GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Giovanna D'Agostino, Università di Udine

QUALE GEOMETRIA?

Geometria = descrizione matematica dello "spazio"

La Geometria Euclidea descrive un "mondo piatto" ed è stata a lungo considerata l'unica geometria adeguata per descrivere lo spazio intorno a noi

Cosa vuole descrivere la geometria euclidea?

Quando una nave è all'orizzonte, la parte inferiore è invisibile, per via della curvatura della superficie terrestre.

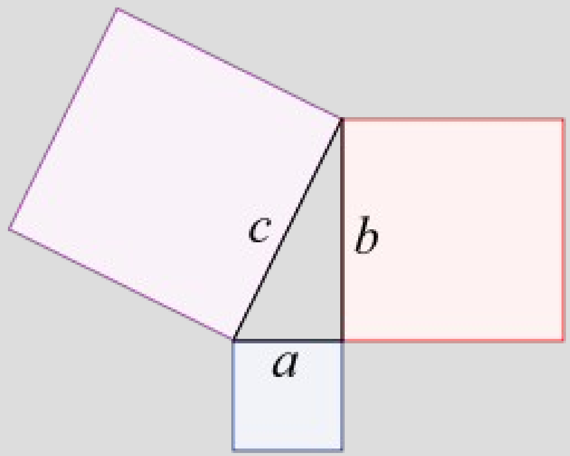
La geometria piana dei greci (due dimensioni) è un' idealizzazione che somiglia alla geometria della superficie terrestre solo su aree "piccole".

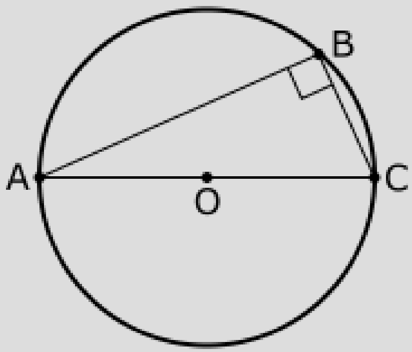
La struttura geometrica del nostro Universo è di tipo euclideo ?

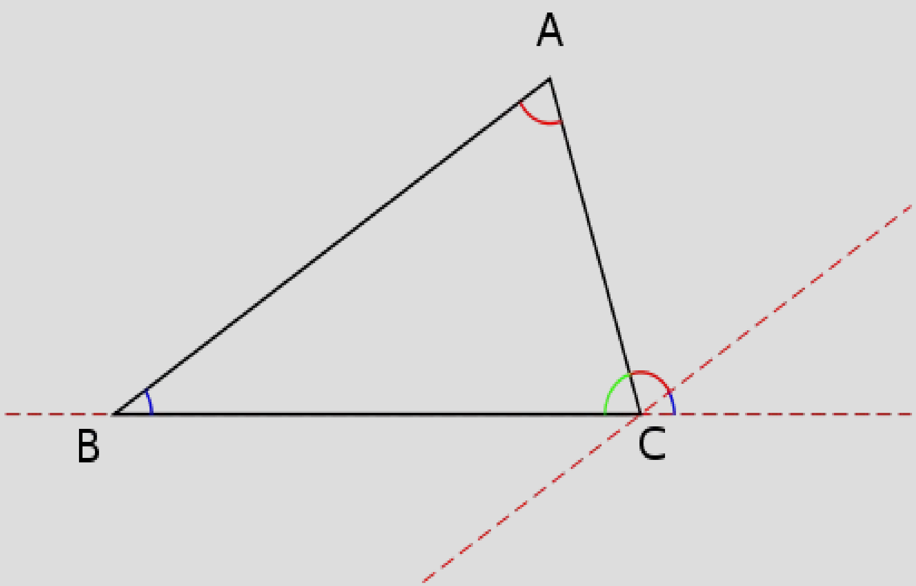
Più in generale: è possibile concepire una geometria diversa da quella euclidea?

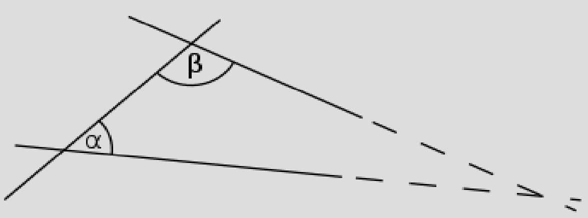
Nota bene: la geometria sferica “non conta” come geometria “diversa”.

Geometria euclidea sul piano (dim=2)



