da Anna e ne modifica i privilegi. Poiché la copia del documento è creata dal malware che agisce con i privilegi di Anna, Anna ne diventa proprietaria:

	Documento	Copia del documento
Anna	lettura	proprietario
Biagio	proprietario	-
Carla	-	-

Il malware può quindi concedere a Carla il privilegio di lettura sulla *copia* del documento:

	Documento	Copia del documento
Anna	lettura	proprietario
Biagio	proprietario	-
Carla	-	lettura

cosicché Carla è ora in grado di sapere ciò che Biagio pensa di lei.

Per superare le limitazioni dell'accesso discrezionale, è necessario definire politiche d'accesso a livello di sistema, che abbiano priorità rispetto ai privilegi discrezionali e che gli utenti non siano in grado di modificare. Una soluzione è data da un modello basato sull'*accesso vincolato* (*mandatory access control* o *MAC*, in inglese), inizialmente proposto per la sicurezza di sistemi militari. In tale modello, a ciascun soggetto è assegnato un *livello d'autorizzazione*, in modo analogo a quanto abbiamo visto in precedenza per gli oggetti con i livelli di sicurezza. Intuitivamente, soggetti con un elevato livello d'autorizzazione sono fidati e si assume che non facciano filtrare informazioni riservate (in altre parole, tale modello non avrebbe potuto impedire a Edward Snowden di confermarci che viviamo in un presente orwelliano). Per acquisire un certo livello d'autorizzazione devono essere poste in atto opportune procedure di verifica di affidabilità degli utenti. Per contro, i sistemi software potrebbero contenere malware, perciò, in generale, a essi dev'essere assegnato un basso livello d'autorizzazione.

L'accesso vincolato si basa su due regole, dette *regole di Bell-LaPadula* [9, 8]:[1]. Se S è un soggetto e O è un oggetto allora deve valere quanto segue:

1. S può leggere O solo se il livello d'autorizzazione di S è almeno pari al livello di sicurezza di O (no read up);

2. S può scrivere O solo se il livello di sicurezza di O è almeno pari al livello di autorizzazione di S (no write down).

In termini di flussi d'informazione:

1. la prima regola implica un flusso d'informazione da un oggetto O a un soggetto S con sufficienti privilegi;

2. la seconda regola implica un flusso d'informazione da un soggetto S a un oggetto O sufficientemente sicuro.

[1] Il modello è notevolmente semplificato rispetto alla proposta originale.

Ad esempio, un soggetto con livello d'autorizzazione *Secret* può leggere oggetti classificati come *Secret*, *Confidential* o *Unclassified*, ma non oggetti *Top Secret*, [e] dunque non può accedere in alcun modo alle informazioni più riservate; un soggetto con accesso *Confidential* può scrivere oggetti *Confidential*, *Secret* e *Top Secret* (anche se non può leggere da questi ultimi due!), ma non può scrivere oggetti *Unclassified* e dunque non può, nemmeno involontariamente, rivelare informazioni sensibili.

Vediamo come l'accesso vincolato permetta a Biagio di comunicare in maniera sicura con Anna. Ciò può accadere se Biagio e Anna hanno un livello d'autorizzazione più alto rispetto a Carla. Ad esempio, a Biagio e Anna potrebbe essere stato assegnato il livello d'autorizzazione *Secret*, mentre Carla potrebbe avere soltanto il livello *Confidential*. Quando Biagio crea il documento per Anna, può etichettarlo come *Secret* (ciò è consistente con la seconda regola di Bell-LaPadula):

	Documento (*Secret*)
Anna (*Secret*)	
Biagio (*Secret*)	proprietario
Carla (*Confidential*)	

Come prima, Biagio assegna il privilegio di lettura ad Anna, e come prima il malware installato nell'account di Anna crea una copia del documento e dà il privilegio di lettura a Carla:

	Documento (*Secret*)	Copia del documento (*Secret*)
Anna (*Secret*)	lettura	proprietario
Biagio (*Secret*)	proprietario	
Carla (*Confidential*)		lettura

Tuttavia, in base alla seconda regola di Bell-LaPadula, il malware può creare solo documenti con livello di sicurezza *Secret* (o *Top Secret*). In base alla prima regola, Carla non può leggere tali documenti, indipendentemente dai permessi assegnati al documento. Di conseguenza, la privacy della comunicazione tra Biagio e Anna è salvaguardata.

Controllo degli accessi in SQL

Lo standard SQL prevede due istruzioni [rispettivamente] per l'assegnamento e la revoca di privilegi: *rispettivamente* `grant` e `revoke`. I principali privilegi sono `connect` (connessione a una base di dati), `select` (lettura di record), `insert` (inserimento di nuovi record), `update` (aggiornamento di record esistenti), `delete` (cancellazione di record) ed `execute` (possibilità di eseguire funzioni definite dall'utente). È inoltre possibile specificare se l'utente che riceve i privilegi può propagarli ad altri utenti oppure no. Ad esempio, l'istruzione:

```
grant select on T to Giorgio;
```

assegna a Giorgio il privilegio di lettura sull'oggetto `T`; Giorgio, tuttavia, non può concedere tale privilegio ad altri utenti. Invece l'istruzione:

```
grant select on T to Giorgio with grant option;
```

consente a Giorgio di assegnare a terzi il privilegio ricevuto.

L'esempio basato su DAC della sezione precedente può essere riformulato in termini di operazioni sulle tabelle di una base di dati. Assumiamo che Anna, Biagio e Carla siano tre utenti che hanno accesso alla stessa base di dati. L'esempio può essere allora codificato in SQL come segue:

1. Biagio crea una tabella e v'inserisce il documento per Anna. Biagio è il proprietario della tabella e ha automaticamente tutti i privilegi su di essa, mentre gli altri utenti non hanno alcun privilegio d'accesso [sulla tabella]:

   ```
   create table Documenti(
     id int primary key,
     testo varchar(1000)
   );

   insert into Documenti(id, testo) values (1, '...');
   ```

2. Biagio assegna ad Anna il privilegio di lettura sulla tabella:

   ```
   grant select on Documenti to Anna;
   ```

   Ora Anna può collegarsi alla base di dati e leggere il contenuto della tabella:

   ```
   table Documenti;

    id | testo
   ----+-------
     1 | ...
   ```

3. A questo punto, un malware in grado di collegarsi alla base di dati con i privilegi di Anna crea una copia della tabella:

   ```
   create table CopiaDocumenti as (
     select * from Documenti
   );
   ```

4. Poiché la tabella `CopiaDocumenti` è di proprietà di Anna, il malware (che opera con i privilegi di Anna) può modificarne a piacimento i privilegi:

   ```
   grant select on CopiaDocumenti to Carla;
   ```

   Si noti che il malware non può propagare direttamente i privilegi della tabella `Documenti`, perché ad Anna non sono stati concessi con la clausola `with grant option`.

5. Ora Carla può collegarsi alla base di dati e leggere il contenuto della nuova tabella:

```
table CopiaDocumenti;


 id | testo
----+-------
  1 | ...
```

Mentre il DAC è solitamente presente nella maggior parte dei moderni sistemi basati su SQL, il modello MAC di solito non è direttamente supportato. Tuttavia, alcuni sistemi di gestione dei dati (in particolare, PostgreSQL, [il sistema] usato nel laboratorio) implementano un meccanismo di controllo degli accessi molto flessibile, detto *controllo degli accessi basato sui ruoli* (*role-based access control* o *RBAC* in inglese).

Il modello RBAC si basa sul concetto di *ruolo*, che può essere pensato sia come un singolo utente della base di dati sia come un gruppo di utenti. Ad esempio, `antonio` può essere il nome di un ruolo che corrisponde a una persona di nome Antonio, mentre `studente` può essere il nome di un ruolo che include tutti gli utenti che sono studenti. Il sistema non distingue tra ruoli che corrispondono a utenti oppure a gruppi: la distinzione è fatta dall'amministratore della base di dati tenendo conto del significato del ruolo stesso.

Ciascun ruolo può essere proprietario di uno o più oggetti della base di dati e può assegnare ad altri ruoli i privilegi d'accesso su tali oggetti. Esiste poi una nozione di *appartenenza* di un ruolo ad un altro: ad esempio, un ruolo `tecnico` può appartenere a un ruolo `impiegato`: ciò significa che i privilegi assegnati a un impiegato sono ereditati da ogni tecnico. In altre, parole, è possibile costruire *gerarchie di ruoli*. Si può dimostrare che RBAC è sufficientemente flessibile da poter essere usato per implementare sia il modello DAC sia il MAC [85].

Discutiamo come simulare MAC con RBAC mediante un esempio. Si consideri la politica di flusso dell'informazione descritta dal reticolo in Figura ??. In accordo al modello di Bell-LaPadula, i soggetti con livello di sicurezza più elevato hanno maggiori autorizzazioni in lettura (ad esempio[,] al livello *Segreto* un soggetto ha accesso in lettura a qualunque oggetto), ma hanno anche maggiori vincoli in scrittura (al livello *Segreto* è possibile scrivere soltanto oggetti classificati come *Segreti*). Il duplice carattere del flusso d'informazione può essere catturato da due gerarchie di ruoli, una per le operazioni di lettura e una per quelle di scrittura, come mostrato in Figura ?? (in cui il simbolo $\in$ denota l'appartenza di un ruolo ad un altro, dunque specifica che il ruolo membro eredita i privilegi del ruolo cui appartiene e può eventualmente averne di ulteriori). A ciascun livello L della Figura ?? si fa corrispondere una coppia di ruoli L_r e L_w. Intuitivamente, al ruolo L_r sono assegnati i privilegi di lettura degli oggetti con livello di sicurezza L; analogamente a L_w sono assegnati i privilegi di modificazione degli oggetti con livello di sicurezza L. La struttura delle

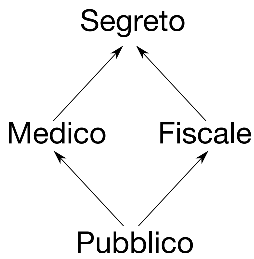


Figura 8.3: Un esempio di politica di flusso dell'informazione.

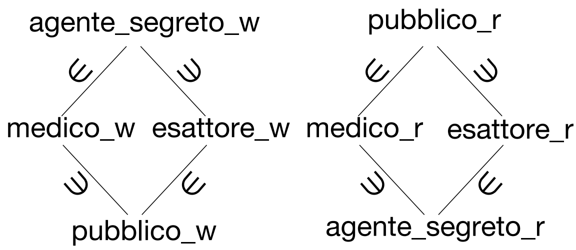


Figura 8.4: Gerarchie di ruoli corrispondenti alla politica di Figura ??.

gerarchie garantisce il rispetto delle regole di Bell-LaPadula. Infine, ciascun utente della base di dati è assegnato a uno e un solo ruolo di tipo L_r e a uno e uno solo di tipo L_w, forzando in tal modo il rispetto della politica definita.

Controllo delle inferenze

Una *base di dati statistica* è una base di dati in cui sono consentite soltanto interrogazioni che producono dati aggregati (ad esempio, somme o medie di insiemi di valori). Le interrogazioni che consentono di derivare informazione di tipo individuale sono bloccate dal sistema. Un'interrogazione che non è permessa in una base di dati statistica è, ad esempio, la seguente:

```
select * from Persona where cod_fiscale ='X';
```

La precedente interrogazione consente di ottenere tutte le informazioni inerenti a uno specifico individuo (quello con codice fiscale X). Al contrario, un'interrogazione del tipo

```
select avg(stipendio) from Persona;
```

potrebbe essere ammissibile, perché produce un dato (lo stipendio medio) che, in generale, non è riferito a un individuo in particolare.

Il problema principale delle basi di dati statistiche è che quasi sempre è possibile dedurre le risposte a interrogazioni non ammissibili in modo indiretto formulando soltanto interrogazioni ammissibili [43]. Illustreremo il problema mediante un esempio ispirato a [39].

Consideriamo una base di dati che contiene una tabella con il seguente schema:

Impiegato(nome, sesso, professione, stipendio)

Supponiamo di sapere che uno degli impiegati è un programmatore di nome Alfio. Vorremmo conoscere lo stipendio di Alfio, ma il sistema non accetta alcuna interrogazione del tipo:

```
select stipendio from Persona where nome = 'Alfio';
```

perché è permesso calcolare soltanto risultati aggregati. Senza darci per vinti, proviamo a formulare la seguente interrogazione:

```
select count(*) from Impiegato
  where sesso = 'M' and professione = 'programmatore';
```

Supponiamo che il sistema dia come risultato 1. Abbiamo scoperto che c'è un solo programmatore maschio: deve trattarsi di Alfio! Ecco come possiamo scoprire il suo stipendio:

```
select sum(stipendio) from Impiegato
  where sesso = 'M' and professione = 'programmatore';
```

Dato il risultato dell'interrogazione precedente, sappiamo che la somma calcolata da questa interrogazione è la somma di un singolo stipendio.

L'esempio precedente può sembrare estremamente *ad hoc* e si potrebbe argomentare che siamo stati soltanto fortunati, perché abbiamo trovato una condizione che permette di isolare un singolo record della tabella. Una semplice contromisura consiste nel vietare di rispondere a interrogazioni che coinvolgono pochi record (e, simmetricamente, a interrogazioni che li coinvolgono quasi tutti). Si può dimostrare, tuttavia, che tali restrizioni sono completamente inefficaci: è possibile definire condizioni di selezione che consentono di ottenere una risposta (indiretta) praticamente a qualunque interrogazione inammissibile. Tali condizioni sono dette *tracker generali* [43, 39].

L'idea è abbastanza semplice. Intuitivamente, un tracker generale è una condizione che è vera per "circa la metà" dei record di una tabella. Se una condizione A è inammissibile, ad esempio perché è vera per un numero troppo piccolo di record, allora nelle interrogazioni si può usare A `or` T invece di A, dove T è un tracker generale. La condizione A `or` T risulta essere sempre ammissibile, perché sarà vera per "circa la metà più qualcosa" dei record, quindi né per un numero troppo piccolo né per un numero troppo grande. Inoltre, se T è un tracker generale, anche `not` T lo è, perciò anche la condizione A `or` `not` T è sempre ammissibile.

Più precisamente, se una tabella ha N record e le interrogazioni ammissibili sono solo quelle che aggregano insiemi di valori di cardinalità compresa tra k e $N-k$ per qualche valore k fissato, allora ogni condizione soddisfatta da almeno $2k$ e da non più di $N-2k$ record ("circa la metà" significa questo) è un tracker generale (questo fatto richiede ovviamente una dimostrazione, che omettiamo).

Per verificare se una condizione è un tracker generale, basta eseguire due interrogazioni del tipo:

```
select count(*) from Persona where <condizione>;
select count(*) from Persona where not <condizione>;
```

Se entrambe le interrogazioni sono accettate dal sistema e producono un risultato compreso tra k e $N-k$, allora la condizione è un tracker generale. Non solo, ma la somma dei risultati delle due interrogazioni permette di conoscere quanti record ci sono nella tabella.

Se si ha la possibilità di formulare tali interrogazioni in un dato sistema, non è particolarmente difficile trovare un tracker generale, anche procedendo per tentativi. Ad esempio, dopo che sono state spiegate queste tecniche agli studenti, diversi di loro sono riusciti a risolvere il seguente problema: dato lo schema

Finanziamento(nome, sesso, professione, contributo)

che memorizza informazioni relative a finanziamenti segreti a partiti politici, sapendo che Daria è una giornalista corrotta, quanti soldi ha dato ai partiti? (L'istanza usata è riportata in appendice.)

8.4 La voce della scuola

Lo scopo principale del Piano Lauree Scientifiche è quello di orientare gli studenti [alle future scelte personali] tramite azioni comuni tra Scuola Secondaria ed Università. In questo contesto di prospettiva verso il futuro e di scoperta la Scuola Secondaria, oltre a realizzare l'obiettivo primario, può trovare ampi spazi per svolgere azioni didattiche innovative. L'attività di tipo laboratoriale permette infatti al docente [referente scolastico] ed agli studenti una *flessibilità di ruoli*:

- il docente assume un ruolo di guida del percorso di costruzione del sapere dello studente ma nel contempo, *scendendo dalla cattedra*, può dedicarsi alla ricerca, alla progettazione e sperimentazione di nuove modalità didattiche che prevedono la collaborazione ed supporto concreto degli studenti stessi;

- gli studenti, *possono non essere fruitori passivi*: sono liberi di dedicare maggiormente l'attenzione ad alcuni aspetti del percorso, ricercano soluzioni innovative e possono proporre in prima persona attività al docente, realizzando un percorso personalizzato.

In quest'ottica di sperimentazione e con una sinergia tra il docente di classe ed il docente dell'Università si è svolta l'attività "*La sicurezza delle basi di dati: Spie, cavalli di Troia e basi di dati ippocratiche*", un percorso di esplorazione che ha permesso di svolgere anche alcune attività collaborative tra studenti: in presenza (in orario extrascolastico), attraverso l'utilizzo della tecnologia (*Moodle, canale Youtube*) e di ambienti cooperativi (*wiki, forum*).

