Esplorando la Geometria Iperbolica

G. D'Agostino, S. Della Schiava, C. Lanera

24 settembre 2013

Indice

Elenco delle figure

Introduzione

Cenni storici

La geometria nasce come scienza della misura già fra gli antichi egiziani, vari millenni prima di Cristo. Anche gli antichi greci si dilettavano nello studio di figure e superfici, ma dobbiamo a Euclide (attorno al 300 a.C.) la prima raccolta e sistematizzazione del sapere matematico dell'epoca: gli *Elementi di Geometria*. Quest'opera in 13 volumi ebbe ampia diffusione e fu tradotta in moltissime lingue, tanto da essere considerata un'impareggiabile libro di testo per circa 2000 anni.

Euclide scrisse gli Elementi basandoli su affermazioni semplici ed intuitive dette *postulati*, grazie ai quali articolò i ragionamenti alla base delle dimostrazioni di proposizioni e teoremi. Nel primo libro degli Elementi troviamo la Geometria (piana) Euclidea alla cui base Euclide pose i seguenti cinque postulati:

I Per due punti distinti passa un'unica retta.

II Un segmento rettilineo può essere prolungato all'infinito.

III Esiste una circonferenza con un centro e un diametro dati.

IV Tutti gli angoli retti sono congruenti.

V Se una retta r interseca due rette in modo che la somma degli angoli interni dallo stesso lato di r sia minore di 180 gradi, allora le due rette si intersecano da quel lato.

Il postulato V di Euclide attira immediatamente l'attenzione a causa della sua complessità e lunghezza. Euclide stesso non lo utilizzò prima della proposizione 29:

la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180 *gradi,*

anteponedogli tutte le proprietà della Geometria piana che possono essere dimostrate senza bisogno del quinto postulato.

I postulati della Geometria Euclidea ci appaiono così ovvi che è difficile per noi immaginare una geometria che non li soddisfi. Nel corso dei secoli i matematici si sono arrovellati non tanto sulla verità o meno dei postulati di Euclide ma sulla loro indipendenza: per descrivere in modo completo la Geometria piana è necessario assumere tutti e cinque i postulati, oppure il quinto, che è di gran lunga il più lungo e complicato, è una conseguenza degli altri? In quest'ultimo caso il postulato V assumerebbe uno status simile al teorema che afferma che gli angoli opposti al vertice hanno uguale misura: non abbiamo bisogno di assumere questa proprietà come postulato, visto che riusciamo a ricavarla come teorema.

Per spiegare meglio la situazione, riproponiamo il problema in un ambito più semplice. Consideriamo solo i primi due postulati di Euclide e chiediamoci se il secondo non sia già una conseguenza del primo. Possiamo dimostrare il secondo postulato basandoci solo sulle regole logiche e sul primo postulato? In questo caso ci convinciamo facilmente che non è così aiutandoci con un *modello*. Consideriamo la geometria della superficie della terra invece di quella "ideale" di Euclide, in cui punti e rette sono quelli che riusciamo a disegnare sulla superficie terrestre; le "rette" di questa geometria sono quindi cerchi massimi di una sfera (dobbiamo disegnare "per terra" e la superficie della terra non è piatta . . .). Limitandoci poi a considerare i punti sull'emisfero boreale, cioè i punti che si trovano a nord dell'equatore (e quindi le semicirconferenze come nuove "rette") ci accorgiamo che per ogni coppia distinta di "punti" passa un'unica "retta". Quindi il primo postulato di Euclide è vero in questa geometria terrestre.

Consideriamo ora il secondo postulato: un segmento di retta terrestre (cioè una porzione di cerchio massimo) ha una lunghezza limitata dalla lunghezza dei semicerchi massimi della superficie terrestre e non è quindi prolungabile indefinitamente. Quindi il secondo postulato di Euclide non è valido nella geometria terrestre. Abbiamo quindi trovato una geometria dove il primo postulato è verificato ma non il secondo: questo ci dice che il secondo postulato non può essere dimostrato logicamente dal primo, altrimenti ogni geometria che rendesse vero il primo postulato dovrebbe obbligatoriamente verificare anche il secondo. Quindi il secondo postulato non è una conseguenza del primo.

Per molto tempo i matematici si sono domandati se il postulato V fosse conseguenza o meno degli altri, ovvero, se fosse possibile o meno immaginare una strana geometria in cui i punti e le rette soddisfino i primi quattro postulati di Euclide ma non il quinto. Una buona parte di loro pensò di aver dimostrato la *dipendenza* del quinto postulato dagli altri quattro e che quindi nessuna "geometria", per quanto strana, potesse soddisfare i primi quattro postulati senza soddisfare anche il quinto. Oggi sappiamo che tutti questi tentativi di dimostrazione sono errati perché si basano sull'implicita assunzione di qualche altra proprietà, oltre ai primi quattro postulati, ad esempio:

data una retta e un punto esterno ad essa, per quel punto passa un'unica parallela alla retta data (postulato di Playfair);

oppure

due rette parallele sono sempre equidistanti .