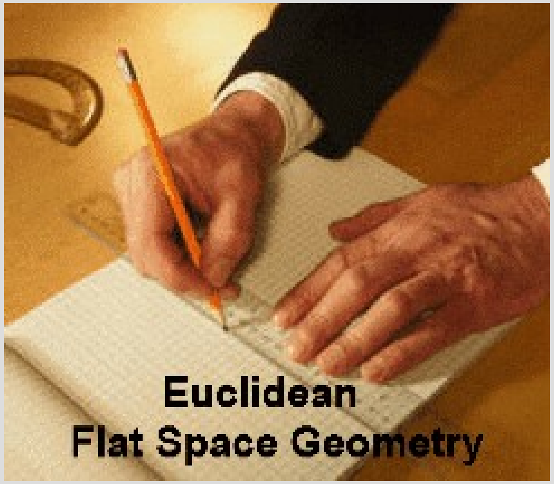


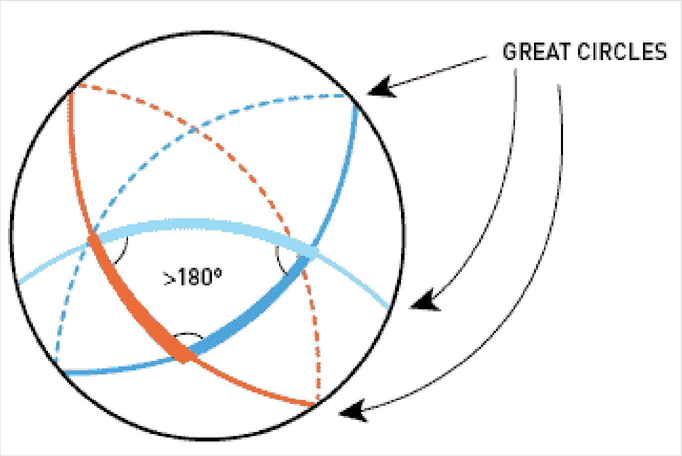


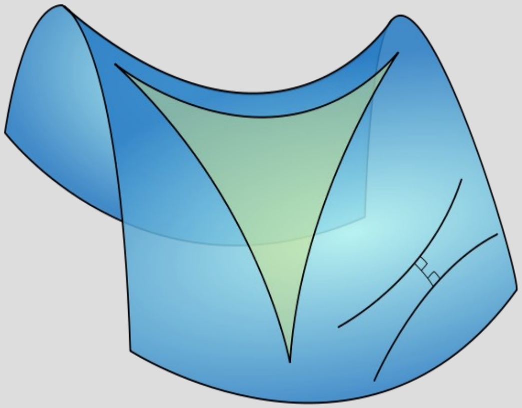


ALTRE GEOMETRIE

Oggi sappiamo che la geometria euclidea non e' l'unica scelta possibile e che esistono (almeno) tre diverse   geometrie: piatta, sferica ed iperbolica





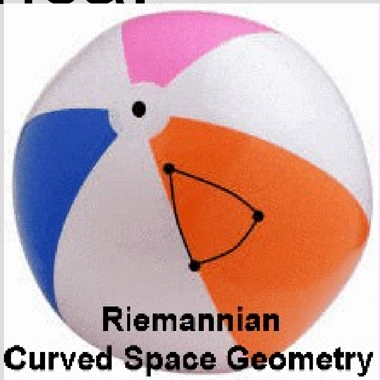


Geometrie Neutrali

La geometria euclidea e quella iperbolica appartengono alla classe delle

geometrie neutrali:

hanno idee radicalmente diverse sul parallelismo fra rette ma nonostante questo hanno molte proprietà in comune che non valgono nella geometria sferica.



La geometria euclidea è rimasta a lungo sola...

almeno fino all'800...

Gauss (1777-1855)

Bolyai (1802-1860)

Lobachevsky (1792-1856)

Scuola di Atene (Raffaello, Vaticano)

6) Pitagora

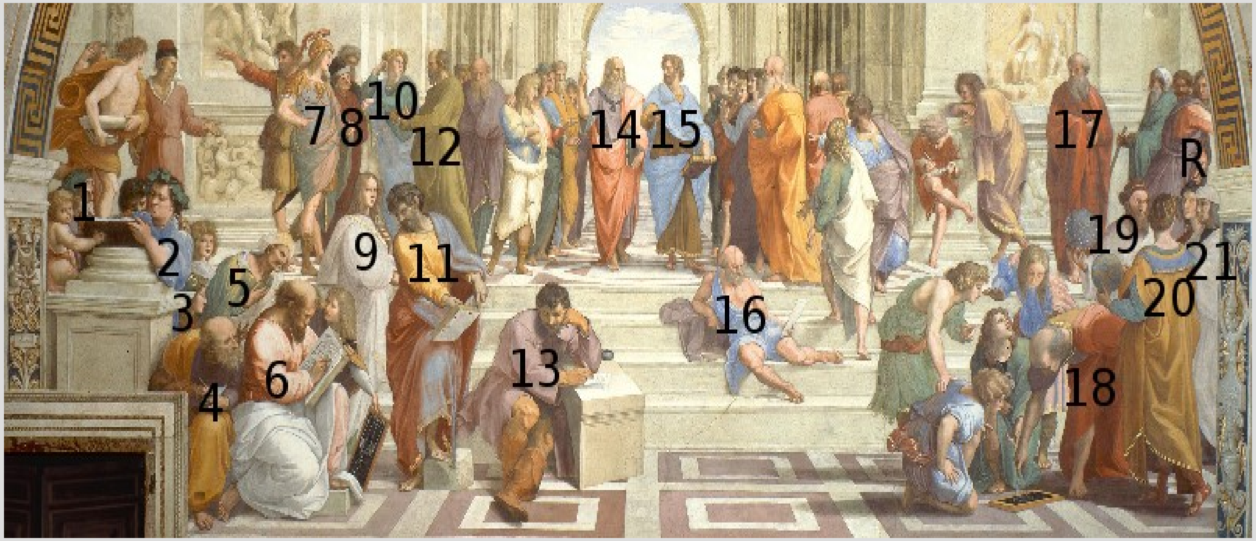
12) Socrate

13) Eraclito

14) Platone

15) Aristotele

18) Euclide



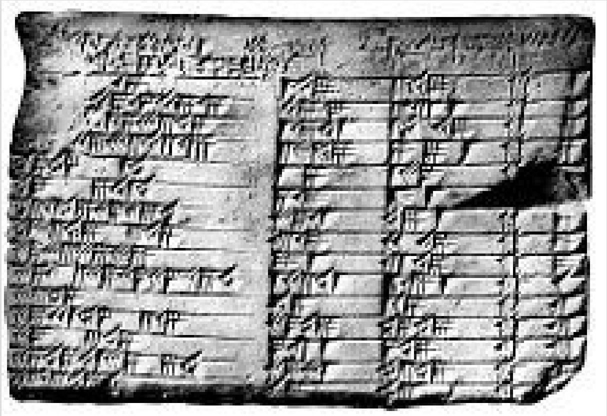
Della vita di Euclide non si conosce granché:

- Insegna ad Alessandria d'Egitto, intorno al 300 a.C.
- Scrive gli “Elementi”, un trattato di Geometria e Aritmetica: le conoscenze matematiche del tempo sono presentate per la prima volta in maniera sistematica, seguendo un “filo” logico:

tutte le proprietà geometriche sono derivate da pochi postulati, considerati intuitivamente evidenti

I Babilonesi conoscevano le terne pitagoriche 1500 anni prima di Euclide

(3,4,5), (5,12,13),(7,24,25), (8,15,17)....



Tavoletta Babilonese 1800 a.C.

I POSTULATI DELLA GEOMETRIA PIANA

I) Per ogni coppia di punti passa una ed una sola retta

II) Ogni segmento può essere indefinitamente esteso

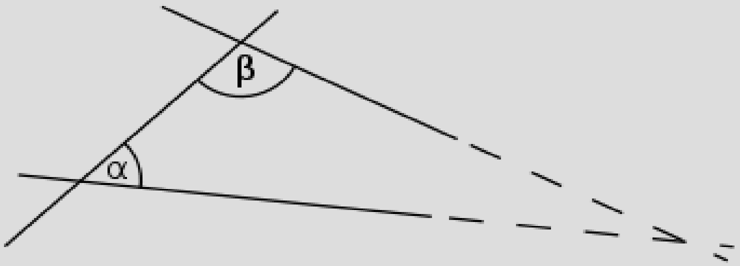
III) Tutti gli angoli retti hanno uguale misura

IV) Esistono cerchi di ogni possibile raggio e centro

V) ... nella sua formulazione originale è più complicato degli altri e merita una pagina intera ...