Il seminario di introduzione alla tematica della sicurezza delle basi di dati tenuto dal dott. N. Vitacolonna, è stato esteso anche ad altre classi dell'Istituto interessate alla tematica. In seguito alcuni studenti hanno partecipato a due laboratori presso l'Università. L'attività di documentazione e pubblicazione di un sito web di descrizione del percorso è stata svolta e coordinata all'interno della scuola.

La conferenza, iniziata con la visione di un breve e divertente cartoon ispirato alla satira politica del film "Dottor Stranamore", è stata affiancata da una attività di *live twitting* con *hashtag* identificati in maniera collaborativa dagli studenti della classe (*#MalignaniUd #PLSDB*) e comunicati alla platea [all'inizio] per permettere a tutti gli ascoltatori di esprimere le loro partecipazione. Dopo il videoclip, che ha immediatamente catturato l'attenzione dei presenti, il relatore ha trattato alcuni importanti aspetti della storia contemporanea legati alla privacy: il recente blocco di alcuni social in Turchia mediante dirottamento dei DNS, gli incontri segreti tra NeXT e l'NSA del '95, i bug di sicurezza inseriti intenzionalmente nella rete Internet e nei dispositivi *mobile* fino ad arrivare, a ritroso nel tempo, a citare il cardinale Richelieu con la celebre frase: "Datemi sei righe scritte per mano dal più onesto degli uomini e ci troverò un motivo per farlo impiccare".

Nella parte dell'incontro più tecnica e legata all'informatica, il relatore ha illustrato alcune delle più comuni tecniche di "*SQL Injection*", ha presentato alcune metodologie di controllo degli accessi ed alcuni esempi di tecniche di valutazione della sicurezza di basi di dati reali. Molto importante, per le implicazioni etiche, la parte finale dedicata alle "Basi di dati ippocratiche" introdotte da Agrawal et al. [2] a partire dal 2002 ed ispirate ad un passo del giuramento di Ippocrate. Attualizzando e trasferendo il giuramento dal campo medico ai moderni database, Agrawal et al. hanno declinato i principi fondanti sui quali si dovrebbe basare un sistema di gestione di una base dati: mettere in primo piano la gestione responsabile dei dati e garantire la privacy dell'individuo.

Per svolgere le successive attività laboratoriali, il gruppo classe è stato suddiviso in team per aree di interesse:

- partecipazione ai due laboratori presso l'Università con attività su database PostgreSQL e progettazione di una base dati con ruoli e privilegi utente specifici.
  Finalità: apprendere il funzionamento di un modello di controllo degli accessi (*Role-Based Access Control*) e implementare una politica di flusso dell'informazione usando tale modello;

- progettazione, scrittura e pubblicazione di un sito HTML/CSS per descrivere le attività all'interno del PLS utilizzando l'ambiente PhpMyAdmin, una base dati normalizzata per la raccolta dei Tweet e l'interrogazione dinamica alla stessa.
  Finalità: approfondire tematiche trattate durante l'anno scolastico ed applicarle ad un caso reale;

- creazione di documentazione progettuale per la relazione finale ed editing di una presentazione delle attività utilizzando *modalità collaborative* (software Prezi, Google Drive).
  Finalità: svolgere attività collaborative di supporto al team di progetto;

- registrazione di uno streaming video del seminario in presenza e contestuale pubblicazione su un canale YouTube.
  Finalità: sperimentazione di attività multimediali di supporto al team di progetto.

I tweet raccolti dagli allievi durante le attività, i contenuti testuali e multimediali, i file ed i concetti ritenuti "chiave" dagli studenti stessi sono stati raccolti e condivisi nel [corso] Moodle della classe e su alcune cartelle di Google Drive. Alcuni dei materiali sono stati pubblicati nel sito progettato nel corso delle attività, che potrà essere fruito nei prossimi anni dagli studenti della scuola. Il modulo PLS è stato inteso, oltre che in ottica orientante, anche come laboratorio collaborativo, per permettere la condivisione del sapere a tutta la classe ed elevare il livello complessivo delle conoscenze.

Tutta l'attività ha favorito il coinvolgimento degli studenti che da "*passivi ascoltatori*" sono diventati *parte attiva*. Durante le attività interne alla scuola "*gli allievi sono stati il motore*", in questo contesto il compito dell'insegnante è stato di guida per "*far emergere le potenzialità e gli interessi*" degli allievi, in stretta collaborazione con il docente referente dell'Università.

Si riportano di seguito i link ad alcuni dei materiali pubblicati e prodotti dalla classe durante il laboratorio:

- Account Twitter Malignani Unofficial creato per il *livetwitting* delle conferenze PLS: `https://twitter.com/MalignaniUD`
  Hashtag dedicati: *#MalignaniUd #PLSDB*

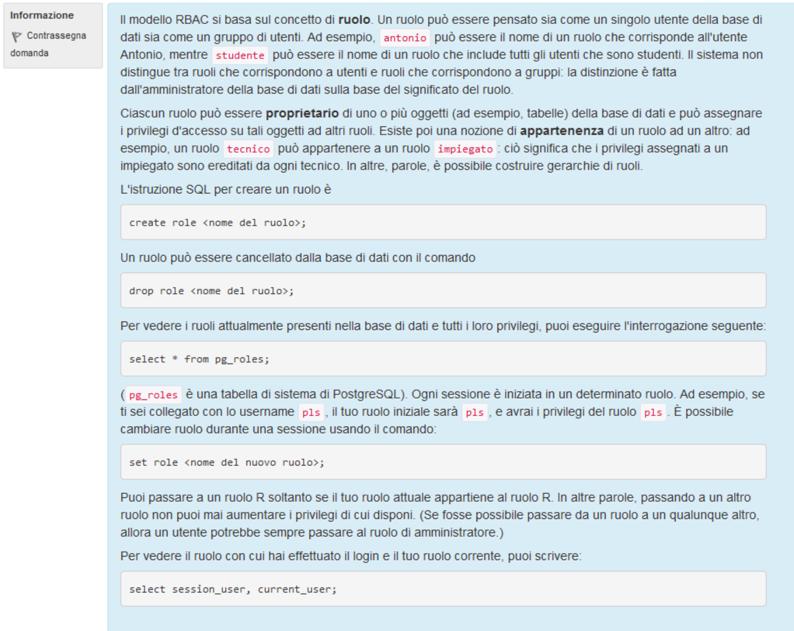
- Sito web progettato e realizzato con utilizzo di linguaggio HTML, fogli di stile CSS, database MySQL:
  `http://pls2014.winfuture.it/`

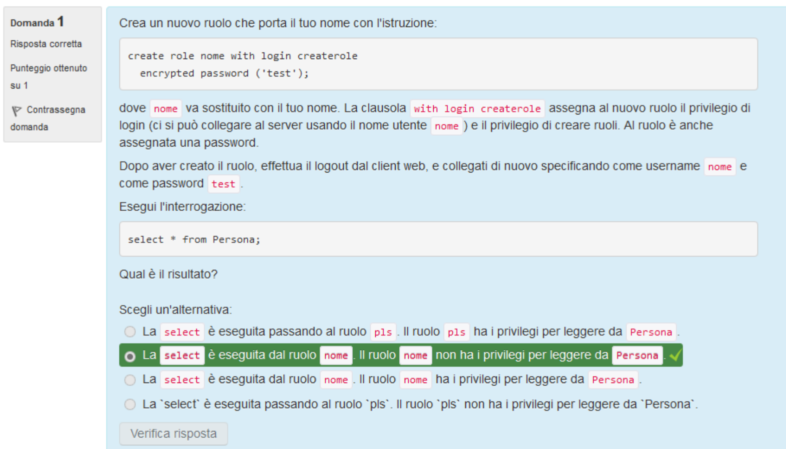
- Diretta streaming del seminario organizzata dagli studenti e pubblicata sul canale Youtube visionabile al link:
  `http://goo.gl/MUZRGs`

- Presentazione dell'attività collaborativa alla manifestazione "GO On FVG" (Liceo Stellini, 5 maggio 2014) a cura della docente di classe, con testimonianza degli allievi S. Cragnolini, I. Manfredi, R. Nobile, A. Roccaforte:
  `https://goo.gl/9qtpcW` (testo)
  `https://goo.gl/s1XcOZ` (video)

- News pubblicata sul sito scolastico:
  `http://goo.gl/nQly4J`

Esempi di appunti e documenti condivisi dagli studenti:

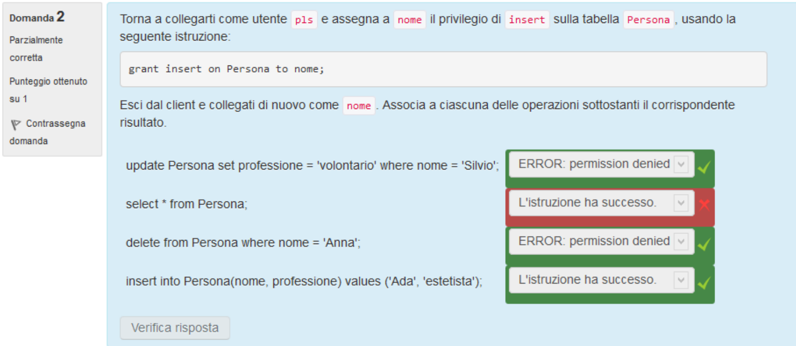


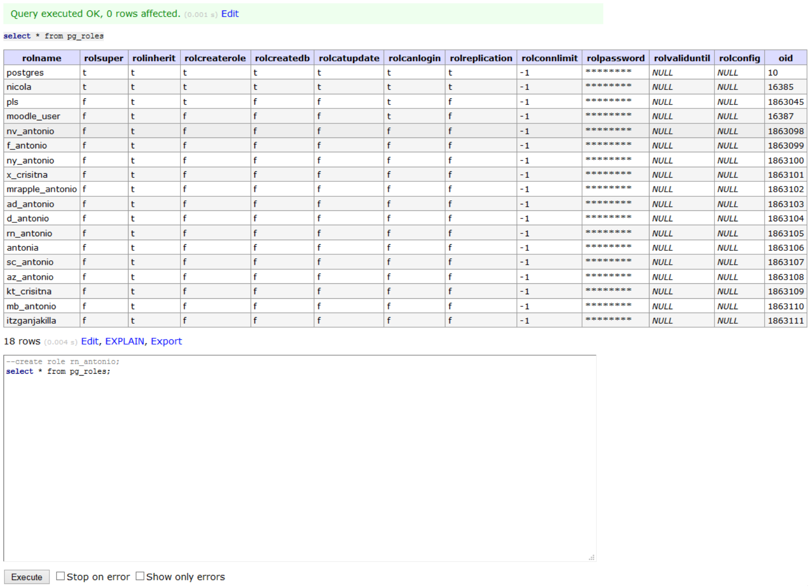


- https://goo.gl/1NMQHX
- https://goo.gl/3st8zx
- https://goo.gl/iPtySz

8.5 Conclusioni

Che cos'è la privacy? Una definizione interessante è la seguente: *"La privacy è il diritto di un individuo a determinare da sé quando, come ed entro che limiti l'informazione che lo riguarda è comunicata ad*





Query executed OK, 0 rows affected. (0.001 s) Edit

select * from pg_roles

rolname	rolsuper	rolinherit	rolcreaterole	rolcreatedb	rolcatupdate	rolcanlogin	rolreplication	rolconnlimit	rolpassword	rolvaliduntil	rolconfig	oid
postgres	t	t	t	t	t	t	t	-1	********	NULL	NULL	10
nicola	t	t	t	t	t	t	t	-1	********	NULL	NULL	16385
pls	f	t	t	f	f	t	f	-1	********	NULL	NULL	1863045
moodle_user	f	t	f	f	f	t	f	-1	********	NULL	NULL	16387
nv_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863098
f_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863099
ny_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863100
x_crisitna	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863101
mrapple_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863102
ad_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863103
d_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863104
rn_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863105
antonia	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863106
sc_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863107
az_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863108
kt_crisitna	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863109
mb_antonio	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863110
itzganjakilla	f	t	f	f	f	f	f	-1	********	NULL	NULL	1863111

18 rows (0.004 s) Edit, EXPLAIN, Export

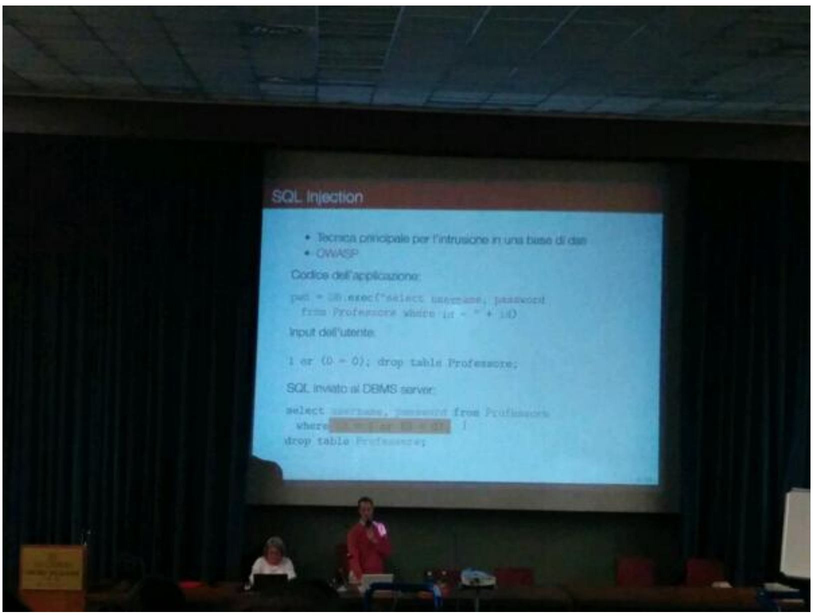
```
--create role rn_antonio;
select * from pg_roles;
```

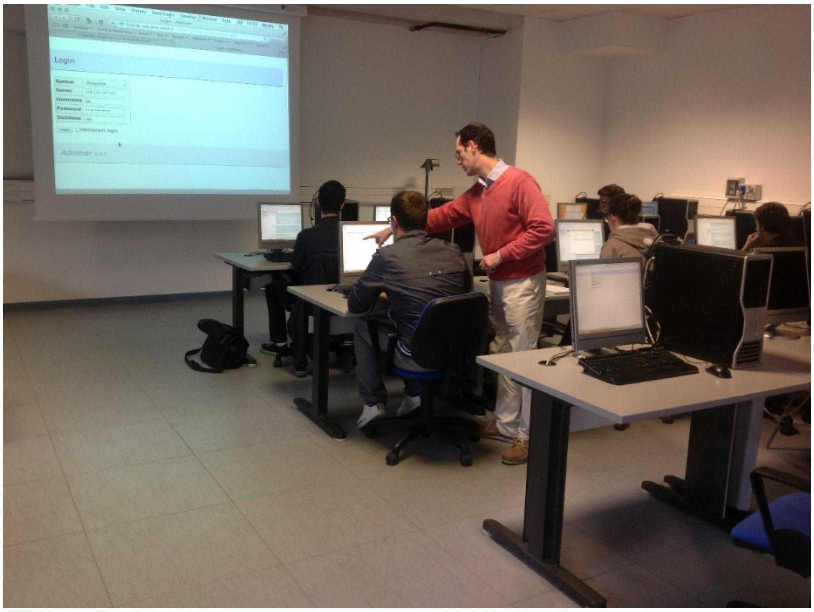
Execute Stop on error Show only errors

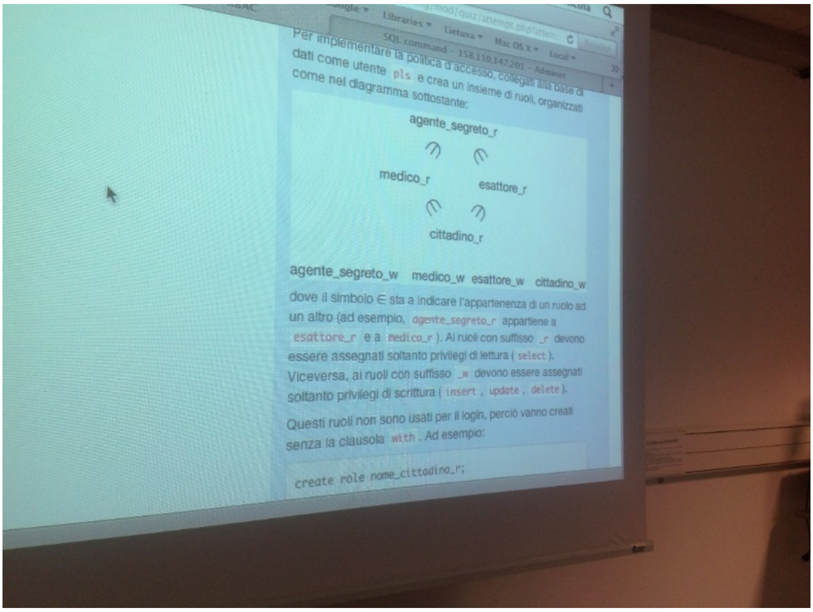
altri” [113]. La privacy *non* è il bisogno di nascondere qualcosa di sbagliato o illecito, come alcuni assumono, tacitamente o in modo esplicito (“Se non fai niente di male, che cos’hai da nascondere?”). Si tratta di un *“diritto umano intrinseco, e un requisito per mantenere la condizione umana con dignità e rispetto* [98]. La piena realizzazione di tale diritto richiede scelte politiche oculate e il supporto della tecnologia. Poiché i sistemi informativi che memorizzano i nostri dati sono basati su sistemi di gestione di basi di dati, è necessario che la progettazione di tali sistemi tenga conto, fin dall’inizio, dei requisiti di privacy [2]:

