Radioattività e datazione con il ^{14}C

Elisa Ellero

7 aprile 2011

Alcune applicazioni delle equazioni differenziali

Alcune applicazioni delle equazioni differenziali

La matematica si applica ad una vastissima gamma di problemi quotidiani.

Alcune applicazioni delle equazioni differenziali

La matematica si applica ad una vastissima gamma di problemi quotidiani.

Tramite le equazioni differenziali si può modellare ad esempio:

- il fenomeno della radioattività;

Alcune applicazioni delle equazioni differenziali

La matematica si applica ad una vastissima gamma di problemi quotidiani.

Tramite le equazioni differenziali si può modellare ad esempio:

- il fenomeno della radioattività;
- la procedura di datazione dei reperti archeologici e delle opere d'arte con il metodo del carbonio-14.

La radioattività

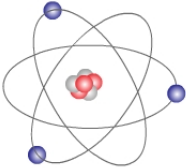
Definizione

La radioattività o decadimento radioattivo è la transizione di alcuni nuclei atomici instabili verso uno stato avente energia minore, attraverso l'emissione di una o più particelle. L'atomo radioattivo si trasforma quindi in un altro atomo, che può essere a sua volta radioattivo oppure stabile.

La radioattività

Definizione

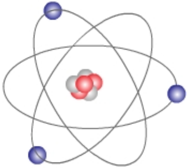
La *radioattività o decadimento radioattivo* *è la transizione di alcuni nuclei atomici instabili verso uno stato avente energia minore, attraverso l'emissione di una o più particelle. L'atomo radioattivo si trasforma quindi in un altro atomo, che può essere a sua volta radioattivo oppure stabile.*



La radioattività

Definizione

La radioattività o decadimento radioattivo è la transizione di alcuni nuclei atomici instabili verso uno stato avente energia minore, attraverso l'emissione di una o più particelle. L'atomo radioattivo si trasforma quindi in un altro atomo, che può essere a sua volta radioattivo oppure stabile.



Ogni atomo è formato da un nucleo contenente protoni e neutroni, e dagli elettroni, che orbitano attorno al nucleo. Se il nucleo è instabile (cioé le forze al suo interno non sono bilanciate), tende spontaneamente uno stato stabile emettendo una o più particelle.

Gli isotopi radioattivi

Molti isotopi esistenti in natura sono stabili, ma alcuni isotopi naturali e buona parte di quelli artificiali sono instabili. Gli isotopi instabili sono detti isotopi radioattivi o radionuclidi.

Gli isotopi radioattivi

Molti isotopi esistenti in natura sono stabili, ma alcuni isotopi naturali e buona parte di quelli artificiali sono instabili. Gli isotopi instabili sono detti isotopi radioattivi o radionuclidi.

I radionuclidi hanno moltissime applicazioni in campo scientifico.

Gli isotopi radioattivi

Molti isotopi esistenti in natura sono stabili, ma alcuni isotopi naturali e buona parte di quelli artificiali sono instabili. Gli isotopi instabili sono detti isotopi radioattivi o radionuclidi.

I radionuclidi hanno moltissime applicazioni in campo scientifico. Ad esempio:

- il carbonio-14 viene utilizzato per la datazione di fossili, rocce e reperti archeologici;

Gli isotopi radioattivi

Molti isotopi esistenti in natura sono stabili, ma alcuni isotopi naturali e buona parte di quelli artificiali sono instabili. Gli isotopi instabili sono detti isotopi radioattivi o radionuclidi.

I radionuclidi hanno moltissime applicazioni in campo scientifico. Ad esempio:

- il carbonio-14 viene utilizzato per la datazione di fossili, rocce e reperti archeologici;
- le radiazioni emesse da numerosi radionuclidi (come il tecnezio-99m) permettono di diagnosticare svariate patologie e di distruggere le cellule tumorali.

Il momento esatto in cui un atomo instabile decadrà è assolutamente casuale. Si osserva però che, dato un campione di un particolare isotopo, il numero di decadimenti rispetta una precisa legge statistica.