IL V POSTULATO

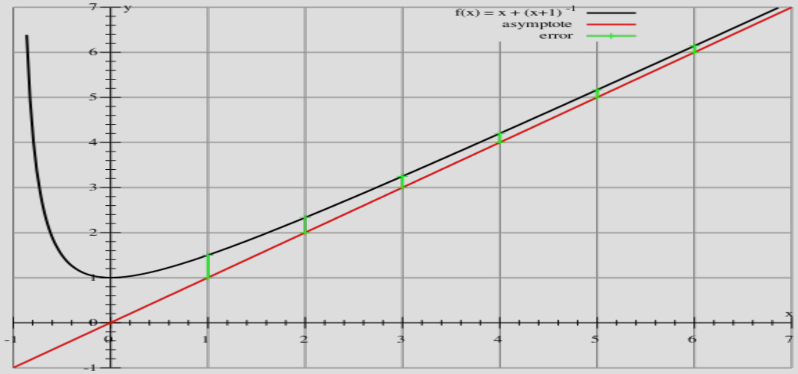
V) Se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, allora, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.



Perche' proprio il V postulato?

Proclo (410-485), filosofo neoplatonico

[...] il fatto che le rette convergono col diminuire degli angoli retti è vero e necessario: ma il fatto che, convergendo sempre di più, nel prolungarsi si incontrino, è probabile, ma non necessario, a meno che non ci sia un ragionamento che dimostri che il fatto è vero per le linee rette. Che esistano effettivamente delle linee convergenti all'infinito, ma asintote, per quanto il fatto sembri incredibile o paradossale tuttavia è vero, ed è stato constato in altre specie di linee. Non sarà dunque mai possibile per le linee rette ciò che lo è per quelle linee? Perché fino a che non ne saremo convinti da una dimostrazione, il fatto che questa proprietà si mostri in altre linee attrae l'immaginazione [...]



Prima del XIX secolo non viene contestata la *validità* o la *necessità* del V postulato, ma solo il considerarlo un postulato!

Nei secoli dopo Euclide, per tentare di risolvere il problema, vennero proposte due vie:

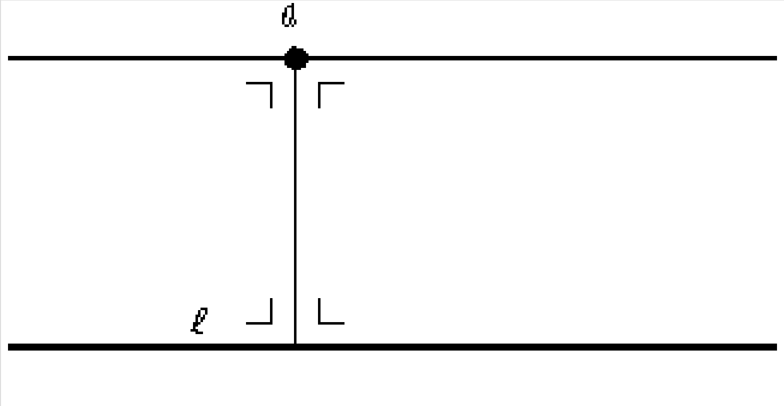
1) cercare di *dimostrare* il **V postulato** sulla base dei primi quattro, considerati più evidenti;

2) sostituire il **V postulato** con un altro equivalente (rispetto agli altri quattro) ma di contenuto più intuitivo ed immediato.

Tolomeo (90-168)

Dimostra il V postulato assumendo implicitamente che:

data una retta ed un punto, esiste al più una retta parallela alla retta data



V POSTULATO e PARALLELISMO

- data una retta ed un punto esiste al più una retta parallela alla retta data e passante per il punto (*Playfair Axiom* da J. Playfair 1748-1919);
- due rette che sono parallele ad una stessa retta sono fra loro parallele;
- se una retta incontra due rette parallele, forma con esse angoli alterni interni di uguale misura:
- due rette parallelle sono equidistanti.

Nessuna di queste proprietà può essere assunta senza il V postulato

V POSTULATO E (TRI)ANGOLI

- La somma degli angoli di un qualsiasi triangolo e' 180°;
- dato un triangolo è sempre possibile costruirne uno con la stessa misura degli angoli ma di grandezza arbitraria;
- Teorema di Pitagora.

Nessuna di queste proprietà è dimostrabile a partire dagli altri postulati: sono tutte equivalenti al V postulato

Perfino supporre che esista un rettangolo è vietato, senza il V postulato

Ossessioni...

Farkas Bolyai a suo figlio Janos (1820)

Per amor di Dio, lascia perdere. Devi averne paura non meno che della passione sessuale, perché anche lui può prendere tutto il tuo tempo e privarti della salute, della tranquillità e della felicità nella vita

A volte è meglio non dare troppo retta ai genitori..

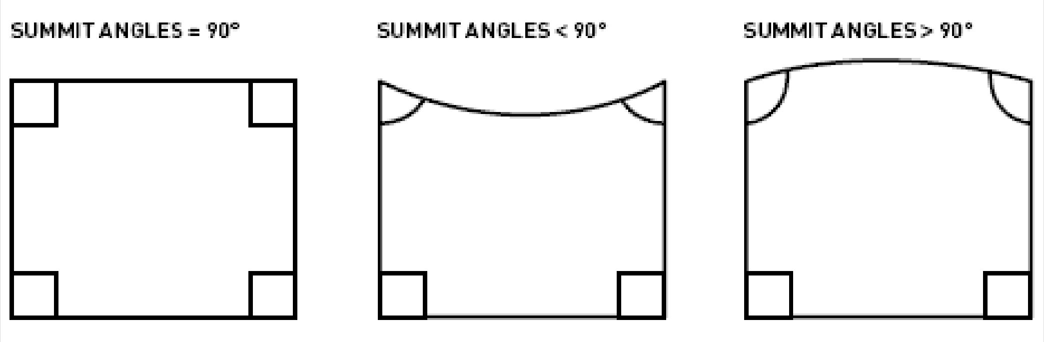
Ancor prima di Janos...