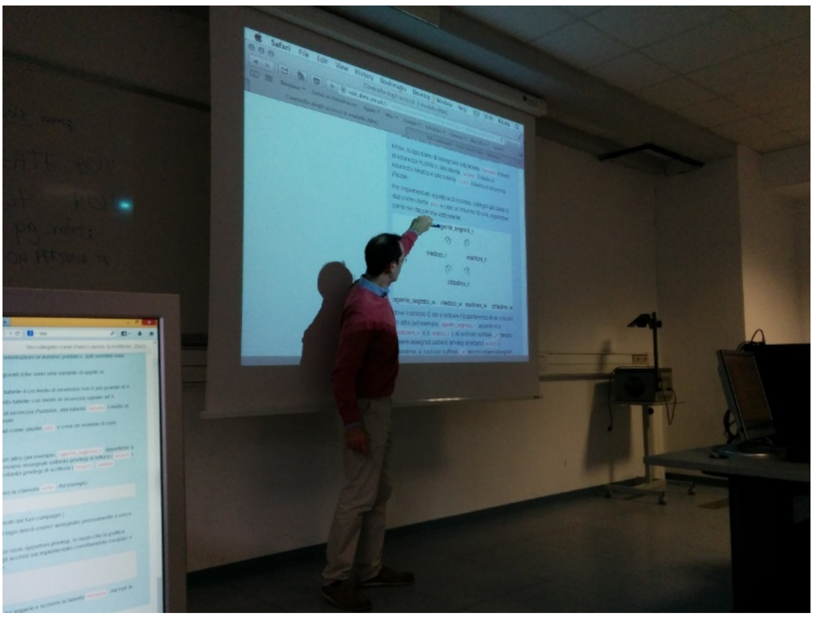
- **Scopi:** per ogni informazione memorizzata nella base di dati devono essere specificate le ragioni per cui [tale informazione] è presente;
- **Consenso:** l’informazione dev’essere memorizzata con il con-


Spie, cavalli di Troia e basi di dati ippocratiche
Nicola Vitacolonna
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di Udine
4 aprile 2014


SQL Injection
Codice dell'applicazione:
Input dell'utente:
1 or (0 = 0); drop table Professore;
SQL inviato al DBMS server:


Login
System
Server
Username
Password
Database
Permanent login
Adminer


Per implementare la politica d'accesso, collegati alla base di
dati come utente pls e crea un insieme di ruoli, organizzati
come nel diagramma sottostante:
agente_segreto_r
medico_r
esattore_r
cittadino_r
agente_segreto_w medico_w esattore_w cittadino_w
dove il simbolo ∈ sta a indicare l'appartenenza di un ruolo ad
un altro (ad esempio, agente_segreto_r appartiene a
esattore_r e a medico_r). Ai ruoli con suffisso _r devono
essere assegnati soltanto privilegi di lettura (select).
Viceversa, ai ruoli con suffisso _w devono essere assegnati
soltanto privilegi di scrittura (insert , update , delete).
Questi ruoli non sono usati per il login, perciò vanno creati
senza la clausola with . Ad esempio:
create role nome_cittadino_r;



senso di chi la fornisce;

- **Contenuti limitati:** solo i dati personali strettamente necessari per ottenere gli scopi previsti devono essere memorizzati nella base di dati;
- **Uso limitato:** solo le interrogazioni consistenti con gli scopi previsti possono essere eseguite;
- **Diffusione limitata:** le informazioni personali nella base di dati non devono essere diffuse senza il consenso di chi le fornisce;
- **Durata limitata:** le informazioni devono essere mantenute nella base di dati solo per il tempo strettamente necessario al raggiungimento degli scopi previsti;
- **Accuratezza:** le informazioni personali memorizzate nella base di dati devono essere aggiornate e accurate;
- **Sicurezza:** le informazioni personali devono essere protette da usi inappropriati e accessi non autorizzati;
- **Apertura:** i soggetti i cui dati sono memorizzati nella base di dati devono poter accedere a tutte le informazioni che li riguardano;
- **Conformità:** i soggetti i cui dati sono memorizzati nella base di dati devono poter verificare il rispetto dei suddetti principi.

In alcuni di questi requisiti si riconosceranno richiami alla nostra legislazione sulla privacy. Ma sono davvero tutti principi realizzati? Saprà la futura generazione di ingegneri, tecnici e informatici tenerne conto?

8.6 Ringraziamenti

Si ringrazia la prof.ssa Mariagemma Fantin per aver contribuito al buon esito del progetto.

8.7 Istanza usata per l'esercizio della Sezione 8.3

Nome	sesso	professione	contributo
Aldo	M	giornalista	3000.00
Biagio	M	giornalista	500.00
Carlo	M	imprenditore	1.00
Daria	F	giornalista	5000.00
Elena	F	professore	1000.00
Fabio	M	professore	20000.00
Giulia	F	medico	2000.00
Ivano	M	avvocato	10000.00

Riferimenti bibliografici

[2] Rakesh Agrawal et al. «Hippocratic Databases». In: *Proceedings of the 28th international conference on Very Large Data Bases*. VLDB Endowment. 2002, pp. 143–154.

[8] David Elliott Bell. «Looking Back at the Bell-La Padula Model». In: *ACSAC*. Vol. 5. 2005, pp. 337–351.

[9] David Elliott Bell e Leonard J. LaPadula. *Secure computer systems: Mathematical foundations*. Rapp. tecn. DTIC Document, 1973.

[12] Elisa Bertino e Ravi Sandhu. «Database security—concepts, approaches, and challenges». In: *IEEE Transactions on Dependable and Secure Computing* 2.1 (2005), pp. 2–19.

[32] Edgar F. Codd. «A Relational Model of Data for Large Shared Data Banks». In: *Information Retrieval* 13.6 (giu. 1970), pp. 377–387.

[33] Edgar F. Codd. «Data Models in Database Management». In: *Proceedings of the 1980 Workshop on Data Abstraction, Databases and Conceptual Modeling*. 1980, pp. 112–114.

[34] Edgar F Codd. *Derivability, redundancy and consistency of relations stored in large data banks.* Rapp. tecn. Reprinted in SIGMOD Record, March 2009 (Vol. 38, No. 1). IBM, 1969, pp. 17–36.

[35] Edgar F. Codd. *The Relational Model for Database Management: Version 2*. Addison-Wesley, 1990.

[39] Chris J. Date. *An Introduction to Database Systems*. 8th. Boston: Pearson/Addison Wesley, 2004. ISBN: 0321197844.

[43] Dorothy E. Denning, Peter J. Denning e Mayer D. Schwartz. «The Tracker: A Threat to Statistical Database Security». In: *ACM Transactions on Database Systems (TODS)* 4.1 (1979), pp. 76–96.

[44] Dorothy Elizabeth Robling Denning e Peter J. Denning. «Data Security». In: *Computing Surveys* II.3 (set. 1979), pp. 227–249.

[49] Cynthia Dwork. «A Firm Foundation for Private Data Analysis». In: *Communications of the ACM* 54.1 (2011), pp. 86–95.

[50] Cynthia Dwork. «Differential Privacy: A Survey of Results». In: *Theory and Applications of Models of Computation*. Springer, 2008, pp. 1–19.

[53] Ramez Elmasri e Shamkant Navathe. *Fundamentals of database systems*. 6th. Addison Wesley, apr. 2010.

[85] Sylvia Osborn, Ravi Sandhu e Qamar Munawer. «Configuring Role-Based Access Control to Enforce Mandatory and Discretionary Access Control Policies». In: *ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC)* 3.2 (2000), pp. 85–106.

[93] Dorothy Elizabeth Robling Denning. *Cryptography and Data Security*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1982.

[95] Ravi S. Sandhu. «Lattice-Based Access Control Models». In: *Computer* 26.11 (1993), pp. 9–19.

[98] Bruce Schneier. *The Eternal Value of Privacy*. https://www.schneier.com/essay-114.html. 2006.

[99] Bruce Schneier. *The US government has betrayed the internet. We need to take it back*. The Guardian, 13 settembre 2013. http://www.theguardian.com/commentisfree/2013/sep/05/government-betrayed-internet-nsa-spying. URL: http://www.theguardian.com/commentisfree/2013/sep/05/government-betrayed-internet-nsa-spying.

[113] Alan Westin. *Freebies and Privacy: What Net Users Think*. Rapp. tecn. Technical Report, Opinion Research Corporation, 1999.

IL LABORATORIO DI INDAGINI STATISTICHE

GIAN PIETRO ZACCOMER, PAOLO VIDONI

9.1 Introduzione

Sempre più nello sviluppo di ricerche scientifiche, nelle attività professionali o, più semplicemente, nella lettura e consultazione di quotidiani, riviste e siti web, le conoscenze relative a un determinato fenomeno di interesse derivano dall'analisi e dalla sintesi di informazioni espresse in forma quantitativa, comunemente chiamate "dati". La Statistica fornisce metodi e strumenti utili per evidenziare aspetti interessanti presenti nei dati e, al contempo, permette una quantificazione della rilevanza da attribuire a tali conclusioni. Pur derivando della Matematica, essa presenta metodi e concetti propri e, in molti contesti applicati, definisce fruttuose interazioni con altre discipline, quali ad esempio l'Economia e la Finanza, la Sociologia, la Biologia e la Medicina.

Il progetto qui presentato, denominato Laboratorio di Indagini Statistiche (LIS), ha avuto primariamente come obiettivo quello di organizzare e implementare un'indagine statistica. Il tema dell'indagine era "Quali prospettive dopo la maturità: continuo a studiare o cerco lavoro?" ed ha interessato gli studenti delle classi quarte e quinte di alcune scuole superiori della provincia di Udine. Per raggiungere tale obiettivo sono state richieste soltanto competenze di base di Matematica e di Informatica, che sono state poi affinate e combinate con la capacità di leggere, interpretare e contestualizzare le indicazioni ricavabili dai dati raccolti durante l'indagine. Passo dopo passo i docenti e gli studenti coinvolti nel laboratorio hanno acquisito gli elementi di base che caratterizzano la definizione di indagini statistiche non complesse, e più in generale i primi concetti per l'analisi dei dati. Tali competenze potranno risultare utili in vari contesti formativi e in diversi ambiti disciplinari, nonché nell'ambito delle iniziative di informazione inquadrabili nei progetti di orientamento predisposti da scuole superiori e università.

Il LIS è stato proposto dall'Università degli Studi di Udine nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche (PLS), all'interno del progetto "Matematica e Statistica" e si è svolto durante l'Anno Accademico 2010-2011. Il laboratorio, coordinato dagli autori di questo contributo, docenti universitari presso l'Ateneo friulano, ha coinvolto docenti e studenti di diverse scuole secondarie di secondo grado della provincia di Udine: l'Istituto Statale di Istruzione Superiore "A. Malignani" di Udine, gli Istituti Tecnici "A. Zanon" di Udine e "G. Marchetti" di Gemona del Friuli, i Licei Scientifici "G. Bertoni" di Udine e "L. Magrini" di Gemona del Friuli.

9.2 Obiettivi e organizzazione

Come già anticipato, il LIS ha avuto come obiettivo concreto quello di definire, impostare e portare a termine un'indagine statistica sulle prospettive e le aspirazioni personali, dopo l'Esame di Stato, degli studenti delle classi quarte e quinte di alcuni istituti superiori della provincia di Udine. Questo laboratorio, che si inquadra nella tipologia di laboratori PLS, che cercano di avvicinare gli studenti alle discipline scientifiche e di svilupparne le vocazioni personali, ha avuto due obiettivi principali: da una parte offrire agli studenti un percorso formativo innovativo e interdisciplinare che avvicini allo studio della Statistica e, dall'altra, proporre ai docenti delle scuole superiori un'occasione di formazione sui metodi di analisi statistica e sulla loro utilità in contesti interdisciplinari. Va evidenziato inoltre che, pur avendo una finalità principalmente formativa, il laboratorio è risultato sicuramente utile anche per quanto riguarda l'orientamento post-diploma, dal momento che gli studenti hanno avuto occasione di seguire alcune lezioni in ambito universitario e di partecipare in modo attivo ad un progetto concreto di indagine statistica, organizzato e coordinato in modo congiunto da scuola e università.

La fase di progettazione del laboratorio è stata curata congiuntamente dai docenti universitari e dagli undici insegnanti delle scuole superiori coinvolti nell'iniziativa. La definizione degli obiettivi, l'identificazione dei contenuti formativi, del tema e delle caratteristiche dell'indagine statistica, l'organizzazione delle attività (sia in Università sia nei vari istituti) ha richiesto un notevole sforzo corale. Il LIS ha coinvolto 38 studenti delle classi quarte e quinte di cinque diversi istituti. Si sono costituiti tre gruppi formati da non più di 15 studenti provenienti da classi diverse; in due casi gli allievi appartenevano anche a istituti diversi. I ragazzi che hanno partecipato al laboratorio sono stati definiti *leader* poiché, sotto la supervisione dei loro insegnanti, hanno successivamente trasmesso alle classi di appartenenza i contenuti formativi acquisiti durante le lezioni svolte all'università. Inoltre, non solo hanno condotto materialmente l'indagine statistica all'interno della propria scuola, ma hanno anche analizzato i dati raccolti e curato la presentazione dei risultati. In tutte queste attività, gli studenti leader sono sempre stati seguiti dagli insegnanti coinvolti nel laboratorio.

Gli autori hanno coordinato tutte le fasi del progetto, mantenendo uno stretto contatto con i docenti delle scuole superiori e fornendo consulenze specifiche nelle fasi più delicate dell'indagine, come la predisposizione del questionario, l'analisi dei dati e la strutturazione della presentazione finale. Infine, va sottolineato che anche la valutazione finale degli studenti è stata curata congiuntamente dai docenti universitari e dagli insegnanti delle scuole superiori, predisponendo e somministrando un test a risposta multipla nonché valutando la forma e i contenuti della presentazione finale dei risultati dell'inda-gine. Più precisamente, dopo la fase preliminare di progettazione e programmazione, si sono svolte quattro lezioni teoriche, tenute dai docenti universitari, rivolte sia agli studenti che ai loro insegnanti. Nonostante le lezioni siano state rivolte a tutti gli allievi, i tre gruppi hanno rielaborato i contenuti acquisiti, proponendo degli approfondimenti e delle applicazioni differenziate per scuola di appartenenza.

Terminata la parte del laboratorio dedicata alla formazione teorica, comprensiva di esercitazioni al calcolatore, si è sviluppata la fase applicativa, con l'obiettivo di definire una indagine statistica che permetta agli studenti non solo di applicare i concetti teorici, ma anche di seguire passo passo la costruzione dell'indagine, curando la predisposizione del questionario, la somministrazione dello stesso, il *data-entry*, l'analisi finale dei dati e la loro presentazione. Il questionario è stato somministrato dagli studenti leader agli altri allievi del proprio istituto di appartenenza. Durante la parte applicativa del laboratorio, gli autori e i docenti degli istituti hanno promosso ulteriori incontri organizzativi per seguire e coordinare l'andamento dell'iniziativa. Come anticipato, i docenti delle scuole hanno accompagnato gli studenti leader durante la conduzione delle varie fasi dell'indagine ed hanno condiviso, con l'aiuto degli stessi studenti, il lavoro svolto nell'ambito del laboratorio con l'intera classe di appartenenza.

Il LIS si è concluso con la presentazione e la discussione dei risultati dell'indagine, che si è svolta in ogni istituto coinvolto nell'iniziativa ed è stata curata dagli studenti leader dell'istituto, con la supervisione dei docenti. In questa occasione, gli studenti leader hanno anche compilato il test di valutazione per la verifica del raggiungimento degli obiettivi formativi. A conclusione della presentazione e del test, i docenti universitari e gli insegnanti degli istituti hanno valutato congiuntamente il risultato del test e l'efficacia e correttezza della presentazione dei risultati dell'indagine. Per fornire una idea più precisa di quanto fatto viene di seguito riportato, nell'Appendice A, il calendario completo delle attività svolte durante il laboratorio.

9.3 Descrizione

La genesi del laboratorio: il progetto Movimprese

Prima di illustrare gli aspetti didattici del laboratorio, si vuole sottolineare che il LIS prende spunto da quanto già realizzato per un precedente progetto, denominato Movimprese, relativo al miglioramento qualitativo della didattica dell'Ateneo friulano. Esso è stato portato a termine in occasione del corso di Analisi Statistica dei Dati, primo approccio alla Statistica degli studenti del corso di laurea triennale in Statistica e Informatica per la Gestione delle Imprese, grazie alla collaborazione della Camera di Commercio di Udine. Tale progetto si prefiggeva diversi obiettivi dal punto di vista didattico; tra gli altri mirava a rafforzare il momento empirico dell'insegnamento in aula attraverso la realizzazione di un report statistico basato sui dati del Registro delle Imprese di fonte camerale.