Il momento esatto in cui un atomo instabile decadrà è assolutamente casuale. Si osserva però che, dato un campione di un particolare isotopo, il numero di decadimenti rispetta una precisa legge statistica.

Obiettivo:

Determinare la legge che regola il decadimento radioattivo.

Il momento esatto in cui un atomo instabile decadrà è assolutamente casuale. Si osserva però che, dato un campione di un particolare isotopo, il numero di decadimenti rispetta una precisa legge statistica.

Obiettivo:

Determinare la legge che regola il decadimento radioattivo.

In media il numero di decadimenti in un intervallo di tempo dt è proporzionale al numero $N(t)$ di atomi presenti.

L'equazione differenziale del decadimento radioattivo

Siano:

L'equazione differenziale del decadimento radioattivo

Siano:

- $N(t) =$ numero di atomi del campione di un isotopo all'istante $t > 0$;

L'equazione differenziale del decadimento radioattivo

Siano:

- $N(t) =$ numero di atomi del campione di un isotopo all'istante $t > 0$;
- $\lambda =$ costante di decadimento dell'isotopo $=$ probabilità che un atomo dell'isotopo decada in un secondo.

L'equazione differenziale del decadimento radioattivo

Siano:

- $N(t) =$ numero di atomi del campione di un isotopo all'istante $t > 0$;
- $\lambda =$ costante di decadimento dell'isotopo $=$ probabilità che un atomo dell'isotopo decada in un secondo.

Allora per definizione di probabilità si ha:

$$\lambda = \frac{\text{atomi decaduti in un secondo}}{N(t)}$$

$$\text{atomi decaduti in un secondo} = \lambda \cdot N(t);$$
$$\text{atomi decaduti in } h \text{ secondi} = h \cdot \lambda \cdot N(t).$$

$$\text{atomi decaduti in un secondo} = \lambda \cdot N(t);$$
$$\text{atomi decaduti in } h \text{ secondi} = h \cdot \lambda \cdot N(t).$$

Quindi si osserva che:

$$N(t+h) = \text{numero di atomi all'istante}\, t+h = $$
$$= N(t) - h \cdot \lambda \cdot N(t)$$

$$N(t+h) - N(t) = -h \cdot \lambda \cdot N(t) \tag{1}$$

$$N(t+h) - N(t) = -h \cdot \lambda \cdot N(t) \tag{1}$$

Dividendo per h si ottiene:

$$N(t+h) - N(t) = -h \cdot \lambda \cdot N(t) \tag{1}$$

Dividendo per h si ottiene:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -\lambda \cdot N(t)$$

$$N(t+h) - N(t) = -h \cdot \lambda \cdot N(t) \tag{1}$$

Dividendo per h si ottiene:

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -\lambda \cdot N(t)$$

Ora si passa al limite per $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = \lim_{h\to 0} [-\lambda \cdot N(t)]$$

L'equazione differenziale del decadimento radioattivo:

$$N'(t) = -\lambda \cdot N(t) \tag{2}$$

L'equazione differenziale del decadimento radioattivo:

$$N'(t) = -\lambda \cdot N(t) \tag{2}$$

Obiettivo: risolvere l'equazione differenziale (2).

L'equazione differenziale del decadimento radioattivo:

$$N'(t) = -\lambda \cdot N(t) \tag{2}$$

Obiettivo: risolvere l'equazione differenziale (2).

Indichiamo con N_0 il numero di atomi presenti nel campione all'istante iniziale $t = 0$.

L'equazione differenziale del decadimento radioattivo:

$$N'(t) = -\lambda \cdot N(t) \tag{2}$$

Obiettivo: risolvere l'equazione differenziale (2).

Indichiamo con N_0 il numero di atomi presenti nel campione all'istante iniziale $t = 0$.

N_0 è una costante determinabile a partire dal campione dell'isotopo radioattivo preso in esame.