Girolamo Saccheri (1667 – 1733)

Le sue ricerche partono dalla costruzione, in geometria neutrale, di un quadrilatero con due lati perpendicolari alla base e di uguale lunghezza (quadrilatero di Saccheri).

Cosa possiamo dire degli angoli in alto? In geometria neutrale possiamo dimostrare solo che hanno uguale misura.

Rimangono quindi tre possibilità:



Un fallimento importante..

- Saccheri dimostra, utilizzando solo i postulati della geometria neutrale, che gli angoli “in alto” non possono essere ottusi
- Analogamente, vorrebbe dimostrare che questi angoli non possono essere acuti: cerca quindi di derivare una contraddizione da questa eventualità.
  Così facendo scopre molte proprietà contrarie all'intuizione (euclidea...) e conclude:

“l'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa perché ripugna alla natura stessa della linea retta...”

Triangoli e aree

Quali sono queste strane proprietà che ripugnano all'idea stessa di geometria? Il matematico svizzero J.H.Lambert (1728-1777) ne trova parecchie:

- L'area di un triangolo non dipende dalla lunghezza dei sui lati, ma dalla misura dei suoi angoli.
- La somma degli angoli è sempre minore di 180, quindi non si possono costruire triangoli di area arbitrariamente grande, anche se si possono costruire triangoli con lati arbitrariamente lunghi...

Un matematico molto importante

Carl Friedrich Gauss

(1777 - 1855)

Gauss fu forse il primo a comprendere che il V postulato non fosse indispensabile per costruire una geometria coerente, ma non pubblicò mai i suoi risultati, forse per timore delle reazioni dei suoi colleghi.

“la mia convinzione, che non possiamo fondare la geometria copletamente a priori, è divenuta, se possibile, ancora più salda. Nel frattempo, non mi deciderò ancora per molto tempo a elaborare per la pubblicazione le mie estese ricerche sull’argomento, e ciò forse non avverrà mai nella mia vita, perché temo gli strilli dei Beoti, qualora volessi esprimere completamente le mie vedute...”

SULL'IMPORTANZA DI ESSERE GIOVANI, SENZA PREGIUDIZI E SENZA PAURA

chi ha detto che la matematica non sia una scienza creativa?

Ho trovato delle cose meravigliose, che hanno sorpreso anche me … non posso dire altro,se non che dal nulla ho creato un mondo differente, nuovo.

Nel frattempo, in Russia...

Nikolaj Ivanovic Lobacevskij

(1793-1856)

Sviluppa la geometria iperbolica non limitandosi allo studio delle parallele (ad esempio espone in maniera organica la trigonometria non euclidea).

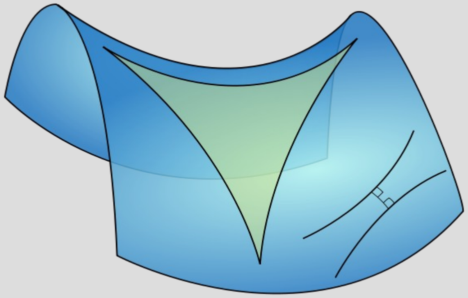
Dimostra che la geometria iperbolica, in zone “sufficientemente ristrette”, coincide con la geometria euclidea

Che cosa hanno fatto Gauss, Bolyai e Lobacevskij?

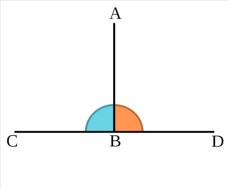
Hanno capito che per liberarsi dei preconcetti euclidei che tanto avevano beffato i loro predecessori, dovevano liberarsi dell' “intuizione geometrica” e fidarsi più del ragionamento che dell'intuizione.

Se rette e punti non si comportano sempre come quelli a noi familiari, meglio non cercare di visualizzarli affatto!

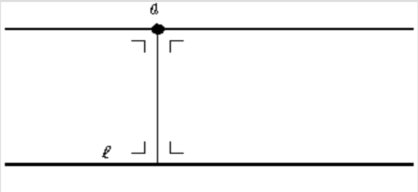
In geometria neutrale si dimostra...



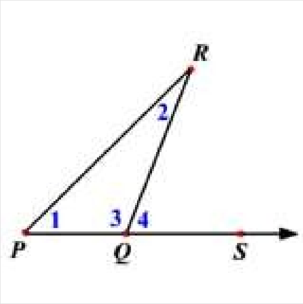
- la somma degli angli interni di un triangolo è sempre *minore o uguale* a 180;



- data una retta ed un punto esiste sempre un'unica retta perpendicolare alla retta data che passa per P;



- data una retta, esiste almeno una parallela per un punto esterno;



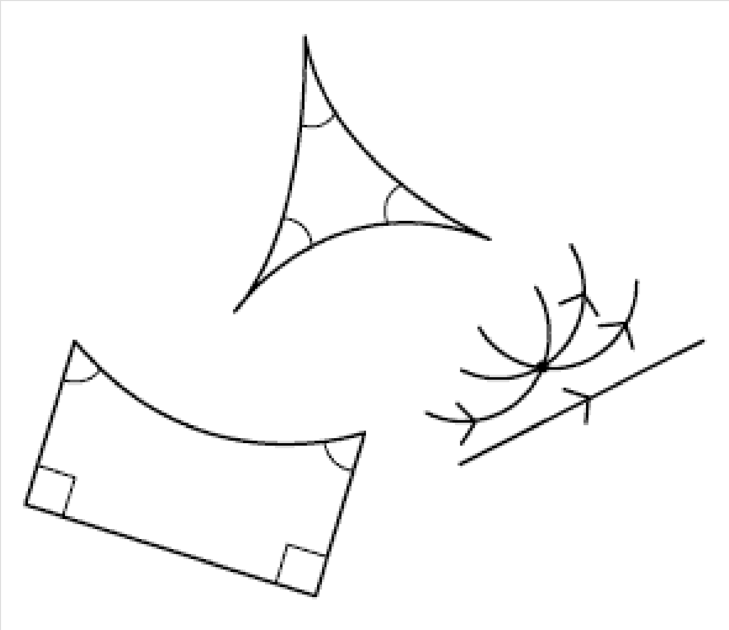
- Teorema dell'angolo esterno;

....