Come evidenziato in [116, pag. 57], una delle scelte fondamentali di tale insegnamento è stata quella di utilizzare per le esercitazioni un foglio di calcolo, piuttosto che un software statistico. Tale scelta è stata fatta soprattutto in funzione degli aspetti didattici del progetto, con l'obiettivo di portare gli studenti a capire il funzionamento dello strumento statistico utilizzato per giungere alla soluzione del problema proposto. In questo modo gli studenti non potevano limitarsi ad utilizzare pedissequamente le funzioni già supportate dal software, o peggio quelle della sua interfaccia grafica, ma erano costretti ad implementare manualmente sul foglio di calcolo il concetto teorico appreso in aula. Questa intuizione didattica, rivelatasi felice per il progetto Movimprese, è stata quindi ripresa nel progetto LIS, tenuto conto che gli studenti delle scuole superiori coinvolti conoscevano già i rudimenti di funzionamento di un foglio di calcolo e, quindi, erano in grado di utilizzarlo senza la necessità di un'ulteriore lezione ad hoc.

Aspetti didattici: siete pronti a "statisticare"?

Il LIS ha previsto un primo momento di lezione frontale, necessaria per fornire agli studenti una generale introduzione alla Statistica, concentrando la loro attenzione sugli strumenti di tipo descrittivo. Come anticipato, è stato svolto un ciclo di quattro lezioni, di due ore ciascuna, tra novembre 2010 e gennaio 2011, presso il Laboratorio del Dipartimento di Scienze Statistiche dell'Università di Udine su specifici temi quali:

i) l'introduzione alla Statistica;

ii) le variabili statistiche e la costruzione del dato statistico attraverso un questionario;

iii) l'analisi dei dati e la sintesi statistica;

iv) la rappresentazione grafica dei risultati.

Dal punto di vista didattico, il metodo seguito è stato sostanzialmente quello del *learning by doing*: per tali lezioni sono stati predisposti specifici lucidi (consegnati prima della lezione) e degli esercizi da svolgere al calcolatore con il supporto del foglio elettronico, subito dopo la spiegazione teorica. Il materiale predisposto faceva comunque riferimento (per l'approfondimento autonomo degli studenti o dei docenti interessati) ad alcuni testi; in particolare, [73] per gli aspetti teorici, e [90] per gli aspetti più applicativi.

Entrando nel dettaglio degli argomenti trattati a lezione, la prima vera sfida è stata quella di catturare l'attenzione degli studenti, stimolando progressivamente l'interesse e rendendo esplicita l'utilità degli strumenti statistici. Sin da subito si è voluto adottare una visione critica, che evitasse di far ricadere l'opinione degli studenti su posizioni estreme, quale quella di un rifiuto completo delle "bugie statistiche", molto radicato in un certo retaggio culturale, oppure quella ravvisabile in una fede estrema nel dato statistico, una superficialità che può portare a cocenti delusioni come nel caso dei recenti fallimenti degli *exit poll* in ambito elettorale.

Dopo aver illustrato gli obiettivi del corso e la struttura delle lezioni, si è proposto un estratto da una striscia del Corriere dei Piccoli, pubblicata nel 1972, dal titolo "Yoghi e Bu Bu e la Statistica" e riportata nella Figura 9.1, (già circolata anni prima all'interno della Società Italiana di Statistica) come spunto interessante per l'iniziazione alla Statistica degli studenti delle scuole dell'obbligo. In tale fumetto vengono messi in evidenza in modo diretto alcuni punti essenziali per un'introduzione generale della Statistica ad un pubblico giovane e sostanzialmente privo di ogni conoscenza strutturata in materia.

Figura 9.1: Yoghi e Bu Bu e la Statistica, dal Corriere dei Piccoli del 1972.

Il discorso tra i due personaggi, che cercano di capire cos'è la Statistica, partendo dal rapporto tra questa e la Matematica, nella sua declinazione più elementare, giunge ad una conclusione legata al ben noto sonetto del Trilussa[1], ossia alle "bugie statistiche". Concetti analoghi si ritrovano negli aforismi attribuiti a Mark Twain e in alcune prese di posizione attribuite (alcuni sostengono dalla propaganda nazista) a Winston Churchill. In poche parole, si passa da una statistica per orsi a una statistica per polli. Questo passaggio nasconde uno dei punti fondamentali esplicitati nel corso: la Statistica esiste in quanto vi è una variabilità intrinseca nei dati, espressione quantitativa di un determinato fenomeno. Quindi una lettura dell'indice di posizione non accompagnata da quella dell'indice di variabilità può portare alla medesima conclusione a cui arrivò il poeta romano.

Ritornando alla striscia del Corriere dei Piccoli, il compito assegnato ai due orsi è la realizzazione di un censimento all'interno del loro parco: questo elemento narrativo ha permesso di passare dalla vi-

[1] Poesia "La statistica" di Carlo Alberto Salustri (Roma, 26 ottobre 1871 - Roma, 21 dicembre 1950), più conosciuto con lo pseudonimo di Trilussa, poeta italiano noto per le sue composizioni in dialetto romanesco.

sione *It's statistics, stupid!*, in linea con la visione del Trilussa, a quella *It's democracy, stupid!*. Tale visione va ben oltre l'interpretazione della Statistica intesa come disciplina di studio e sfocia nella Statistica Ufficiale pensata come elemento fondamentale della democrazia di una nazione o (come affermano taluni) come quarto potere indipendente con cui aggiornare il principio fondamentale dello Stato di Diritto del Montesquieu. Con questo punto di partenza, gli argomenti presentati nel corso, pur avendo spesso una valenza generale, sono stati principalmente trattati dal punto di vista della Statistica descrittiva, anche se non sono mancati riferimenti a quella inferenziale.

Nel dettaglio, il percorso è partito dalle definizioni di unità statistica, di popolazione, di variabile e modalità, illustrando la tipologia delle variabili (qualitative e quantitative), introducendo poi i concetti generali di deduzione e induzione e, quindi, quelli statistici di censimento e campionamento. Sono stati poi introdotti i concetti di misurazione e di rilevazione, affrontando dettagliatamente lo strumento fondamentale per il LIS, ossia il questionario. Si sono quindi presentati, con esempi concreti, la tipologia di domande (aperte, chiuse, filtro, a risposta singola o multipla, di controllo) e le metodologie di rilevazione (a tal proposito è stato proiettato un video dimostrativo di una indagine condotta con metodologia CATI, [2] a cui è seguita una breve visita al Laboratorio di interviste telefoniche dell'Ateneo) e infine si sono illustrate le fasi di una generica indagine basata su questionario.

Terminata la trattazione di questi argomenti, l'attenzione si è rivolta prima alla costruzione delle classi e alla definizione delle matrici dei dati e delle serie statistiche, poi all'analisi statistica dei dati, introducendo il concetto di frequenze e la loro rappresentazione grafica, e infine sia gli indici di posizione, sia quelli di variabilità. Come anticipato, ai concetti teorici è sempre seguito un esercizio riepilogativo svolto sul foglio di calcolo. A conclusione del corso, si sono introdotti i concetti bivariati di tabella a doppia entrata e di frequenze congiunte, utilizzando per l'esercizio le tabelle *pivot* del foglio di calcolo.

La rilevazione statistica e la valutazione dell'apprendimento

Come già detto nell'introduzione, il LIS era soprattutto incentrato su un'indagine statistica condotta presso le scuole superiori, che ha visto gli studenti leader nelle vesti dei rilevatori, coordinati dai docenti partecipanti al laboratorio. L'argomento del questionario è stato scelto ed ampiamente discusso con i docenti i quali, dopo una sorta di fase pilota sulla base di una prima bozza di questionario, hanno raccolto le indicazioni per un suo miglioramento provenienti dagli studenti leader: la versione definitiva del questionario è riportata nell'Appendice B.

[2] Il termine CATI (*Computer-Assisted Telephone Interviewing*) indica una modalità di rilevazione statistica realizzata attraverso interviste telefoniche

La scelta dell'argomento, che è ricaduta sulle prospettive post-diploma degli studenti, ha da subito riscontrato un certo interesse, sia da parte degli studenti stessi che dei loro docenti. Inoltre, è risultato subito evidente che il tema, nonostante i limiti della rilevazione, avrebbe avuto ricadute interessanti anche in ambito accademico, poiché riguardava sia l'orientamento in entrata sia l'efficacia della strategia di comunicazione messa in atto dall'Università. Infatti, seppure la rilevazione non abbia interessato tutte le scuole superiori friulane, va comunque segnalato che sono stati raccolti più di 1200 questionari validi.

Dal punto di vista strettamente operativo, dopo la raccolta dei dati, gli studenti hanno proceduto al *data entry* attraverso un foglio di calcolo la cui struttura è stata predisposta ex-ante dai docenti universitari in modo tale che, raccolti i diversi fogli di calcolo per ciascun istituto, fossero facilmente integrabili in un unico *data base*. Gli stessi docenti hanno provveduto ad una pulizia generale dei dati, individuando e risolvendo le eventuali incongruenze sfuggite ai diversi gruppi, e provvedendo a fare un'analisi generale con la predisposizione di una bozza di report finale. A questo punto gli studenti si sono visti ritornare i propri dati ripuliti, insieme alla bozza di report, da utilizzare come punto di partenza e come riferimento per le loro analisi. Il loro compito, distinti per gruppi, era quello di replicare l'analisi per la propria scuola e preparare una presentazione, con un struttura parzialmente concordata, da presentare a tutti gli altri studenti dell'istituto alla presenza dei docenti, compresi quelli universitari.

La presentazione, come anticipato, faceva parte integrante, insieme al test finale, della valutazione del livello di apprendimento raggiunto. Va sottolineato che gli studenti dovevano necessariamente presentare i risultati delle domande ritenute basilari in sede di progettazione dell'indagine, utilizzando accanto alle tabelle di frequenza gli strumenti grafici più adatti al tipo di domanda, mentre erano liberi di scegliere tra i risultati dei quesiti secondari ritenuti più interessanti. Infatti per problemi organizzativi delle varie scuole era richiesta una selezione dei risultati da proporre, dato che la loro presentazione poteva durare al massimo un'ora (si ricorda che la presentazione era aperta a tutti gli studenti, non solo a quelli leader). Infine, per quanto riguarda la valutazione delle nozioni teoriche apprese, è stata predisposta dai docenti universitari una batteria di test costituiti da dieci quesiti a risposta multipla (con tre possibili risposte) inerenti gli argomenti trattati a lezione. Dopo la correzione del test, la valutazione finale di ogni studente leader è stata decisa assieme ai docenti partecipanti al LIS, tenendo conto anche della valutazione della presentazione relativa al gruppo di appartenenza.

9.4 Conclusioni

Al termine di questa presentazione del LIS, si può affermare che il progetto è stato sicuramente apprezzato sia dai docenti sia dagli studenti, così come emerso dall'analisi dei questionari di valutazione dell'iniziativa. I risultati emersi da questa singola esperienza, per quanto riguarda i docenti delle scuole superiori, si allineano con quanto emerso in [4, pag. 7], poiché essi hanno visto il LIS come "un'occasione di formazione e aggiornamento importante, su questioni, tematiche e metodi altrimenti difficili da approcciare. Ma è stata soprattutto la possibilità di rivedere i propri modi di fare didattica a costituire l'elemento più rilevante e accattivante". Anche per gli studenti si è trattato di un momento importante, che ha permesso loro di acquisire competenze scientifiche fuori dal loro ambito usuale e di ottenere effetti immediati sulla loro carriera scolastica. Uno studente dell'Istituto "A. Malignani" di Udine ha presentato una relazione sull'attività svolta e sui risultati conseguiti nell'ambito del laboratorio durante la prova orale dell'Esame di Stato. Il LIS è stato anche selezionato come *best practice*, ossia come progetto replicabile ed esportabile in altre scuole, in particolare nei licei e negli istituti tecnici industriali, commerciali e ad indirizzo economico. Infine, pur nei suoi limiti, i risultati dell'indagine hanno permesso di capire come immaginano il loro futuro gli studenti delle ultime classi delle scuole superiori che hanno aderito al laboratorio, aspetto non ancora indagato su scala locale e, proprio per questo, l'indagine ha avuto anche una discreta risonanza sui mezzi di comunicazione regionali.

9.5 Calendario delle attività

- Riunione tra docenti universitari e docenti degli istituti che partecipano al laboratorio. Luogo: Università. Durata: 2 ore.
  Argomenti trattati: presentazione del Laboratorio di indagini statistiche, organizzazione dell'attività formativa e di supporto agli insegnanti, definizione dei contenuti, predisposizione del calendario delle lezioni e degli incontri, presentazione delle risorse informatiche.

- Lezione rivolta agli studenti leader e ai docenti delle scuole superiori. Luogo: Università.
  Durata: 2 ore.
  Argomenti trattati: introduzione alla Statistica.

- Lezione rivolta agli studenti leader e ai docenti delle scuole superiori.
  Luogo: Università.
  Durata: 2 ore.
  Argomenti trattati: le variabili statistiche.

- Riunione tra docenti universitari e docenti degli istituti che partecipano al laboratorio.
  Luogo: Università.
  Durata: 2 ore.
  Argomenti trattati: verifica del lavoro svolto fino a quel momento nei vari gruppi di docenti-studenti, predisposizione del

questionario sulla base delle proposte formulate dai gruppi, organizzazione della rilevazione e della raccolta dati, definizione della procedura di data-entry.

- Lezione rivolta agli studenti leader e ai docenti delle scuole superiori.
  Luogo: Università.
  Durata: 2 ore.
  Argomenti trattati: analisi dei dati e sintesi statistica.

- Lezione rivolta agli studenti leader e ai docenti delle scuole superiori.
  Luogo: Università.
  Durata: 2 ore.
  Argomenti trattati: rappresentazione grafica dei risultati.

- Riunione tra docenti universitari e docenti degli istituti che partecipano al laboratorio.
  Luogo: Università.
  Durata: 2 ore.
  Argomenti trattati: verifica del lavoro svolto nei vari gruppi di docenti-studenti, analisi dei dati raccolti sia in generale che per singolo istituto scolastico, definizione della presentazione dei risultati della rilevazione, modalità organizzative per la somministrazione agli studenti del test di valutazione.

- Attività presso le scuole, coordinate dai docenti degli istituti.
  Luogo: i singoli istituti.
  Durata: orari e modalità (curricolari e/o extra curricolari) diverse per i vari istituti.
  Argomenti trattati: approfondimenti dei temi trattati durante le lezioni universitarie e svolgimento degli esercizi, presentazione degli argomenti da parte degli studenti leader alle classi di appartenenza, definizione del questionario, somministrazione del questionario, data-entry, analisi dei dati, preparazione *slides* con i risultati, presentazione dei risultati alle classi, presentazione finale dei risultati dell'indagine.

- Presentazione dei risultati dell'indagine nelle scuole e test di valutazione.
  Luogo: i singoli istituti.
  Durata: 2 ore.
  Argomenti trattati: presentazione da parte degli studenti leader dei risultati dell'indagine alle classi quarte e quinte e ai docenti dell'istitu-to di appartenenza; somministrazione agli studenti leader del test per la verifica dell'apprendimento; valutazione (da parte dei docenti dell'istituto e universitari) dei risultati del test di valutazione e della presentazione dell'indagine.

9.6 Questionario

N. Ord. |_|_|_|
(non compilare)

IN COLLABORAZIONE CON IL DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE
DELL'UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

QUALI PROSPETTIVE DOPO LA MATURITÀ:
CONTINUO A STUDIARE O CERCO LAVORO?

LEGGI ATTENTAMENTE: Questo questionario serve per esprimere le tue opinioni, idee, perplessità e dubbi: fanne un buon uso! Nel rispetto della tua privacy, non ci sarà la possibilità di rintracciare il tuo nome, quindi ti chiediamo di rispondere alle domande nel modo più preciso possibile. Tutte le domande di questo questionario sono a riposta unica quindi, nel caso di indecisione, ricordati che devi sempre indicare la risposta principale, ossia quella che sintetizza meglio la tua situazione.

SEZIONE ANAGRAFICA

[A.1] Scuola:________________________ **[A.2] Indirizzo studi:**______________________________

[A.3] Classe frequentata: [1] IV [2] V

[A.4] Genere studente: [1] Maschio [2] Femmina

[A.5] Titolo di studio del padre:
[1] nessuno
[2] licenza elementare
[3] licenza media inferiore
[4] diploma superiori (2-3 anni)
[5] maturità o equivalente (4-5 anni)
[6] diploma universitario (2-3 anni)
[7] laurea e oltre (almeno 4 anni)
[99] non lo so

[A.6] Titolo di studio della madre:
[1] nessuno
[2] licenza elementare
[3] licenza media inferiore
[4] diploma superiori (2-3 anni)
[5] maturità o equivalente (4-5 anni)
[6] diploma universitario (2-3 anni)
[7] laurea e oltre (almeno 4 anni)
[99] non lo so

SEZIONE FILTRO
LEGGI ATTENTAMENTE: Sulla base della risposta che darai alla prossima domanda, compila solo la Sezione o le Sezioni segnalate a destra nella corrispondete riga della colonna FARE. Ogni inizio sezione è segnalato da una barra grigia.