Vogliamo quindi risolvere il seguente sistema:

Vogliamo quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda \cdot N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \tag{3}$$

Vogliamo quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda \cdot N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \tag{3}$$

Dividiamo per $N(t) \neq 0$ l'equazione differenziale:

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda$$

Integrando tra $t = 0$ e t si ha:

Integrando tra $t = 0$ e t si ha:

$$\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)}\, ds = \int_0^t -\lambda\, ds$$

Integrando tra $t = 0$ e t si ha:

$$\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)}\, ds = \int_0^t -\lambda\, ds$$

$$\Big[\log N(s)\Big]_0^t = \Big[-\lambda \cdot s\Big]_0^t$$

Integrando tra $t = 0$ e t si ha:

$$\int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)}\, ds = \int_0^t -\lambda\, ds$$

$$\Big[\log N(s)\Big]_0^t = \Big[-\lambda \cdot s\Big]_0^t$$

$$\log N(t) - \log N(0) = -\lambda \cdot t + \lambda \cdot 0$$

Dato che $N(0) = N_0$ si ha:

Dato che $N(0) = N_0$ si ha:

$$\log N(t) = \log N_0 - \lambda \cdot t$$

Dato che $N(0) = N_0$ si ha:

$$\log N(t) = \log N_0 - \lambda \cdot t$$

$$e^{\log N(t)} = e^{\log N_0 - \lambda \cdot t}$$

Dato che $N(0) = N_0$ si ha:

$$\log N(t) = \log N_0 - \lambda \cdot t$$

$$e^{\log N(t)} = e^{\log N_0 - \lambda \cdot t}$$

Si ottiene quindi la soluzione del problema (3):

$$N(t) = e^{\log N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Dato che $N(0) = N_0$ si ha:

$$\log N(t) = \log N_0 - \lambda \cdot t$$

$$e^{\log N(t)} = e^{\log N_0 - \lambda \cdot t}$$

Si ottiene quindi la soluzione del problema (3):

$$N(t) = e^{\log N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Il numero di atomi rimasti all'istante $t > 0$ dopo il decadimento radioattivo è:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \tag{4}$$

Il metodo del ^{14}C

Il metodo del ^{14}C permette di datare reperti di origine organica (ossa, legno, fibre tessili, semi, carboni di legno) di età compresa tra i 100 e i 50.000 anni.

Il metodo del ^{14}C

Il metodo del ^{14}C permette di datare reperti di origine organica (ossa, legno, fibre tessili, semi, carboni di legno) di età compresa tra i 100 e i 50.000 anni.

Fu ideato tra il 1945 e il 1955 dal chimico statunitense Willard Frank Libby, che per questa scoperta vinse il Premio Nobel nel 1960.

Il carbonio ^{14}C

In natura l'isotopo del carbonio avente numero di massa 14 (^{14}C) è instabile (ha 6 protoni e 8 neutroni), quindi decade radioattivamente: per questo motivo viene anche chiamato radiocarbonio.

Il carbonio ^{14}C

In natura l'isotopo del carbonio avente numero di massa 14 (^{14}C) è instabile (ha 6 protoni e 8 neutroni), quindi decade radioattivamente: per questo motivo viene anche chiamato radiocarbonio.

I due neutroni in eccesso decadono in un elettrone e in un protone ciascuno; i due elettroni di troppo vengono espulsi e l'atomo diventa stabile (7 protoni e 7 neutroni).

Il carbonio ^{14}C

In natura l'isotopo del carbonio avente numero di massa 14 (^{14}C) è instabile (ha 6 protoni e 8 neutroni), quindi decade radioattivamente: per questo motivo viene anche chiamato radiocarbonio.

I due neutroni in eccesso decadono in un elettrone e in un protone ciascuno; i due elettroni di troppo vengono espulsi e l'atomo diventa stabile (7 protoni e 7 neutroni).

Come si forma il ^{14}C?
I neutroni prodotti dai raggi cosmici negli strati alti dell'atmosfera si combinano con l'azoto e producono ^{14}C. Il radiocarbonio si combina con l'ossigeno e si muove liberamente nell'atmosfera sotto forma di anidride carbonica. In questo modo viene assorbito dalle piante e dai tessuti degli animali.