Che strana geometria quella iperbolica

- Data una retta e un punto esterno, esistono infinite rette parallele alla retta data;
- non vale il Teorema di Pitagora;
- esistono rette parallele che si avvicinano   sempre di più;
- non esistono rette equidistanti;
- non si riesce a costruire neanche un rettangolo!

Anche se coerente, sembrerebbe piuttosto inutile...



Come possiamo accertarci della sua coerenza?

In un certo senso Gauss, Bolayi e Lobacevskij sono dei visionari: come possiamo sapere che la loro geometria non è contraddittoria?

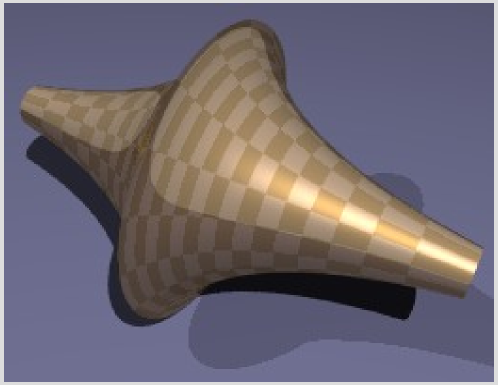
Abbiamo bisogno di visualizzare/concretizzare in qualche modo le nuove rette e i nuovi punti: ci serve un *modello* concreto della geometria iperbolica, all'interno di uno spazio a noi noto, come la sfera è un modello della geometria sferica all'interno dello spazio euclideo

Per vedere il piano iperbolico, usiamo lo spazio euclideo

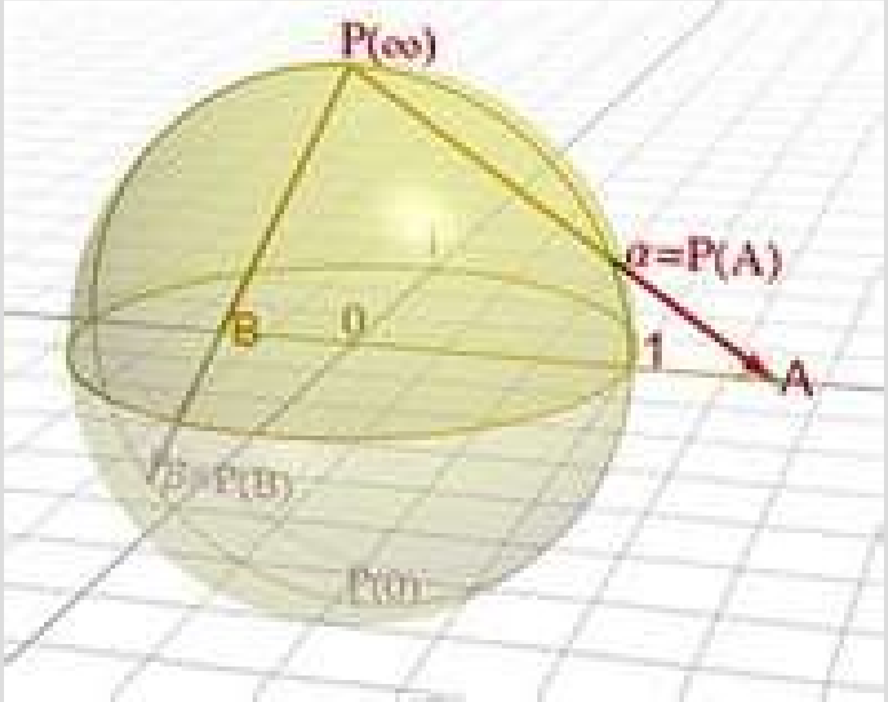
Eugenio Beltrami (1835, 1900)

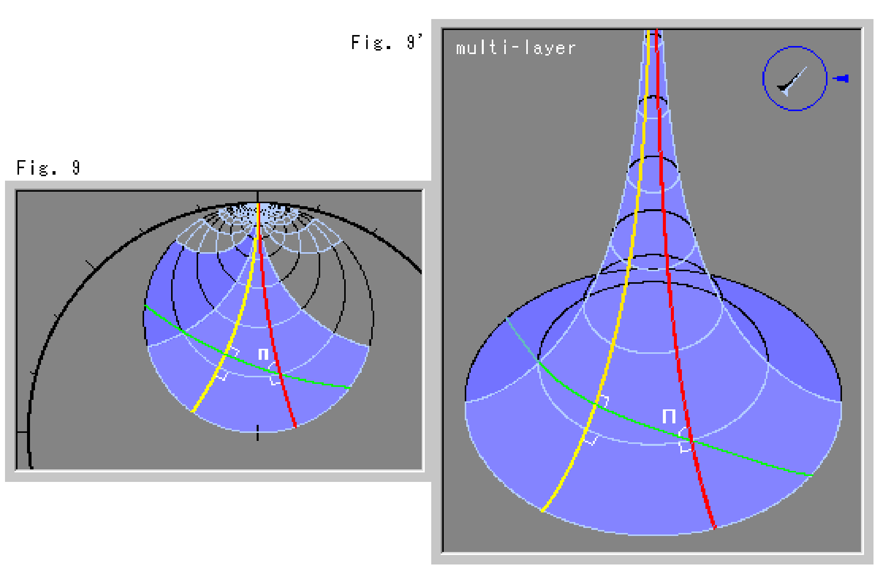
Inventa il primo modello concreto di geometria iperbolica, fornendo implicitamente la prima prova di coerenza relativa di tale geometria.