[F.1] Hai già deciso cosa fare dopo la maturità? (una sola risposta)	**FARE**
[1] sì, inizierò subito a cercare lavoro o a lavorare	Sez. I
[2] sì, continuo gli studi iscrivendomi all'università	Sez. II
[3] sì, continuo gli studi seguendo corsi o *stage* formativi non universitari	Sez. III
[4] si, cercherò un lavoro (o lavorerò) e frequenterò un corso universitario	Sez. I+II
[5] si, cercherò un lavoro (o lavorerò) e frequenterò corsi o *stage* formativi non universitari	Sez. I+III
[6] no, ma escludo di andare a lavorare	Sez. II+III
[7] no, ma escludo di andare all'università	Sez. I+III
[8] no, ma escludo di frequentare stage o corsi formativi non universitari	Sez. I+II
[9] no, ci ho già pensato ma non ho ancora deciso	Sez. I+II+III
[99] no, non ci ho ancora pensato	Sez. I+II+III

1

SEZIONE I: LAVORO

[I.1] Perché vorresti subito lavorare o cercare lavoro dopo la maturità? (una sola risposta)
[1] per mia volontà di indipendenza dalla famiglia
[2] i miei genitori non possono mantenermi
[3] perché non mi piace studiare
[4] per applicare finalmente quello che ho già studiato
[5] per fare un'esperienza lavorativa
[6] perché ho già il lavoro garantito
[99] non so, non c'è una ragione precisa

[I.2] Attualmente, sai già di avere la possibilità di lavorare dopo la maturità? (una sola risposta)
[1] sì, in famiglia ho la possibilità di fare un lavoro attinente al mio percorso di studi
[2] sì, in famiglia ho la possibilità di fare un lavoro, ma <u>non</u> attinente al mio percorso di studi
[3] sì, attraverso conoscenti ho la possibilità di fare un lavoro attinente al mio percorso di studi
[4] sì, attraverso conoscenti ho la possibilità di fare un lavoro, ma <u>non</u> attinente al mio percorso di studi
[5] si, attraverso la scuola avrò la possibilità di fare un lavoro attinente al mio percorso di studi
[6] no, lo devo cercare
[99] non saprei rispondere

[I.3] Se devi cercare lavoro o se, pur avendo già una possibilità in tal senso, non la vuoi sfruttare che tipo di lavoro cercherai? (una sola risposta)
[1] uno relativo al mio percorso di studio
[2] uno che mi permetta di esercitare le mie competenze sportive e culturali
[3] anche uno che non sia relativo al mio percorso di studi purché interessante
[4] il primo che trovo, eventualmente dopo cambio
[5] uno che mi permetta di essere autonomo
[88] domanda non pertinente perché sfrutterò la possibilità che ho già segnalato nella [I.2]
[99] non saprei rispondere

[I.4] In via generale, che posto di lavoro preferiresti? (una sola risposta)
[1] dipendente, presso un'impresa privata
[2] dipendente, nel settore pubblico
[3] indipendente, in proprio (artigiano, studio professionale, ecc.)
[4] non ho preferenze
[99] non saprei rispondere

[I.5] Se potessi scegliere, che tipo di lavoro preferiresti? (una sola risposta)
[1] un posto che garantisca soprattutto la stabilità economica
[2] un posto che garantisca soprattutto la stabilità del luogo di lavoro
[3] un posto che offra possibilità di relazioni, cambiamenti e viaggi
[4] un posto che offra soprattutto la flessibilità di orario
[5] non ho preferenze
[99] non saprei rispondere

[I.6] Secondo te, a livello lavorativo, cosa è più importante? (una sola risposta)
[1] la soddisfazione personale
[2] la remunerazione economica
[3] un giusto equilibrio tra soddisfazione e remunerazione economica
[4] l'ambiente di lavoro e il rapporto con colleghi e datore di lavoro
[5] il prestigio sociale e la carriera
[6] il tempo libero che mi concede
[99] non saprei rispondere

(la Sezione I continua nella prossima pagina)

[I.7] Saresti disposto a spostarti per lavoro? (una sola risposta)
[1] sì, mi trasferirei anche all'estero
[2] sì, mi trasferirei ma solo in Italia
[3] sì, mi trasferirei ma solo nel nord-est d'Italia
[4] sì, ma solo se posso rientrare a casa la sera (pendolare)
[5] sì, ovunque, ma solo per periodi limitati di tempo
[6] no, voglio stare vicino a casa
[99] non saprei rispondere

[I.8] Accetteresti un contratto a tempo determinato? (una sola risposta)
[1] sì, lo accetterei comunque e indipendentemente dal tipo di lavoro
[2] sì, lo accetterei solo se questo implica un accrescimento delle mie competenze
[3] sì, lo accetterei solo se il tipo di lavoro fosse attinente ai miei interessi
[4] sì, lo accetterei solo se il lavoro fosse ben retribuito
[5] no, assolutamente
[99] non saprei rispondere

SEZIONE II: UNIVERSITÀ

[II.1] Quale tipo di percorso di studi universitari hai pensato di seguire? (una sola risposta)
[1] scientifico-tecnico
[2] medico-sanitario
[3] economico, statistico o giuridico
[4] umanistico o artistico
[99] non ho ancora deciso (*rispondi alla II.2 con "domanda non pertinente perché non ho ancora deciso"*)

[II.2] Se hai già deciso, perché pensi di scegliere questo percorso? (una sola risposta)
[1] per fare quello che ho sempre desiderato
[2] sulla base della scuola che sto frequentando
[3] su consiglio dei miei genitori
[4] su consiglio di amici e/o conoscenti
[5] perché garantisce maggiori sbocchi lavorativi
[88] domanda non pertinente perché non ho ancora deciso
[99] non lo so, non c'è una motivazione precisa

[II.3] Indipendentemente dalla scelta sul percorso degli studi, hai già deciso in quale Università provare ad entrare o iscriverti direttamente? (una sola risposta)
[1] sì, all'Università di Udine (con sedi in provincia di Udine, Pordenone, Gorizia e Mestre)
[2] sì, all'Università di Trieste (con sedi in provincia di Trieste, Pordenone e Gorizia)
[3] sì, in una Università del Veneto
[4] sì, in una Università italiana (escluse quelle di FVG e Veneto)
[5] sì, in una Università straniera
[6] no, ma voglio comunque restare in regione
[99] non lo so ancora

[II.4] Hai già le informazioni sufficienti per decidere la Facoltà e il Corso di Laurea da frequentare? (una sola risposta)
[1] sì, non ho bisogno di ulteriori informazioni perché ho già le idee chiare
[2] sì, ma sono molto confuso perché di informazioni ne ho anche troppe
[3] no, ho ancora informazioni insufficienti su diversi aspetti (didattici, organizzativi, sbocchi di lavoro)
[4] no, ho ancora informazioni insufficienti soprattutto agli aspetti didattici (corsi, carico di studio, docenti ..)
[5] no, ho ancora informazioni insufficienti soprattutto sugli sbocchi lavorativi
[6] no, ho ancora informazioni insufficienti soprattutto dal punto di vista organizzativo (sedi, alloggio, ecc.)
[99] non saprei rispondere perché non ho ancora riflettuto a fondo sull'argomento

(la Sezione II continua nella prossima pagina)

[II.5] Ad ogni modo, qual è la tua maggiore preoccupazione in vista della scelta della Facoltà? (una sola risposta)
[1] non sono sicuro di scegliere o di aver scelto quella più adatta per me
[2] non sono sicuro di scegliere o di aver scelto quella che garantisce maggiori sbocchi lavorativi
[3] temo che l'impegno richiesto possa essere troppo elevato per me
[4] ho paura di non riuscire a gestire e organizzare il tempo a mia disposizione
[5] non sono sicuro di avere una copertura economica sufficiente
[6] mi preoccupa l'idea di rapportarmi con un nuovo sistema didattico (professori, corsi, esami, ecc.)
[7] non ne ho, so che posso farcela!
[99] non saprei rispondere

[II.6] Cosa ti aspetti dalla formazione universitaria rispetto a quella delle superiori? (una sola risposta)
[1] maggiori possibilità di trovare un posto di lavoro con opportunità di carriera
[2] maggiori possibilità di trovare un posto di lavoro che mi permetta di esprimere le mie capacità
[3] maggiori possibilità di trovare un posto di lavoro ben retribuito
[4] l'acquisizione di una ben determinata forma mentale
[5] un sostanziale arricchimento culturale
[6] niente, mi basta avere il pezzo di carta
[99] non so

SEZIONE III: CORSI E STAGE FORMATIVI NON UNIVERSITARI

[III.1] Perche vorresti frequentare un corso non universitario? (una sola risposta)
[1] perché permette di trovare un posto di lavoro con più facilità
[2] perché permette di trovare un posto di lavoro meglio retribuito
[3] perché la preparazione che ho ricevuto è troppo teorica, ma poco pratica
[4] perché amplia il mio bagaglio personale di conoscenza rispetto ai miei interessi
[5] perché l'università è troppo lunga e difficile
[6] perché l'università non garantisce più maggiori sbocchi lavorativi
[7] per occupare il mio tempo mentre cerco un lavoro
[99] non lo so, non c'è una motivazione precisa

[III.2] Che tipo di corso o *stage* formativo non universitario vorresti seguire? (una sola risposta)
[1] uno comunque legato al percorso di studio fin qui seguito
[2] uno che tenga conto delle richieste del mercato del lavoro
[3] uno che sia in linea con i miei interessi
[4] uno consigliato da genitori, amici e conoscenti
[5] uno proposto dalla mia scuola superiore
[6] uno che sia la continuazione di un corso o *stage* già iniziato prima della maturità
[99] non lo so ancora

Ti ringraziamo per la tua gentile collaborazione.

Ci vediamo alla presentazione dei risultati.

4

Riferimenti bibliografici

[4] Anna Casaglia, Susanna De Luca, Simone Sarti (a cura di). *Studio prospettico dei laboratori di orientamento e formazione degli insegnati. Il Progetto Lauree Scientifiche nel vissuto dei docenti*. Milano: Istituto IARD Ricerche Politiche e Socioeconomiche, 2010.

[73] Luigi Pace, Alessandra Salvan. *Introduzione alla statistica. Statistica descrittiva*. Padova: CEDAM, 2000.

[90] Raffaella Piccarreta, Maura Mezzetti. *Statistica descrittiva. Esercizi risolti. Guida alla risoluzione con Excel*. Milano: EGEA, 2002.

[116] Gian Pietro Zaccomer. «Un'esperienza di integrazione della didattica universitaria della statistica con un'applicazione a dati economici reali: il progetto Movimprese». In: *Induzioni* 32 (2006), pp. 57–65.

REALTÀ E MODELLI

ELISA ELLERO, ANNA MARIA ORLANDI, ROSSANA VERMIGLIO

10.1 Introduzione

Tutte le attività del laboratorio *"La matematica c'è"* condividono il medesimo obiettivo di base: mettere in relazione la matematica con il mondo reale, per stimolare l'interesse degli studenti e favorire la comprensione dei concetti matematici attraverso un apprendimento attivo anche grazie al supporto del calcolatore. Tra le varie proposte, il laboratorio *"Realtà e modelli"* vuole evidenziare il ruolo chiave della matematica nella modellizzazione di fenomeni reali, puntando anche a sviluppare un'attitudine sperimentale verso la disciplina.

La matematica ha da sempre interagito con il mondo reale fornendo importanti strumenti per la risoluzione di problemi e per la descrizione di fenomeni: *"la matematica ci offre un linguaggio per interrogare la natura e la chiave per interpretarne le risposte"* [51]. Come costruzione della mente umana, essa si è sviluppata anche autonomamente, ma è indubbio che lo scambio reciproco di conoscenze sia stato proficuo: ha dato impulso alla definizione di nuovi strumenti matematici, ha portato alla formulazione di teorie ed ha permesso una migliore comprensione di molteplici aspetti del mondo reale. Il dialogo è stato ed è tuttora particolarmente stretto con la fisica. Queste due discipline si sono sviluppate assieme ed i metodi matematici sono intervenuti fin dal principio come strumenti costitutivi della fisica. Molte delle sue leggi infatti possono essere espresse in forma matematica e la matematica stessa si è rivelata incredibilmente efficace nella comprensione dei fenomeni fisici. Nel suo celebre articolo, il premio Nobel per la fisica E. P. Wigner (1902-1995) così riflette:*"Il miracolo dell'adeguatezza del linguaggio matematico per la formulazione della fisica rappresenta uno splendido dono che non ci siamo meritati e che non siamo in grado di comprendere. Dovremmo* [...] *sperare che ciò rimanga valido anche per il futuro, e che si estenda a sempre nuovi campi del sapere"* [114]. Nel corso degli anni lo sguardo si è così allargato ad altre discipline delle scienze della natura (biologia, chimica, geologia, astronomia,...) e delle scienze sociali e umane (demografia, sociologia, economia, politica,...). Perchè la matematica è diventata uno strumento privilegiato e potente per la conoscenza del mondo reale? La questione è antica, profonda ed è ancora dibattuta. Quando si parla di misurazioni e quindi di numeri è naturale rivolgersi alla matematica, che sa manipolare e trovare correlazioni tra i dati ed è in grado di proporre delle leggi che ne descrivano l'andamento. Ma c'è di più. Dalla varietà confusa dei diversi fenomeni, essa ne cerca gli aspetti *essenziali* e ne costruisce una rappresentazione semplificata nel suo linguaggio, il *modello matematico*, le cui leggi di funzionamento possono fornire una spiegazione della realtà e predirne l'evoluzione. J. von Neumann (1903-1957), uno dei più eminenti scienziati del '900, ha proposto la seguente definizione generale:*"Un modello matematico è, per l'appunto, la rappresentazione (o descrizione) di un fenomeno. Non* *si tratta di una semplice descrizione verbale. Il modello matematico è una descrizione che mette in luce determinati aspetti caratteristici di un fenomeno in termini formali: è la logica del processo che viene analizzata. Ed ecco il secondo punto. La descrizione che offre il modello non è infatti una descrizione contenutistica ma è una descrizione che utilizza il linguaggio formale e astratto per eccellenza, il linguaggio della matematica. Insistiamo su questa contrapposizione fra descrizione a parole o di contenuto e descrizione in linguaggio formale e quindi matematico."* [66].

Il modello matematico di un fenomeno (o problema) della vita reale è un processo di razionalizzazione che ha lo scopo di fornire una descrizione sintetica ed oggettiva. Il fenomeno può così essere esaminato, eventualmente controllato e si possono fare previsioni sulla sua evoluzione.

La matematica è l'arte del ragionamento deduttivo, la sua forza sta nella capacità di astrazione e di sintesi e nel suo potere predittivo.

La diffusione della modellistica matematica in diversi ambiti scientifici si deve anche all'affermarsi del calcolatore e allo sviluppo di *modelli numerici*, che traducono i modelli matematici in efficienti algoritmi da eseguire sul calcolatore. I modelli matematici e numerici sono quindi diventati gli strumenti attuali della ricerca in diverse aree della scienza. Le *simulazioni numeriche* permettono di sperimentare e testare i modelli, di indagare nuove idee e di predire la dinamica del fenomeno.

Prendendo spunto dalle considerazioni sopra esposte, è stato progettato un laboratorio basato sui modelli matematici descritti da *equazioni differenziali ordinarie*. L'obiettivo era quello di presentare il percorso di modellizzazione matematica, riflettendo allo stesso tempo sulla nozione di derivata di una funzione. Sono stati proposti dei modelli legati alla fisica e alla biologia, e per la loro analisi sono stati utilizzati sia strumenti matematici elementari noti agli studenti che i risultati delle simulazioni numeriche. Tale percorso offre anche un'occasione per un eventuale approfondimento sugli errori introdotti dal calcolatore nella rappresentazione dei numeri reali e nell'aritmetica di macchina.

Il laboratorio *"Realtà e modelli"* si è svolto sia nell'A.A. 2010-11 che nell'A.A. 2011-12 con un'analoga organizzazione, che prevedeva un seminario introduttivo presso la scuola in orario curriculare e due laboratori computazionali presso l'università in orario extracurriculare. Questi ultimi rispondevano anche alla richiesta degli insegnanti di misurarsi con il software matematico ed il calcolatore come supporti alla didattica. Nell'incontro iniziale veniva proposta una riflessione sul linguaggio matematico e sul metodo scientifico, che si completava con la descrizione e l'analisi di semplici modelli di crescita di una popolazione. Tali concetti venivano successivamente ripresi in classe dagli insegnanti. Nei laboratori computazionali, dopo una breve introduzione al Matlab, gli studenti potevano così iniziare ad operare attivamente simulando numericamente alcuni dei modelli proposti con dei codici sviluppati ad hoc. Il Matlab era stato scelto, perchè già presente nel laboratorio della scuola. In alternativa si sarebbe potuto un software open-source, per esempio GNU-Octave o altri linguaggi di programmazione. La valutazione degli studenti si è basata sul materiale prodotto in laboratorio.