Tutti gli organismi viventi scambiano continuamente carbonio con l'atmosfera attraverso processi di respirazione (animali) o fotosintesi (vegetali), oppure lo assimilano nutrendosi di altri esseri viventi o sostanze organiche. Mentre sono vivi, gli organismi mantengono un equilibrio tra il decadimento e l'assorbimento di nuovo ^{14}C, la cui concentrazione è uguale a quella che si riscontra nell'atmosfera.

Tutti gli organismi viventi scambiano continuamente carbonio con l'atmosfera attraverso processi di respirazione (animali) o fotosintesi (vegetali), oppure lo assimilano nutrendosi di altri esseri viventi o sostanze organiche. Mentre sono vivi, gli organismi mantengono un equilibrio tra il decadimento e l'assorbimento di nuovo ^{14}C, la cui concentrazione è uguale a quella che si riscontra nell'atmosfera.

Dopo la morte l'organismo non assorbe più ^{14}C, così la quantità dell'isotopo ^{14}C diminuisce secondo la legge temporale stabilita dall'equazione (4):

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Nella caso del metodo del ^{14}C:

- il tasso di decadimento λ dell'isotopo ^{14}C è una costante determinata sperimentalmente;

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Nella caso del metodo del ^{14}C:

- il tasso di decadimento λ dell'isotopo ^{14}C è una costante determinata sperimentalmente;
- il tempo iniziale $t = 0$ coincide con la morte dell'organismo;

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Nella caso del metodo del ^{14}C:

- il tasso di decadimento λ dell'isotopo ^{14}C è una costante determinata sperimentalmente;
- il tempo iniziale $t = 0$ coincide con la morte dell'organismo;
- $N_0 =$ numero di atomi di ^{14}C nell'organismo vivente;

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Nella caso del metodo del ^{14}C:

- il tasso di decadimento λ dell'isotopo ^{14}C è una costante determinata sperimentalmente;
- il tempo iniziale $t = 0$ coincide con la morte dell'organismo;
- $N_0 =$ numero di atomi di ^{14}C nell'organismo vivente;
- $N(t) =$ numero di atomi di ^{14}C al giorno d'oggi (dopo t anni dalla morte dell'organismo). $N(t)$ si misura a partire da un campione del reperto da datare.

Possiamo quindi determinare quanto tempo è intercorso dalla morte di un dato organismo.

Possiamo quindi determinare quanto tempo è intercorso dalla morte di un dato organismo.

L'incognita del problema è t, la variabile che indica quanti anni sono trascorsi dalla morte dell'organismo a oggi. Da $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ segue che:

$$e^{-\lambda \cdot t} = \frac{N(t)}{N_0}$$

Possiamo quindi determinare quanto tempo è intercorso dalla morte di un dato organismo.

L'incognita del problema è t, la variabile che indica quanti anni sono trascorsi dalla morte dell'organismo a oggi. Da $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ segue che:

$$e^{-\lambda \cdot t} = \frac{N(t)}{N_0}$$

$$\log e^{-\lambda \cdot t} = \log \frac{N(t)}{N_0}$$

Possiamo quindi determinare quanto tempo è intercorso dalla morte di un dato organismo.

L'incognita del problema è t, la variabile che indica quanti anni sono trascorsi dalla morte dell'organismo a oggi. Da $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ segue che:

$$e^{-\lambda \cdot t} = \frac{N(t)}{N_0}$$

$$\log e^{-\lambda \cdot t} = \log \frac{N(t)}{N_0}$$

$$-\lambda \cdot t = \log \frac{N(t)}{N_0}$$

Formula per la datazione con il metodo del ^{14}C

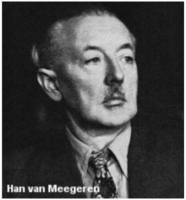
$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log \frac{N(t)}{N_0} \tag{5}$$

Formula per la datazione con il metodo del ^{14}C

$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \log \frac{N(t)}{N_0} \tag{5}$$

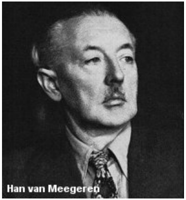
Grazie a questa formula è possibile ricavare l'età di un dato resto organico misurando la quantità di ^{14}C presente nel campione.