La realizzazione concreta del piano iperbolico si serve di una PSEUDOSFERA immersa nello spazio euclideo

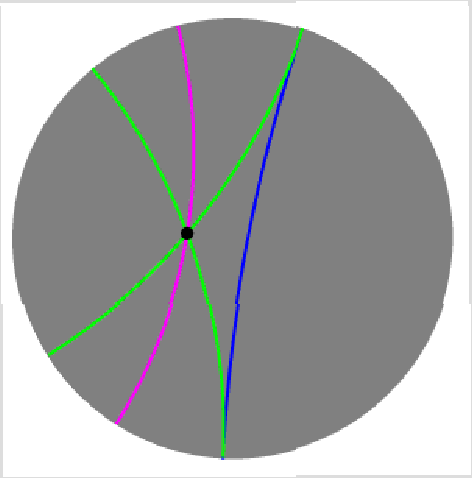


Mappe





J.H Poincaré (1854 – 1912)



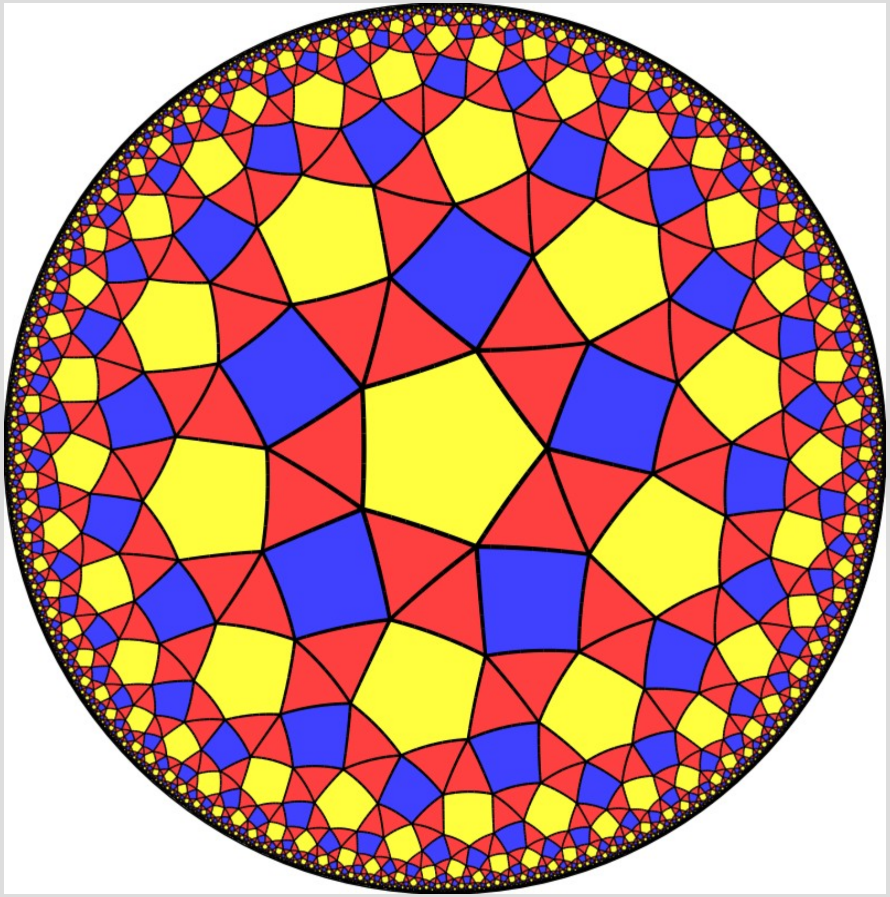
Da lui prende il nome un modello della geometria iperbolica immerso nel piano euclideo.

Il Disco di Poincaré è senza bordo:

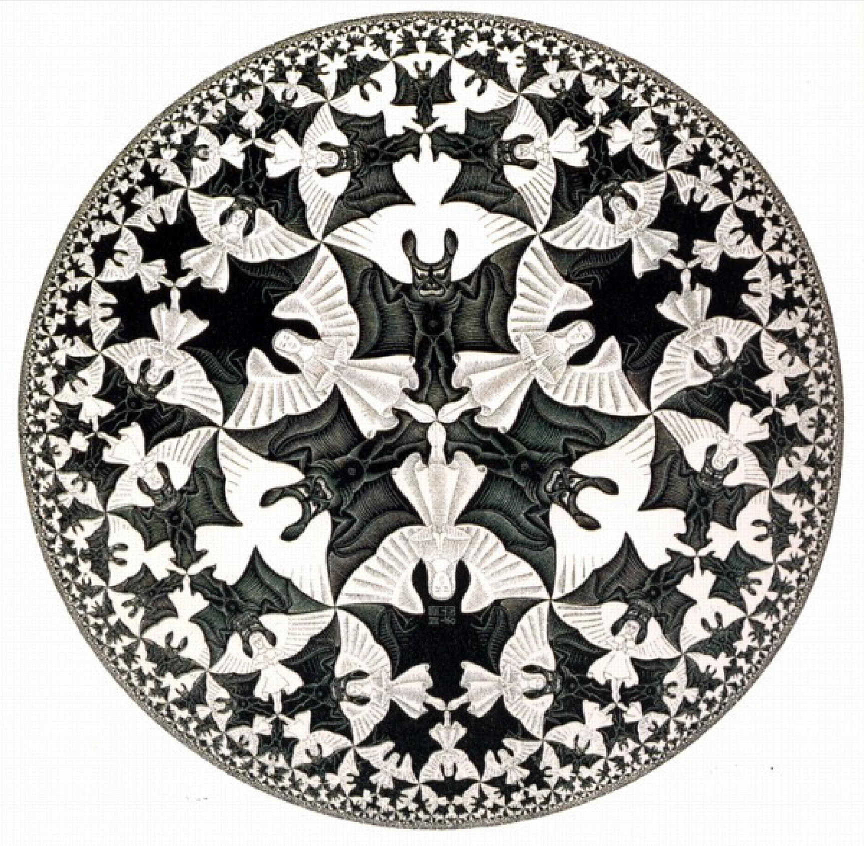
per un osservatore iperbolico che sta dentro il disco i punti sul   bordo sono infinitamente lontani