Nella Sezione 10.3 viene presentata più diffusamente l'attività relativa all'A.A. 2010-11, che si è focalizzata sulla dinamiche di popolazioni e di coppia. Il simpatico ed accurato seminario *"Radioattività e datazione con il* ^{14}C*"* della prof.ssa Elisa Ellero, allora studentessa della Laurea Specialistica in Matematica, chiudeva il percorso. Nell'A.A. 2011-12 si è parlato più ampiamente delle equazioni differenziali nella fisica, con una particolare attenzione ai circuiti elettrici. Di tale attività nella Sezione 10.3 si accenna solamente al metodo delle analogie, che si basa sul fatto che uno stesso modello matematico può descrivere fenomeni di diversa natura. La sezione infine si conclude con la presentazione di un modello numerico per le equazioni differenziali: il metodo di Eulero.

A tale relazione hanno contribuito la prof.ssa Elisa Ellero per la Sezione 10.2 e la prof.ssa Anna Maria Orlandi per la Sezione 10.4. Per ulteriori approfondimenti e materiale si veda il sito `https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/`

10.2 Inquadramento storico

In questa sezione viene presentata una breve sintesi della storia delle equazioni differenziali ordinarie, tratta dal documento [52], che prende spunto dai libri [57, 20, 94, 96, 58], a cui il lettore può fare riferimento per eventuali approfondimenti.

I primi studi sulle equazioni differenziali risalgono alla seconda metà del XVII secolo, dopo la nascita del calcolo infinitesimale di Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). I diversi tentativi di risoluzione di problemi di fisica hanno portato gradualmente a modelli matematici basati su equazioni contenenti una funzione incognita e le sue derivate, chiamate *equazioni differenziali*. In particolare esse si dividono in *ordinarie* quando la funzione incognita dipende da una sola variabile e in *equazioni alle derivate parziali* quando la funzione incognita dipende da più di una variabile. Esse vengono classificate a seconda del loro *ordine*, cioé il massimo ordine di derivazione che vi compare. Lo scopo della teoria delle equazioni differenziali ordinarie di ordine k è la ricerca di soluzioni $u(t)$ definita in un intervallo I, cioé funzioni derivabili k volte in I che soddisfano l'equazione differenziale per ogni $t \in I$.

Secondo alcuni storici della matematica, lo studio delle equazioni differenziali iniziò nel 1675, quando Leibniz scrisse l'equazione $\int u\,du = (1/2)u^2$. La ricerca di metodi generali di risoluzione ebbe invece inizio quando Newton classificò le equazioni differenziali del primo ordine in tre classi e le risolse utilizzando le serie di funzioni. Nonostante Newton avesse osservato che questo tipo di equazioni ammettevano infinite soluzioni, solo alla fine del XVIII secolo si riuscì a dimostrare che la soluzione generale di un'equazione del prim'ordine dipende da una costante arbitraria. Assegnando un valore alla soluzione in un certo punto iniziale si definisce un problema a valori iniziali, per la cui dimostrazione di esistenza e unicità di una soluzione si dovrà attendere addirittura fino al XIX secolo.

Un'equazione differenziale ordinaria che ha cambiato per sempre il corso della storia della fisica è legata al secondo principio della dinamica, pubblicato da Newton nel 1687. Se consideriamo un punto materiale P di massa m in moto lungo una retta e fissiamo un sistema di riferimento in cui la posizione del punto P all'istante $t \geq 0$ sia rappresentata dall'ascissa $u(t)$, allora la sua velocità è per definizione $u'(t)$, mentre la sua accelerazione è data da $u''(t)$. Supponiamo che il punto materiale sia soggetto a una forza costante F, nella stessa direzione e nello stesso verso dell'asse u, allora il secondo principio della dinamica è espresso dalla seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$F = m \cdot u''(t) \Rightarrow u''(t) = \frac{F}{m}.$$

Integrando due volte si ottiene:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int \tfrac{F}{m} = \tfrac{F}{m} \cdot t + c_1, \\ u(t) &= \int \tfrac{F}{m} t + c_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{F}{m} \cdot t^2 + c_1 t + c_2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Le costanti c_1 e c_2 in (10.1) possono essere determinate fissando la posizione e la velocità del punto materiale P all'istante iniziale $t_0 = 0$, cioé risolvendo il seguente *problema ai valori iniziali* o *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} u''(t) = \frac{F}{m}, \ t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases} \tag{10.2}$$

La soluzione di (10.2) rappresenta la legge oraria del moto rettilineo uniforme:

$$u(t) = u_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} t^2, \ t \geq 0,$$

che "predice" la posizione futura del punto materiale P.

Dal punto di vista storico, uno dei primi problemi ad essere studiati consisteva nel determinare la natura di una curva che soddisfacesse una determinata condizione relativa alla tangente o alla normale in un suo punto, e che di conseguenza poteva essere risolto mediante un'equazione differenziale del primo ordine. A partire dal 1690, Leibniz e i fratelli Jakob I Bernoulli (1654-1705) e Johann I Bernoulli (1667-1748) pubblicarono moltissime soluzioni di problemi di grande attualità utilizzando le equazioni differenziali. Inizialmente applicate in ambito geometrico, esse vennero presto utilizzate in moltissime branche della scienza, quali la meccanica, l'ottica, l'astronomia e l'idrodinamica. I vari problemi studiati dai fondatori del calcolo infinitesimale e da molti matematici in epoche successive portarono allo sviluppo di numerose tipologie di equazioni differenziali; a partire dal 1690 vennero individuati alcuni metodi risolutivi adatti a risolvere particolari classi di equazioni. Ad esempio il metodo di sostituzione e di separazione delle variabili portarono alla soluzione delle equazioni omogenee, lineari del prim'ordine e di Bernoulli. Inoltre tra il Seicento e il Settecento le ricerche iniziarono ad assumere un carattere puramente analitico, allontandosi sempre più dall'ambito geometrico in cui erano state inizialmente sviluppate.

I diversi approcci degli esponenti della scuola newtoniana e leibniziana alla soluzione delle equazioni differenziali rimasero distinti fino al Settecento. I newtoniani privilegiarono l'utilizzo delle serie nel calcolo integrale; Newton stesso fornì una soluzione generale del problema dell'integrazione delle equazioni differenziali mediante le serie di potenze. Al contrario i leibniziani preferirono ricercare soluzioni in cui le funzioni incognite erano espresse per mezzo di un numero finito di operazioni algebriche tra funzioni elementari. Quando questo non era possibile ricorsero alla "integrazione per quadrature ", in cui le funzioni incognite erano espresse mediante un numero finito di integrali indefiniti.

Uno dei primi problemi affrontati fu quello proposto da Leibniz ai cartesiani nel settembre del 1687: esso consisteva nel determinare la natura della curva isocrona, lungo la quale un corpo soggetto al proprio peso discende uniformemente (mantenendo la componente verticale della velocità). Un mese dopo Huygens (1629-1695) *ne* presentò la soluzione, senza per*ò* dimostrarla. Nel 1689 Leibniz tornò ad affrontare il problema, verificando che la curva "parabolica quadrato-cubica" era proprio la soluzione cercata. Nel 1690 Jakob I Bernoulli fu il primo a pubblicare la formulazione e la trattazione analitica del problema utilizzando il formalismo di Leibniz, che consentiva di scrivere l'equazione in forma differenziale. Egli determinò la curva isocrona separando le variabili e poi uguagliando gli integrali di entrambi i membri dell'equazione (*"Ergo et horum integralia aequantur"*).

Nel 1694 i fratelli Bernoulli, dopo aver ricordato le molteplici regole da loro ideate per separare le variabili in particolari equazioni differenziali del primo ordine, osservarono acutamente che in un'equazione qualunque non si può sperare di trovare un metodo generale per separare le variabili. Se l'equazione non era a variabili separabili venivano inoltre utilizzate particolari sostituzioni per ricondursi alla separazione delle variabili e costruire le soluzioni.

Le menti dei più brillanti matematici del tempo si sfidarono nella risoluzione di numerosi altri problemi (tra cui per la loro importanza storica si ricordano la trattrice, la brachistocrona e l'isocrona paracentrica), gettando le basi per lo sviluppo della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

A partire dai primi studi sulle equazioni differenziali i leibniziani cercarono di determinare procedimenti risolutivi per specifiche classi di equazioni. Essi individuarono facilmente la sostituzione generale che consente la separazione delle variabili nel caso delle *equazioni differenziali omogenee* $u' = f(t, u)$, in cui f è una funzione omogenea di grado zero delle due variabili (t, u) e continua nel suo dominio. La pubblicazione del procedimento risolutivo delle equazioni omogenee risale tuttavia al 1714, con l'articolo di Manfredi (1681-1761).

Le soluzioni delle equazioni lineari del primo ordine $u'(t) = a(t) \cdot u(t) + b(t)$, (dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni continue) e delle cosiddette "equazioni di Bernoulli" (proposte da Jakob I Bernoulli nel 1695) furono pubblicate alla fine del XVII secolo. Nel 1696 Leibniz affermò di aver ricondotto l'equazione di Bernoulli a un'equazione differenziale lineare e di aver già comunicato agli amici il metodo generale di risoluzione, pertanto non ritenne necessario fornire ulteriori spiegazioni. Egli infatti nel novembre 1694 aveva riportato in una lettera a L'Hôpital una soluzione della generica equazione lineare *non omogenea* del primo ordine (cioé avente $b(t) \neq 0$ per qualche t). Le nozioni di soluzione generale e particolare divennero gradualmente più chiare nel corso del XVIII secolo, mentre la relativa terminologia continuava a variare da studioso a studioso. Nel 1694 Johann I Bernoulli dimostrò che un'equazione differenziale del primo ordine ammetteva infinite soluzioni.

Le nozioni di soluzione generale e particolare furono esplicitamente stabilite da Eulero nel 1743, che dimostrò che la soluzione di un'equazione ordinaria di ordine k dipende da k costanti arbitrarie e che le soluzioni particolari si ottengono assegnando alle costanti un valore fissato.

Nella prima metà del Settecento gli studi di molti matematici si concentrarono sull'equazione non lineare del primo ordine detta "equazione di Riccati ". In particolare essa fu studiata dai Bernoulli, da Jacopo Riccati (1676-1754) e da suo figlio Vincenzo (1707-1775). Altre ricerche sulle equazioni differenziali lineari di ordine superiore vennero pubblicate in numerosi studi di carattere fisico-matematico, ad esempio sulla vibrazione di corpi elastici, sulla conduzione di calore e sulla teoria del potenziale.

Eulero (1707-1783) fu uno degli scienziati che contribuì maggiormente all'elaborazione dei metodi per la soluzione delle equazioni differenziali; molti problemi presenti nei manuali moderni derivano dai suoi trattati: "Institutiones calculi differentialis"1755) e "Institutiones calculi differentialis " (1768-1770). L'uso di fattori di integrazione, i metodi per risolvere equazioni lineari di ordine superiore a coefficienti costanti e la distinzione tra equazioni lineari omogenee e non omogenee, tra soluzioni generali e particolari sono solo alcuni dei numerosi contributi di Eulero in questo campo.

Le più semplici equazioni differenziali lineari sono quelle omogenee a coefficienti costanti che, in alcuni casi particolari, furono risolte da Daniel Bernoulli nel 1739-1740 e da d'Alembert (1717-1783). La soluzione generale delle equazioni differenziali lineari omogenee di ordine k a coefficienti costanti fu pubblicata nel 1743 da Eulero. Nel 1747 d'Alembert conosceva già alcuni metodi generali per risolvere equazioni lineari complete. Eulero dimostrò inoltre che la soluzione generale di un'equazione lineare omogenea si ottiene come combinazione lineare di k soluzioni particolari (anche se oggi sappiamo che devono essere linearmente indipendenti, mentre egli non indicò esplicitamente questa condizione), inoltre ottenne l'espressione delle soluzioni particolari. Tra il 1750 e il 1751 Eulero pubblicò un metodo che permetteva di ricondurre il problema dell'integrazione di una equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti di ordine k all'integrazione di un'equazione di ordine $k-1$. Pertanto, iterando il procedimento, l'equazione di partenza si riduce*va* a un'equazione lineare non omogenea del primo ordine, la cui soluzione generale era stata determinata da Leibniz e Jakob I Bernoulli.

A partire dal 1760 sia d'Alembert sia Lagrange (1736-1813) gettarono le basi della teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti non costanti e, con metodi diversi, arrivarono alla loro risoluzione. Lagrange inventò inoltre il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, già intuito da Jakob I Bernoulli nel 1696 per la soluzione dell'equazione omonima. Esso permette di determinare una soluzione particolare di un'equazione non omogenea, nota la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Cauchy (1789-1857) fu il primo a riconoscere la necessità di dimostrare l'esistenza locale delle soluzioni per il problema ai valori iniziali. Per lo studio della dipendenza dai dati iniziali, invece, occorre attendere fino alla fine del XIX secolo. Nel 1868 Lipschitz (1832-1903) perfezionò le condizioni di esistenza di Cauchy, determinando la condizione che garantisce l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy. Meno di duecento anni dopo la nascita del calcolo infinitesimale la teoria delle equazioni differenziali ordinarie poteva considerarsi completa.

10.3 Descrizione

L'attività con gli studenti ha avuto inizio con un primo incontro tenutosi presso la scuola e rivolto ad intere classi. Il seminario proponeva una riflessione sull'importanza del linguaggio matematico e sul metodo scientifico, prendendo spunto dalla celebre frase di Galileo *"...La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola...* [Il saggiatore (1623)]. A Galileo si deve la definizione moderna di metodo scientifico, anche se le idee su cui si fonda sono andate evolvendo fin dall'antichità (Egizi, Greci) con importanti contributi nel Medioevo e di Leonardo da Vinci nel Rinascimento. I rapidi cenni sullo sviluppo storico del metodo scientifico e le considerazioni sull'osservazione sperimentale, sulla formulazione di teorie, sul metodo induttivo e deduttivo hanno permesso inoltre di tracciare un collegamento con il programma di filosofia. Il percorso di conoscenza di un fenomeno si fonda sul continuo dialogo tra teoria ed esperimento. Uno dei punti cardine è la riproducibilità degli esperimenti. Ma non sempre è possibile ripetere e riprodurre speri-

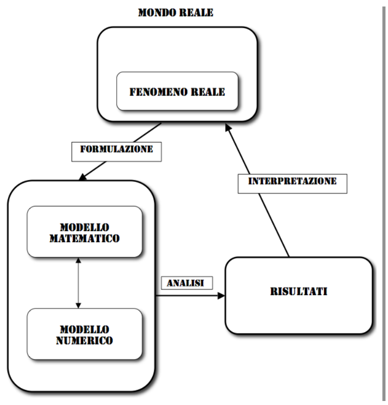


Figura 10.1: Mondo reale, modello matematico e modello numerico

mentalmente il fenomeno da studiare. L'analisi numerica consente la risoluzione di equazioni matematiche attraverso algoritmi e l'uso del calcolatore. Ecco allora che in diversi ambiti scientifici le simulazioni numeriche sono diventate uno strumento essenziale per testare la validità di teorie e per predire il comportamento futuro del fenomeno studiato. Lo sviluppo delle tecnologie e degli algoritmi dell'analisi numerica ha permesso inoltre di trattare fenomeni sempre più complessi.

Rafforzati nella convinzione che gli strumenti della matematica possono contribuire alla descrizione e all'analisi della realtà, la presentazione procedeva con l'indicazione dei passi fondamentali del processo di modellizzazione e la definizione dei concetti-chiave. Il *mondo reale* è un particolare settore delle scienze ed un *fenomeno* è un suo particolare aspetto. La formulazione del *modello matematico* è una rappresentazione semplificata del fenomeno. La complessità della realtà richiede infatti l'introduzione di *ipotesi semplificatrici*, che definiscono i limiti e l'attendibilità del modello. Gli aspetti essenziali del fenomeno sono descritti dalle *variabili di stato* e la loro dinamica nel tempo richiede la definizione di una *legge di evoluzione*. Al fine di prevederne l'andamento, le proprietà del modello devono essere analizzate con gli strumenti dell'analisi matematica e numerica. Lo sviluppo di un *modello numerico* per la risoluzione mediante il calcolatore del modello matematico è estremamente importante per trattare problemi difficili e complessi. I risultati ottenuti dalle *simulazioni numeriche* devono infine essere interpretati nel contesto del problema originario (figura 10.1). Ogni passo compiuto introduce delle semplificazioni e quindi degli errori. Anche il calcolatore, dovendo operare in aritmetica finita, introdurrà errori nella rappresentazione dei numeri reali e nelle operazioni. Compito del matematico è controllare tutti questi errori, in modo da garantire che la soluzione calcolata fornisca una rappresentazione sufficientemente accurata del fenomeno da cui si è partiti. La presentazione del percorso dal fenomeno reale alla simulazione numerica è stata accompagnata da alcuni semplici esempi scelti tra le conoscenze pregresse degli studenti in fisica e si è completata con la descrizione di modelli di crescita di una popolazione. Nei primo laboratorio computazionale sono stati studiati i modelli di crescita di una popolazione sia con i metodi dell'analisi matematica che con l'analisi dei risultati delle simulazione numeriche. I modelli di competizione e di dinamica di coppia sono stati oggetto di studio del secondo laboratorio. Essi propongono il passaggio da un'unica equazione differenziale ad un sistema di equazioni e, per sottolineare che il modello numerico diventa uno strumento essenziale quando il modello matematico cresce di complessità, sono state usate principalmente le simulazione numeriche. Gli studenti hanno potuto scoprire l'esistenza di soluzioni periodiche nei modelli preda-predatore e di costruire e personalizzare un modello di coppia.