Han Van Meegeren



Han Van Meegeren (1889-1947) fu uno dei più abili falsari del XX secolo. Era uno specialista nella falsificazione dei quadri della pittura olandese del Seicento, in particolare di Johannes Vermeer, Frans Hals e Pieter de Hooch.

Han Van Meegeren



Han Van Meegeren (1889-1947) fu uno dei più abili falsari del XX secolo. Era uno specialista nella falsificazione dei quadri della pittura olandese del Seicento, in particolare di Johannes Vermeer, Frans Hals e Pieter de Hooch.

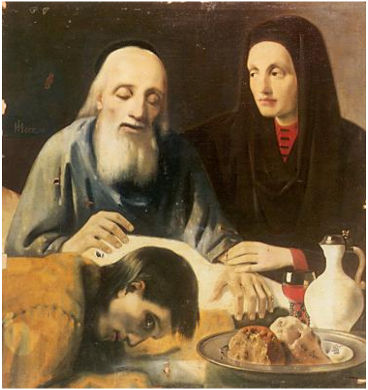
Non commise mai l'errore di copiare opere di Vermeer esistenti: creò invece dipinti nuovi, riuscendo ad abbindolare tutti i critici, convinti di trovarsi al cospetto di eccezionali capolavori.

Per far credere che le sue opere fossero autentiche, recuperava autentiche tele del Seicento da cui raschiava il colore e inseriva con cura della polvere nel falso appena terminato per provocare il reticolo di piccole crepe, tipico delle tele ad olio invecchiate. Inoltre usava pennelli dell'epoca e un rarissimo pigmento ottenuto dai lapislazzuli per il blu oltremare.

I pigmenti di Han Van Meegeren

I falsi di Van Meegeren

L'incontro a Emmaus, 1936-37



La benedizione di Giacobbe, 1942

Il processo

Van Meegeren creò in tutto 6 falsi Vermeer e, proprio per aver venduto due dipinti a dei gerarchi nazisti (tra cui Heinrich Himmler), alla fine della Seconda Guerra Mondiale fu arrestato con l'accusa di collaborazionismo.

Il processo

Van Meegeren creò in tutto 6 falsi Vermeer e, proprio per aver venduto due dipinti a dei gerarchi nazisti (tra cui Heinrich Himmler), alla fine della Seconda Guerra Mondiale fu arrestato con l'accusa di collaborazionismo.

Fu processato in Olanda nell'ottobre 1947 e riuscì ad evitare l'ergastolo rivelando d'essere un falsario (venne condannato ad un anno di carcere per truffa). Per dimostrare la sua abilità, dipinse nell'aula del tribunale un Gesù nel tempio, stupendo numerosi esperti.

Come si scopre un falso?

Nell'ossido di piombo usato dai pittori sono presenti tracce di elementi radioattivi come il radio-226 e il piombo-210.

Come si scopre un falso?

Nell'ossido di piombo usato dai pittori sono presenti tracce di elementi radioattivi come il radio-226 e il piombo-210.

Il decadimento radioattivo del piombo-210

$$\lambda N_0 = \lambda e^{300\lambda} N(t) + r - re^{300\lambda} \tag{6}$$

- λ è la costante di decadimento del piombo-210;
- r è costante di decadimento del radio-226;
- $\lambda N(t)$ è l'attuale tasso di decadimento del piombo-210 per minuto e per grammo di piombo bianco (biacca).

Nel caso dell'"Incontro a Emmaus "di Han Van Meergeren (1936-37) $\lambda N_0 = 98.05$.

Nel caso dell'"Incontro a Emmaus "di Han Van Meergeren (1936-37) $\lambda N_0 = 98.05$.

Questo valore è molto alto ripetto ai quadri originali di Vermeer: grazie all'equazione differenziale (6) si può affermare con certezza che il dipinto è solo una recente contraffazione.

Fine