Tassellazioni del piano iperbolico

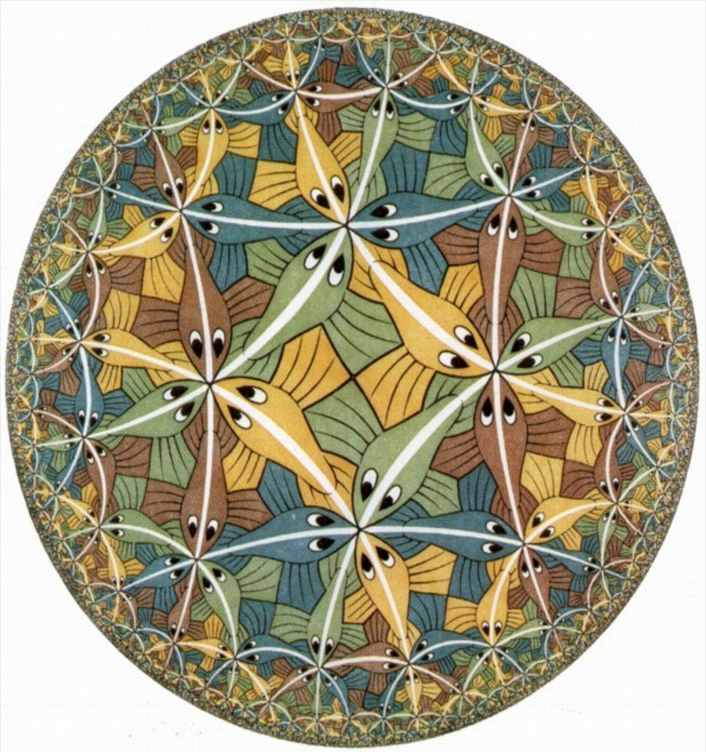
Un osservatore euclideo vede diventare sempre più piccolo un oggetto che un abitante iperbolico sposta nel piano iperbolico senza cambiarne le dimensioni (iperboliche!)



Escher amava le tassellazioni iperboliche...



M.C. Escher, Circle Limit IV (Heaven and Hell) (1960)



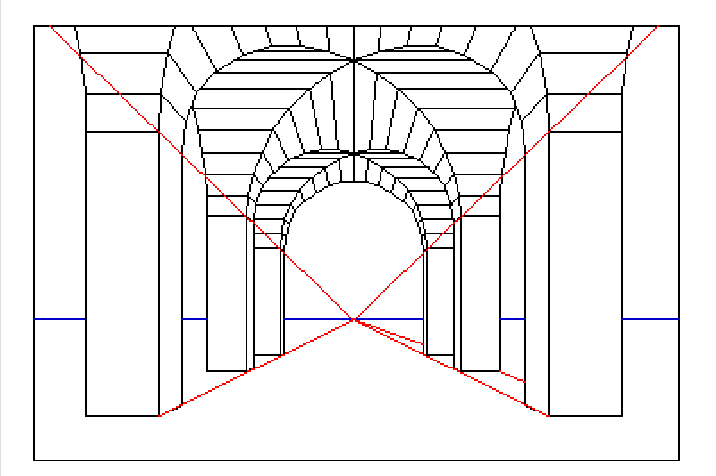
M.C. Escher, Circle Limit III, 1959.

Si somiglian poco, eppur son sorelle!

Felix **Klein** (1849 – 1925)

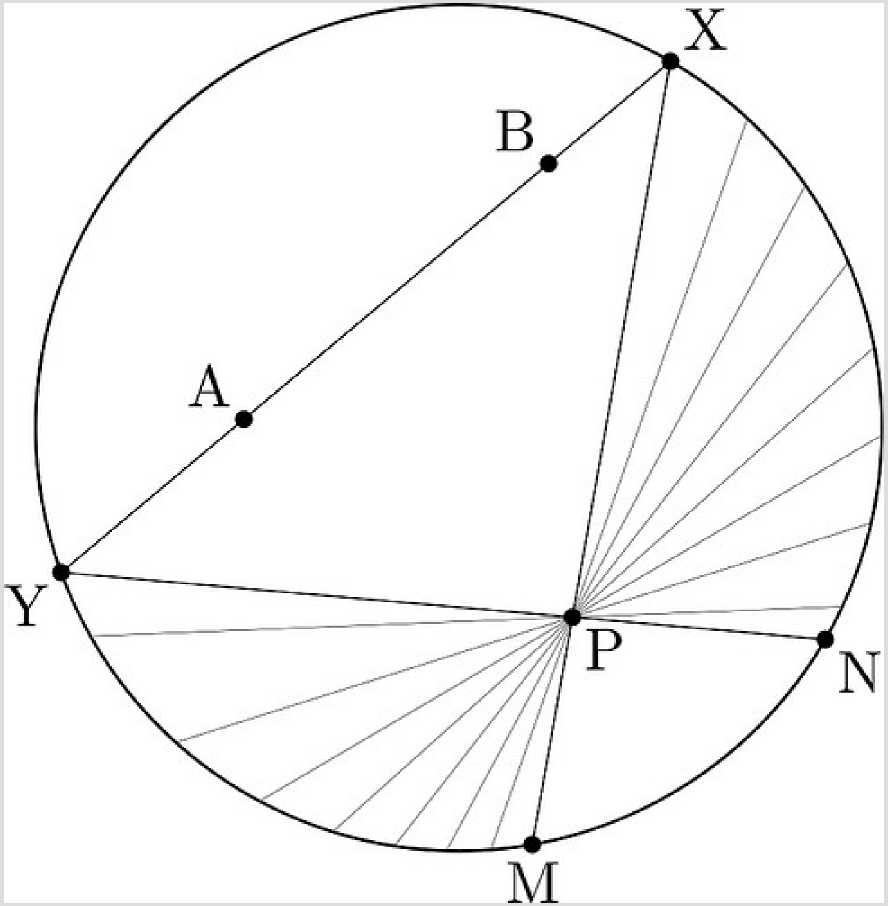
Dimostra che tutte le geometrie sono “figlie” di una stessa madre, la geometria proiettiva.

Nel piano proiettivo ci sono anche i punti all'infinito...