Modelli di crescita di una popolazione

Modello di Malthus

Malthus (1766 -1834) era uno studioso inglese di economia politica e demografia, che propose un semplice modello per lo studio della dinamica di una popolazione in un ambiente con *risorse illimitate*. Questa assunzione rap-presenta una semplificazione della realtà: tale modello considera trascurabile la questione della disponibilità delle risorse e quindi può essere appropriato in una fase iniziale di sviluppo, quando la popolazione non risente di tali vincoli.

La popolazione oggetto di studio viene rappresentata dalla sua numerosità $u(t) \geq 0$ all'istante di tempo $t \in \mathbb{R}$ (*variabile di stato*). Per descrivere il comportamento della popolazione al variare del tempo, ovvero la sua dinamica, abbiamo bisogno di definire una *legge* che descriva con il linguaggio matematico la variazione di $u(t)$ del tempo. Tale cambiamento è dovuto ai nuovi nati e ai morti, che assumiamo essere proporzionali alla popolazione. Indicati con $n > 0$ ed $m > 0$ rispettivamente i tassi di natalità e mortalità della popolazione nell'unità di tempo, abbiamo che:

$$u(t+\Delta t) = u(t) + n\Delta t u(t) - m\Delta t u(t), \quad \Delta t > 0,$$

da cui

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = ru(t),$$

dove $r = n - m$ è il *tasso di riproduzione*. Ricordando la definizione di derivata di una funzione

$$\lim_{t \to 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = u'(t)$$

si ottiene

$$u'(t) = ru(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10.3}$$

che afferma che la variazione istantanea $u'(t)$ della funzione al tempo t è proporzionale alla popolazione $u(t)$ secondo il tasso di riproduzione r. La relazione (10.3) rappresenta un'*equazione differenziale* *ordinaria del primo ordine* mentre la funzione $f(u) = ru$ è la legge di evoluzione della popolazione.

Risolvere l'equazione significa trovare quelle funzioni $u(t)$, chiamate *soluzioni*, che soddisfano (10.3). Con la tecnica della separazione delle variabili [57], si trova che la generica soluzione risulta

$$u(t) = ce^{rt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria (esercizio). Assegnando un valore $u_0 \geq 0$ alla popolazione all'istante iniziale $t_0 = 0$, si ottiene che $c = u_0$ e quindi la soluzione del *problema a valori iniziali*

$$\begin{cases} u(t) = ce^{rt} \ t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{10.4}$$

risulta univocamente determinata. Nel caso $u_0 = 0$ la soluzione risulta $u(t) = 0, t \geq 0$. Essa rappresenta una *soluzione stazionaria* o di *equilibrio* che chiamiamo *banale* perchè corrisponde alla popolazione nulla. Quando $u_0 > 0$ possiamo predire il comportamento nel tempo della popolazione per $t > t_0$: se $r < 0$ la popolazione continua a decrescere ed è destinata all'estinzione in un tempo infinito, se $r > 0$ la popolazione continua ad aumentare, mentre rimane costante per $r = 0$ (esercizio). In questo caso avevamo la formula esplicita per le soluzioni. Vediamo ora come alcune informazioni qualitative sulla dinamica della popolazione possono essere dedotte dallo studio della funzione $f(u) = ru$ per $u \geq 0$, senza risolvere esplicitamente l'equazione, sapendo che il problema a valori iniziali ha unica soluzione. La funzione f è una retta tale che $f(u^*) = 0$ solo per $u^* = 0$. L'equazione ha quindi un unico equilibrio banale. Inoltre, dato $u > 0$, ci aspettiamo una decrescita della popolazione se $r < 0$, perchè la derivata risulta sempre negativa, ed una crescita se $r > 0$, perchè la derivata risulta positiva (esercizio). Si veda la figura 10.2. Concludiamo osservando che la formulazione del modello (10.3) ha permesso di sottolineare diversi aspetti importanti: l'individuazione della quantità essenziale che descrive il fenomeno in oggetto, l'introduzione delle ipotesi semplificatrici che limitano la validità del modello, la formulazione della legge che descrive la dinamica, la riflessione sulla nozione di derivata, l'introduzione di nuovi concetti matematici e di tecniche risolutive per le equazioni differenziali.

Modello di Verhulst

Dopo aver letto del modello di crescita di una popolazione di Malthus, il matematico Pierre F. Verhulst (1804-1849) ne propose un miglioramento per descrivere le auto-limitazioni alla crescita dovute a risorse limitate:

$$u'(t) = ru(t)(1 - \tfrac{u(t)}{k}) = ru(t) - cu(t)^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10.5}$$

dove $r > 0$ rappresenta il tasso di riproduzione e $k > 0$ la *capacità*. Il parametro $c = \frac{r}{k} > 0$ descrive la *competizione interna* alla popolazione. L'equazione differenziale del primo ordine (10.5) viene ricordata

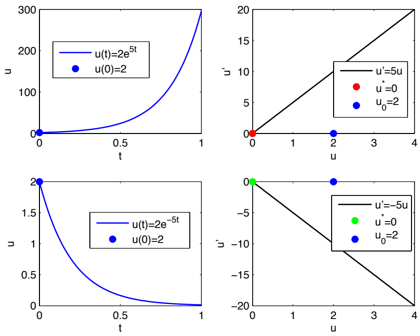


Figura 10.2: Sopra: soluzione di (10.4) con $u_0 = 2$ (sinistra) e grafico della relativa legge di evoluzione (destra) con $r = 5$. Sotto: soluzione di (10.4) con $u_0 = 2$ (sinistra) e grafico della relativa legge di evoluzione (destra) con $r = -5$.

anche come *equazione logistica* o *modello di Verhulst-Pearl*, dopo che fu riproposta da Ray Pearl. Come cambia la dinamica di (10.5) rispetto a (10.3)? Assegnato il valore iniziale u_0 all'istante l'istante iniziale $t_0 = 0$, si trova che l'unica soluzione del problema a valori iniziali associato (10.5) è data da

$$u(t) = \frac{ku_0e^{rt}}{k - u_0(e^{rt} - 1)} = \frac{k}{1 + k_0e^{-rt}}, \quad t \geq 0, \tag{10.6}$$

dove $k_0 = \frac{k-u_0}{u_0}$ (esercizio). Anche in questo caso abbiamo una formula esplicita per le soluzioni ed quindi possibile predire il comportamento della popolazione, studiando le funzioni (10.6) con i metodi dell'analisi matematica. In generale non sempre ciò è possibile. Proviamo ad analizzare la dinamica del modello, studiando la parabola $f(u) = ru(1 - \frac{u}{k})$ che descrive la legge di evoluzione di (10.5). Risolvendo $f(u) = 0$, si trova che esistono due soluzioni stazionarie $u_1^* = 0$ e $u_2^* = k > 0$. La seconda risulta non banale ed è pertanto interessante studiare cosa succede quando u_0 si discosta da tale valore di equilibrio. Disegnando il grafico della parabola $f(u)$ si osserva che $f(u) > 0, u \in (0,k)$ mentre $f(u) < 0, u > k$. Ricordando il significato di derivata, possiamo concludere che per valori iniziali u_0 tali che $0 < u_0 < k$, $u(t)$ cresce con t e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = k$, mentre per valori iniziali u_0 tali che $u_0 > k$, $u(t)$ decresce con t e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = k$ (esercizio). Si veda la figura 10.3.

Inoltre possiamo osservare che quando una soluzione attraversa la retta costante $u = \frac{k}{2}$ (la retta tratteggiata in figura 10.3) c'è un punto di flesso; questo accade solo per $0 < u_0 < \frac{k}{2}$ (esercizio).

Il laboratorio includeva anche la presentazione del modello di crescita logistica di una popolazione con migrazione:

$$u'(t) = ru(t)(1 - \tfrac{u(t)}{k}) - du(t), \quad t \geq 0, \tag{10.7}$$

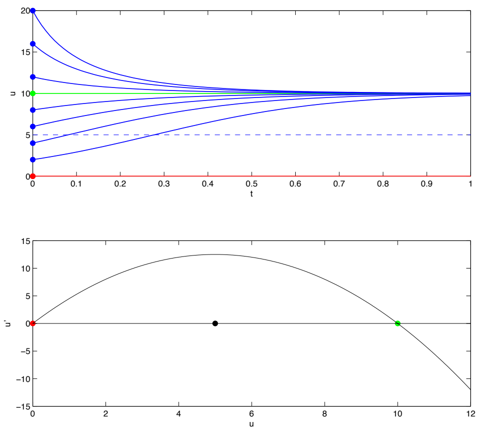


Figura 10.3: Soluzioni dell'equazione logistica (10.5) (sopra) e grafico della relativa legge di evoluzione (sotto) con $r = 5, k = 10$.

dove d descrive il tasso di migrazione della popolazione, e del modello di crescita logistica di una popolazione con un prelievo p costante nel tempo (es. pesca o caccia):

$$u'(t) = ru(t)(1 - \tfrac{u(t)}{k}) - p, \quad t \geq 0. \tag{10.8}$$

Nel primo laboratorio computazionale, agli studenti è stato chiesto di prevedere il comportamento qualitativo delle soluzioni studiando le leggi di evoluzione f di (10.7) e (10.8) e di confrontare le loro previsioni con i risultati delle simulazioni numeriche. Avevano a disposizione dei codici scritti in Matlab, che permettevano di cambiare i valori iniziali ed i parametri del modello. I codici producevano anche i grafici delle soluzioni e gli studenti avevano un riscontro sperimentale delle loro conclusioni (figura 10.4 e figura 10.5). Gli esercizi chiedevano di calcolare, quando esistevano, gli equilibri; studiare le loro proprietà di stabilità variando il punto iniziale; valutare la presenza di punti di flesso nelle soluzioni; studiare la dinamica variando i parametri del modello.

Infine per descrivere una crescita che risulta difficile quando gli individui sono pochi, è più rapida quando gli individui aumentano (*effetto branco*) e rallenta quando si supera una certa soglia, è stato proposto anche lo studio del modello

$$u'(t) = ru^2(t)(1 - \tfrac{u(t)}{k}), \quad t \geq 0,$$

con l'analisi qualitativa e attraverso le simulazioni numeriche (esercizio).

L'equazione logistica di base e le sue varianti trovano applicazione anche in altri ambiti (*adattabilità* del modello). Per esempio, in economia $u(t)$ può rappresentare il capitale al tempo t, r il tasso di

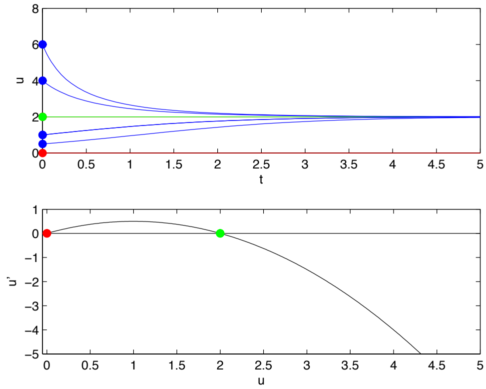


Figura 10.4: Soluzioni dell'equazione logistica con migrazione (10.7) (sopra) e grafico della relativa legge di evoluzione (sotto) con $r = 5, k = 10, d = 4$.

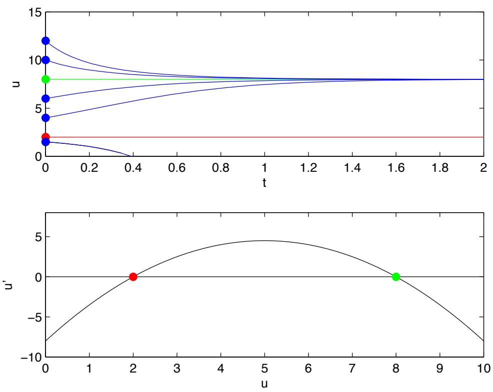


Figura 10.5: Soluzioni dell'equazione logistica con prelievo (10.8) (sopra) e grafico della relativa legge di evoluzione (sotto) con $r = 5, k = 10, p = 8$ $(kr > 4p)$.

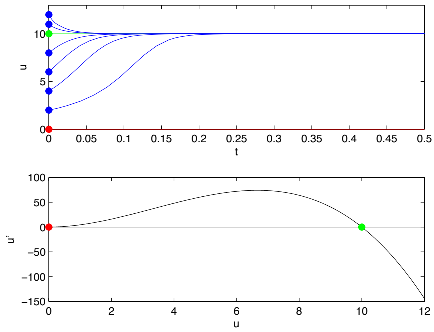


Figura 10.6: Soluzioni dell'equazione logistica con effetto branco (sopra) e grafico della relativa legge di evoluzione (sotto) con $r = 5, k = 10$.

rendimento del capitale e k la capacità massima del mercato. Tali modelli sono stati anche usati per studiare la diffusione delle innovazioni tecnologiche nelle fattorie americane negli anni 1930-1960, assumendo che la funzione $u(t)$ fosse il numero degli agricoltori che avevano adottato la nuova tecnologia e che un agricoltore fosse indotto al cambiamento da quelli che già usavano la nuova tecnologia [21].

Modelli di competizione tra due popolazioni

In genere una popolazione non vive in isolamento e può incontrare degli antagonisti. I modelli *predatore-preda* furono proposti ed analizzati dal matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) e dallo statistico americano Alfred Lotka (1880-1949) per descrivere la *competizione esterna* tra due popolazioni. Per questo motivo sono anche chiamati modelli di *Lotka-Volterra*.

Indicate con $u_1(t)$ e $u_2(t)$ rispettivamente la numerosità delle prede e dei predatori all'istante t, il più semplice modello per descrivere l'*interazione* tra le due specie è

$$\begin{cases} u_1'(t) = r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t), \\ u_2'(t) = -r_2 u_2(t) + c_{21} u_1(t) u_2(t), \end{cases} \tag{10.9}$$

dove r_1, r_2, c_{12}, c_{21} sono parametri positivi. Tali assunzioni descrivono la seguente situazione: la preda in assenza del predatore trova il suo sostentamento e si sviluppa, al contrario il predatore in assenza della preda è desti-nato all'estinzione. Inoltre l'effetto dell'interazione predatore-preda porta ad una decrescita della preda e un beneficio al predatore, che deve quindi la sua sopravvivenza alla presenza della preda.

Con gli strumenti dell'analisi matematica, gli studenti possono determinare i due equilibri di (10.9): $(0,0)$ e $(\frac{r_2}{c_{21}}, \frac{r_1}{c_{12}})$ che rappresentano due punti nel piano di coordinate u_1 e u_2 (*piano delle fasi*) (eser-

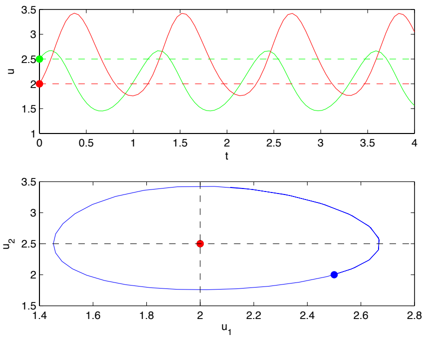


Figura 10.7: Soluzioni u_1 (preda in verde) e u_2 (predatore in rosso) di (10.9) (sopra) orbita e punto di equilibrio nel piano delle fasi (sotto) con $r_1 = 5, r_2 = 6, c_{12} = 2, c_{21} = 3$

cizio). Tracciando nel piano le rette di equazioni $u_1 = \frac{r_2}{c_{21}}$ e $u_2 = \frac{r_1}{c_{12}}$, si possono studiare il segno delle derivate delle due funzioni e dedurre alcune considerazioni qualitative sul comportamento delle soluzioni (esercizio). Assegnando i valori iniziali $u_1(0) = u_{1,0}, u_2(0) = u_{2,0}$ all'istante iniziale $t_0 = 0$, gli studenti ottengono dalle simulazioni numeriche i due grafici delle soluzioni $u_1(t), u_2(t)$ per $t \geq 0$ (*traiettorie*) e le relative *orbite* $(u_1(t), u_2(t))$ per $t \geq 0$ nel piano delle fasi (figura 10.7). Possono così apprezzare l'esistenza di soluzioni periodiche, che corrispondono alle orbite chiuse, ed il fatto che la dinamica si conserva variando i parametri del modello. Con gli strumenti dell'analisi matematica si possono anche determinare i valori medi $\int_0^T u_1(s)ds, \int_0^T u_2(s)ds$ con $T > 0$ uguale al periodo e dimostrare che le coordinate dell' equilibrio non banale (esercizio).