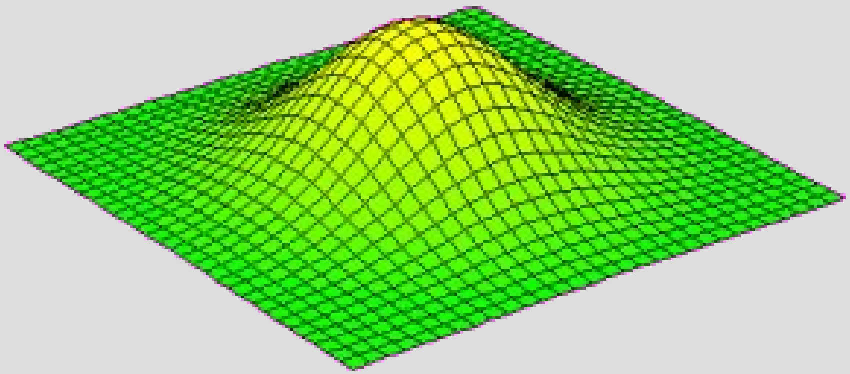


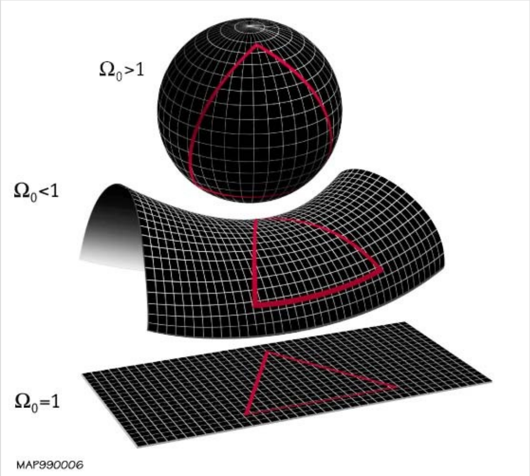
Coniche e geometrie

Se dal piano proiettivo eliminiamo una conica ed i punti “esterni” possiamo definire una distanza per i punti rimanenti in modo che punti e rette avranno un comportamento euclideo, ellittico o iperbolico a seconda del tipo (proiettivo) di conica che eliminiamo



Una geometria per ogni superficie





Riemann (1826-1866)

Su ogni superficie sufficientemente regolare possiamo definire una geometria: le rette sono le geodetiche della superficie.

Superfici a curvatura nulla: geom. euclidea

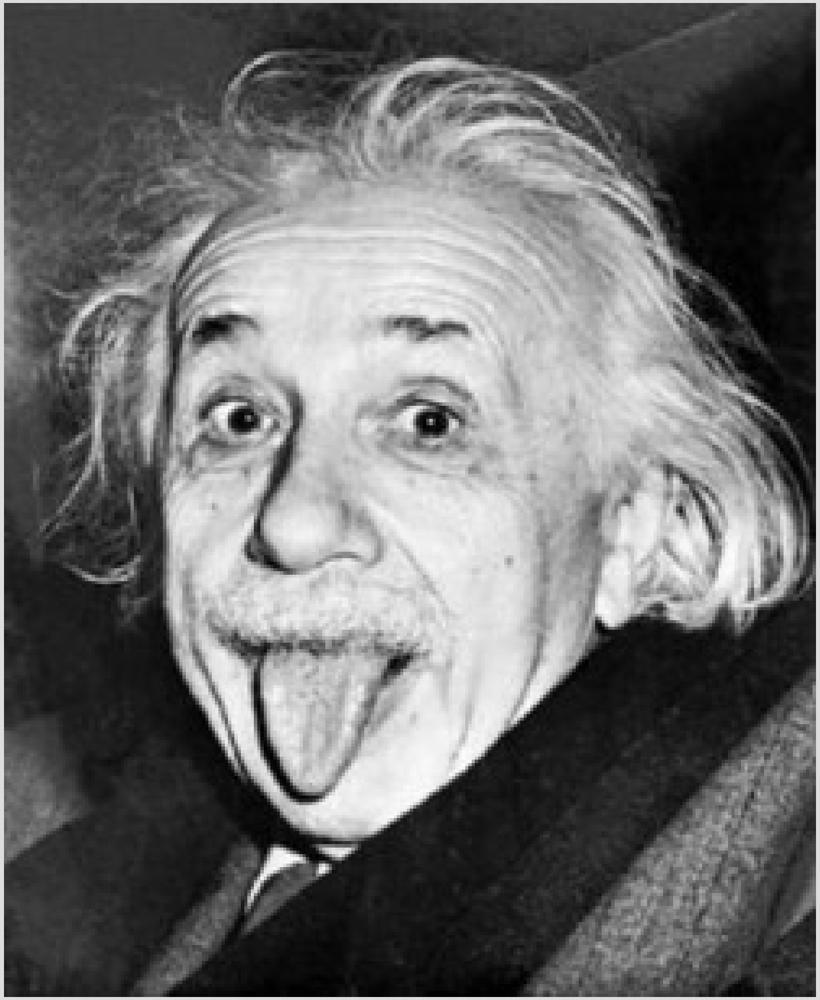
Superfici a curvatura positiva: geom. ellittica

Superfici a curvatura negativa: geom. iperbolica

Geometria e spazio/tempo

Lo spazio fisico intorno a noi è a 4 dimensioni (3 spaziali + 1 temporale)

La relatività generale ci dice che una particella che si muove liberamente nello spazio/tempo descrive una "retta" e che l'insieme di questi punti e di queste rette obbediscono alle leggi della geometria iperbolica...



FINE DELL'UNIVERSO E GEOMETRIA

- Se lo spazio ha curvatura nulla, non ha limiti e si espanderà per sempre con una velocità che tende a zero (spazio euclideo).
- Se lo spazio ha curvatura negativa, non ha limiti e si espanderà per sempre con una velocità costante da un certo momento in poi (spazio iperbolico).
- Se lo spazio ha curvatura positiva, l'espansione si fermerà e l'Universo iniziarà a collassare.

«Poiché sono possibili parecchie geometrie, siamo sicuri che proprio la nostra sia quella vera?... Per rispondere è necessario che prima ci poniamo la domanda sulla natura degli assiomi della geometria.

Sono essi giudizi a priori come vuole Kant? In tal caso ci si imporrebbero con tale forza che sarebbe impossibile concepire il contrario e quindi potremmo costruirvi sopra un edificio teorico; non ci sarebbero in tal caso geometrie non euclidee.

Gli assiomi della geometria sono dunque verità sperimentali? [...] Ma se la geometria fosse una scienza sperimentale, non potrebbe essere una scienza esatta; sarebbe soggetta a continue revisioni [...]

Gli assiomi della geometria non sono dunque né giudizi sintetici a priori né fatti di esperienza. Sono invece delle convenzioni; la nostra scelta, fra tutte le convenzioni possibili, è guidata da fatti sperimentali, ma resta libera e non trova dei limiti che nella necessità di evitare le contraddizioni.

In altre parole, gli assiomi della geometria non sono che definizioni camuffate.

Ed allora che cosa si deve pensare del problema se la geometria euclidea è vera? Tale problema è senza senso!

Altrettanto varrebbe domandare se il sistema metrico è vero e false le misure antiche; se le coordinate cartesiane sono vere e le polari false.

Una geometria non può essere più vera di un'altra; può essere soltanto più comoda.»

Jules-Henri Poincaré