Gli studenti avevano inoltre a disposizione i codici per simulare numericamente anche la dinamica del modello con prelievo

$$\begin{cases} u_1'(t) &= r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) - d u_1(t), \\ u_2'(t) &= -r_2 u_2(t) + c_{21} u_1(t) u_2(t) - d u_2(t), \end{cases} \tag{10.10}$$

con $d > 0$.

Negli anni Venti, Volterra propose i modelli (10.9) e (10.10) per risolvere un problema“reale”che il genero Umberto D'Ancona, biologo all'Università di Siena, gli aveva sottoposto. Le statistiche relative alla pesca nell'Adriatico settentrionale indicavano che, durante il periodo 1905-1923, la percentuale dei pesci grandi (= predatori) nel pesce pescato era aumentata negli anni della guerra e in quelli immediatamente successivi, in cui c'era stata una riduzione dell'attività di pesca (=prelievo). Perchè l'incremento riguardava solo i predatori e non le prede? Analizzando i modelli, Volterra riuscì a spiegare in maniera esauriente questo fatto empirico (esercizio).

La fortuna dei modelli predatore-preda nasce dal fatto che si adattano bene alla descrizione di dinamiche di competizione tra popolazioni in diversi contesti applicativi - basti pensare all'uso dei pesticidi in agricoltura, alle tensioni fra classi sociali in politica e ai rapporti tra risorse e consumatori in ecologia. Altri modelli sono stati proposti per considerare anche gli effetti della competizione all'interno dei due gruppi di prede e predatori a causa di risorse limitate. Tali modelli più complessi possono essere agevolmente trattati in laboratorio proponendo agli studenti di modificare i codici forniti. In https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/ sono proposti ulteriori modelli matematici con i relativi i codici per la simulazione numerica, quali, per esempio, il modello di epidemia proposto nel 1927 dai biomatematici A. G. McKendrick (1876-1943) e W.O. Kermak (1898-1970). Nonostante la sua semplicità, si è rivelato utile nella descrizione della diffusione di epidemie, quali la peste di Bombay nel 1905, e rappresenta un primo importante contributo nello studio dei modelli di epidemie.

Dinamica di coppia

L'idea di proporre un modello per lo studio della dinamica di coppia è stata ispirata dal lavoro di S. H. Strogatz [104]. In tale articolo l'autore analizza il rapporto amoroso di Romeo e Giulietta e sottolinea come il tema, catturando l'attenzione degli studenti, stimoli il loro interesse nei confronti della matematica. La passione d'amore di Laura e Petrarca è stata più recentemente esaminata da S. Rinaldi [92].

Per costruire un modello minimale che descriva la dinamica nel tempo dell'affetto in una coppia, si è assunto che:

- l'intensità dell'affetto di un individuo verso l'altro sia rappresentato da un'unica variabile (anche se l'amore è costituito da molteplici sentimenti difficilmente descrivibili da un'unica quantità);
- il modello descriva solo l'interazione dei due individui della coppia (in realtà la dinamica dell'amore in una coppia e delle emozioni di una persona risente anche della sua vita sociale);
- le personalità dei due individui non varino nel tempo (quindi il modello è adatto a valutare la dinamica sui brevi periodi).

All'interno della coppia vengono considerati i tre fenomeni:

- la *dimenticanza*, che descrive il disinteresse verso il partner;
- il *rinnovo*, che aumenta con l'amore del partner;
- l'*istinto*, che rende sensibile al *fascino* del partner.

Le variabili di stato sono $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e descrivono l'intensità dell'amore dell'individuo 1 e individuo 2 verso il partner all'istante t, con l'assunzione che valori positivi indichino *affetto*, valori nulli *indifferenza* e valori negativi *disamore*. La personalità è descritta da quattro parametri *costanti e positivi*: il fascino F_i, il tasso di dimenticanza a_i, il tasso di reattività b_i all'affetto del partner ed i tassi di reattività c_i al fascino del partner. Con queste ipotesi possiamo formulare il seguente modello:

$$\begin{cases} u_1'(t) = -a_1 u_1(t) + b_1 u_2(t) + c_1 F_2, \\ u_2'(t) = -a_2 u_2(t) + b_2 u_1(t) + c_2 F_1. \end{cases} \tag{10.11}$$

I termini $-a_i u_i, i = 1, 2$, in (10.13) descrivono l'effetto della dimenticanza: in assenza del partner il sentimento si spegne (si veda 10.3). La reazione dell'individuo i all'affetto (rinnovo) e al fascino del partner j, con $i \neq j$ è descritta rispettivamente dai termini $b_i u_j$ e $c_i F_j$ in (10.13). Utilizzando i codici forniti, che calcolavano le soluzioni e ne disegnavano il grafico e le relative orbite, gli studenti hanno potuto studiare la dinamica del modello (10.13), variandone la situazione iniziale e i parametri. Hanno potuto inoltre valutare l'esistenza o meno di situazioni di equilibrio, la solidità della relazione nel tempo o se la coppia trae vantaggio da un incremento del fascino (esercizio). Per tener conto del fatto che la reazione di un individuo all'affetto del partner è limitata, è stato proposto di considerare le seguenti funzioni di rinnovo:

$$R_i(u) = b_i \frac{u}{1 + |u|} \qquad i = 1, 2. \tag{10.12}$$

Dopo aver studiato la funzione (10.12) e disegnato il grafico (esercizio), agli studenti è stato chiesto di fornirne un'interpretazione nel contesto della coppia e di simulare la dinamica del nuovo modello

$$\begin{cases} u_1'(t) = -a_1 u_1(t) + R_1(u_2(t)) + c_1 F_2, \\ u_2'(t) = -a_2 u_2(t) + R_2(u_1(t)) + c_2 F_1, \end{cases} \tag{10.13}$$

assegnando i valori iniziali e variando i parametri del modello (esercizio). Hanno potuto poi proporre altre funzioni $R_i(u)$ per meglio descrivere la reazione. Infine modificano i codici, hanno potuto considerare anche il caso del fascino che dipende dal tempo, definendo opportune funzioni $F_i(t)$. Attraverso l'interpretazione dei risultati numerici, andavano via via perfezionando il loro modello per meglio rispondere alla situazione reale che volevano descrivere.

Il metodo della analogie

Nell'A.A. 2011-12 il laboratorio si è concentrato soprattutto sui modelli descritti da equazioni differenziali in fisica, con una particolare attenzione ai sistemi meccanici ed ai circuiti `https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/`. Come più volte ricordato, un aspetto importante della modellizzazione consiste nell'adattabilità di un modello a descrivere fenomeni di diversa natura. Su tale osservazione si basa il *metodo della analogie* (figura 10.8). Confrontando tra loro le equazioni differenziali della meccanica e dei circuiti in figura 10.8, è stata costruita la tabella di corrispondenze in figura 10.9 dove la massa m corrisponde all'induttanza L, la costante elastica k all'inverso della capacità, l'attrito β alla resistenza R, la forza $f(t)$ applicata all'oscillatore meccanico corrisponde la f.e.m. $f(t)$ applicata al circuito elettrico. È quindi possibile studiare un sistema meccanico in termini di

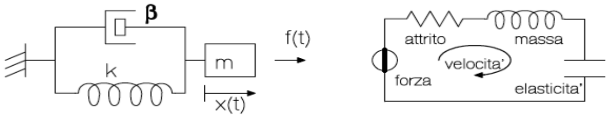


Figura 10.8: Sistemi meccanici e circuiti elettrici

forza	tensione	induttanza	massa
velocità	corrente elettrica	attrito	resistenza elettrica
spostamento	carica elettrica	capacità elettrica	elasticità

Figura 10.9: Tabella di corrispondenze sistemi meccanici e circuiti

temperatura	tensione	resistenza termica	resistenza elettrica
potenza termica dQ/dt	corrente elettrica	capacità termica	capacità elettrica
quantità di calore Q	carica elettrica		

Figura 10.10: Tabella corrispondenze sistemi termici e circuiti

un *circuito elettrico equivalente*. Nel caso dell'oscillatore armonico il circuito equivalente è il circuito RLC in serie. Il metodo delle analogie è usato anche per studiare *i sistemi termici* in termini di circuiti equivalenti. Si tratta, naturalmente, di sistemi termici schematizzati in termini di elementi concentrati e quindi descritti da equazioni differenziali ordinarie. In questo caso l'analogia usata più spesso è descritta nella tabella in figura 10.10, dove si nota l'assenza di elementi induttivi, in accordo con la forma delle equazioni che descrivono i fenomeni termici ll metodo delle analogie trova impieghi importanti anche nello studio dei *sistemi elettromeccanici*, che comprendono una parte costituita da elementi elettrici e una da elementi meccanici, accoppiate fra loro in modo trasferimento di segnali dall'una parte all'altra. Questo è il caso, per esempio, di microfoni, altoparlanti e sensori di vibrazioni.

Modello numerico

Un'*equazione differenziale ordinaria del primo ordine* è una relazione tra la funzione incognita $u(t) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e la sua derivata $u'(t)$, che può essere in generale descritta dalla relazione:

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \tag{10.14}$$

dove $f : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione che descrive la legge di evoluzione. Sotto opportune ipotesi sulla funzione f, è possibile dimostrare che esiste ed è unica la soluzione del problema a valori iniziali

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{10.15}$$

Quando ci sono più equazioni si parla di *sistema* di equazioni differenziali del primo ordine. Un'equazione differenziale di ordine k, che coinvolge le derivate della funzione fino all'ordine k, può essere sempre ricondotta ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. I sistemi di equazioni differenziali ordinarie sono uno degli strumenti matematici più importanti nella descrizione della dinamica di fenomeni reali. In generale è difficile ottenere una formula esplicita per la soluzione del problema a valori iniziali (10.15): abbiamo quindi bisogno di metodi numerici per l'approssimazione delle soluzioni che possono essere implementati sul calcolatore. Il metodo di Eulero fornisce un primo semplice esempio di *modello numerico*. Suddividiamo $[t_0, t_f]$ in N sotto-intervalli $[t_n, t_{n+1}]$ di ampiezza costante $h = \frac{t_f - t_0}{N}$:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_f, \quad t_{n+1} = t_n + h, \; n = 0, 1, \ldots, N.$$

Da

$$u'(t_0) = f(t_0, u_0) \approx \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}$$

otteniamo che

$$u(t_0 + h) \approx u_1 = u_0 + hu'(t_0) = u_0 + hf(t_0, u_0).$$

Applicando ricorsivamente tale formula, otteniamo il metodo di Eulero

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n \geq 0, \tag{10.16}$$

dove

$$u_n \approx u(t_n), n = 1, 2, .., N.$$

Riducendo l'ampiezza h l'approssimazione diventa sempre più accurata e si dice che il metodo *converge*. Il metodo di Eulero implementato dagli studenti che conoscono i rudimenti della programmazione anche per sistemi.

10.4 La voce della scuola

Alla presentazione del PLS-MS dell'A.A. 2010-11, come insegnante fui attratta in modo particolare da un grande tema:*"La Matematica c'è"*, una proposta che comprendeva vari laboratori in cui si applicava la matematica per rappresentare e studiare la realtà che ci circonda. L'attività dal titolo *"Realtà e modelli"* era uno di questi. Avendo insegnato per parecchi anni agli studenti dell'Istituto Tecnico Industriale, indirizzo Elettronica, avevo potuto constatare che la matematica veniva applicata in tutte le discipline di indirizzo anche se a volte in modo massiccio, inconsapevole e poco sincronizzato con il corso di matematica. Al contrario al Liceo Scientifico Tecnologico, oggi Liceo delle Scienze Applicate, neanche nell'insegnamento della fisica si riusciva a cogliere lo stretto legame con la matematica, raramente infatti in un corso di fisica di una scuola superiore si parla di derivata o di integrale. Tali considerazioni mi convinsero a partecipare al progetto con una classe quinta del liceo. L'attività ebbe inizio con alcuni incontri organizzativi e di formazione per gli insegnanti interessati con la prof.ssa R.Vermiglio, presso la sede dell'Università di Udine. Alcune lezioni teoriche sui concetti che sono alla base delle equazioni differenziali e propedeutici al laboratorio vero e proprio furono svolte dai docenti delle classi coinvolte.

La conferenza della prof.ssa Vermiglio presso l'Istituto, partendo da una introduzione storica al metodo scientifico, presentò un ampio ventaglio di situazioni reali studiate mediante equazioni differenziali:il moto di un pendolo, la dinamica di crescita di una popolazione, la dinamica di coppia, etc. Per problemi di tempo la scelta fu ristretta a due argomenti: dinamica di crescita di una popolazione legata al corso di biologia e dinamica di coppia che agli occhi di diciottenni sembrava molto intrigante. L'attività di laboratorio si svolse presso i laboratori dell'Università ed occupò due pomeriggi in orario extracurricolare. Gli studenti simularono al computer alcune situazioni, utilizzando codici scritti in precedenza dalla docente con il software Matlab e provarono ad interpretare le soluzioni ottenute. Modificando opportunamente i parametri presenti nelle equazioni utilizzate era possibile osservare come cambiavano le soluzioni, i grafici corrispondenti e le relative interpretazioni. La conferenza conclusiva di una neo laureata, la dott.ssa Elisa Ellero, entusiasmò studenti ed insegnanti presenti, anche con aneddoti che richiamavano la datazione di opere d'arte ed altri reperti mediante lo studio del carbonio-14, ^{14}C.

Sull'onda dell'entusiasmo suscitato da questa attività una studentessa preparò la tesina per l'Esame di Stato dal titolo *"La Scientificizzazione dell'amore"*, nella quale riferiva in particolare di uno studio fatto dal prof. Sergio Rinaldi del Politecnico di Milano sulle dinamiche dell'amore in chiave matematica [92]. Il prof. Rinaldi ha analizzato infatti, mediante equazioni differenziali, le variabili in gioco nel corso della passione amorosa di Petrarca per Laura, partendo da uno studio condotto da Frederic Jones, dell'Università di Cardiff, che quindici anni prima aveva svolto una attenta analisi linguistica e stilistica del Canzoniere [67]. La consapevolezza delle positive ricadute sia sugli studenti che sulla loro insegnante ha portato negli anni successivi altri docenti della scuola a ripetere l'esperienza con altre classi.

10.5 Conclusioni

La matematica si è sviluppata anche attraverso una continua interazione col mondo reale in un processo di *astrazione* e di *applicazione*. I nuovi problemi posti dalla realtà in cui viviamo richiedono le sviluppo di idee matematiche ed algoritmiche innovative e queste a loro volta forniscono potenti strumenti per la comprensione di fenomeni reali. Nel laboratorio si è voluto proporre agli studenti tale percorso, per consentire loro di apprezzare le potenzialità del linguaggio matematico. Inoltre hanno potuto svolgere un ruolo attivo "simulando" il lavoro dei ricercatori. Su indicazione degli insegnanti, tale percorso si è basato sui modelli descritti dalle equazioni differenziali ordinarie, ma può essere riformulato con modelli descritti da equazioni alle differenze.

Riferimenti bibliografici

[21] M. Braun. *Differential Equations and their Applications. An Introduction to Applied Mathematics*. Springer, 1993.

[51] U. Bottazzini E. Boncinelli. *La serva padrona. Fascino e potere della matematica*. Scienza e idee. Cortina Raffaello Editore, 2000.

[52] E. Ellero. *Nota storica sulle equazioni differenziali ordinarie*. 2014.

[57] A. Trifone G. Barozzi M. Bergamini. *Matematica blu*. Zanichelli, 2010.

[58] L. Scaglianti G. Zwirner. *Strumenti e metodi matematici*. Vol. 2. Classics in Applied Mathematics. CEDAM, 1993.

[66] G. Israel. *Modelli matematici-Introduzione alla matematica applicata*. Muzzio, 1995.

[67] Frederic J. Jones. *The Structure of Petrarch's Canzoniere- A Chronological, Psychological and Stylistic Analysis*. Boydell e Brewer, 2002.

[92] S. Rinadi. «Laura and Petrarch: An intriguing case of cyclical love dynamics». In: *SIAM Journal of Applied Mathematics* 58.4 (1988), pp. 1205–1221. DOI: 10.1137/S003613999630592X.

[94] C.S. Roero S. Mazzone. *L'Età dei Lumi: matematica. Le equazioni differenziali*. Storia della scienza. Treccani, 1976.

[96] J. E. Sasser. «History of ordinary differential equations. The first hundred years». In: *University of Cincinnati* (?).

[104] Steven H. Strogatz. «Love Affairs and Differential Equations». In: *Mathematics Magazine* 61.1 (1888), p. 35.

[114] Eugene Paul Wigner. «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences». In: *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13 (1960), pp. 141–156.