Questa situazione d'incertezza perdurava ancora agli inizi del 1800; furono Carl Fredrich Gauss, Nikolai Lobačhevski e Janos Bolyai, nei primi decenni del 1800, a credere per primi alla possibilità di una convivenza fra i primi quattro postulati e la negazione del quinto, sviluppando quella che oggi conosciamo con il nome di Geometria Iperbolica.

Figura 1: Johan Carl Fredrich Gauss (1777-1855)

Essi provarono a dimostrare nuovi teoremi geometrici a partire dai primi quattro postulati euclidei e dalla negazione del postulato V. La loro impresa ha dell'incredibile, visto che non potevano aiutarsi con una rappresentazione concreta degli oggetti che stavano studiando; in altre parole, non potevano utilizzare "disegni", cosa che tutti noi facciamo per risolvere anche i più semplici esercizi di Geometria Euclidea.

Figura 2: Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856)

Pur non avendo un modello concreto della nuova geometria, Gauss, Lobachevski e Bolyai si spinsero molto avanti nella sua esplorazione, arrivando a formulare teoremi di trigonometria e calcolo delle aree (ad esempio l'area di un triangolo nella nuova geometria non è data dalla formula (base $\times$ altezza)/2 ma si calcola dagli angoli).

Figura 3: Janos Bolyai (1802-1860)

La possibilità di concretizzare la nuova geometria e di "disegnare" figure iperboliche si realizzò qualche decennio più tardi grazie all'opera di Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Kline.

Figura 4: Jules Henri Poincaré (1854-1912).

In queste dispense visualizzeremo la Geometria Iperbolica facendo uso di un modello, dovuto a Poincaré, in cui le nuove rette sono costruite utilizzando particolari "curve" del Piano Cartesiano.

Per comprendere queste dispense è necessario avere una conoscenza di base della Geometria Euclidea piana, con particolare attenzione ai concetti di assioma, teorema, dimostrazione e ai risultati riguardanti il parallelismo fra rette nella Geometria Euclidea piana.

Nel primo capitolo viene data la definizione dei nuovi enti geometrici che compongono la geometria iperbolica: i punti e le rette iperboliche. Per avere una rappresentazione di questi oggetti faremo uso del piano cartesiano realizzando i nuovi punti e le nuove rette con oggetti familiari della geometria euclidea. Nei capitoli a seguire entreremo più a fondo nel mondo iperbolico, studiando anche triangoli e quadrilateri iperbolici, cercando di cogliere similitudini e differenze con il mondo euclideo.

1 Punti e rette nel Semipiano di Poincaré

In questo capitolo costruiremo degli oggetti, che chiameremo *punti* e *rette iperboliche*. I punti e le rette iperboliche sono oggetti costruiti sull'usuale Piano Cartesiano ma, come vedremo, non tutti i punti del Piano Cartesiano sono punti iperbolici e non tutte le rette iperboliche "somigliano" alle usuali rette euclidee. Nonostante ciò, ci sono molte proprietà della Geometria Euclidea che sono ancora valide nel sistema dei punti e delle rette iperboliche e con un po' di sforzo e si potrebbe verificare che soddisfano tutti i postulati di Euclide tranne il quinto.

L'insieme dei punti e delle rette iperboliche costituisce la *Geometria Iperbolica* (piana) e realizza la strana geometria sviluppata da Gauss, Bolyai e Lobačevskij agli inizi del 1800.

Dopo aver definito punti e rette, verificando che questi nuovi enti soddisfano il primo postulato, ci occuperemo della nozione di parallelismo fra rette passando direttamente ad occuparci del quinto postulato; non considereremo invece il secondo, il terzo e il quarto postulato, perché una loro verifica richiede la nozione di distanza e di misura degli angoli che verrà introdotta solo nei capitoli successivi. Alla fine del capitolo introdurremo la nozione di segmento di retta che ci sarà utile per definire i triangoli nel capitolo successivo.

1.1 Punti

Esistono differenti rappresentazioni per la Geometria Iperbolica piana; il modello che utilizzeremo in queste dispense è detto Semipiano di Poincaré e lo indicheremo in breve con la lettera $\mathbb{H}$. Tale insieme è costituito da tutti i punti del piano cartesiano con ordinata (strettamente) positiva, cioè dai $P = (x_P, y_P)$ con $x_P, y_P \in \mathbb{R}$ e $y_P > 0$ (vedi figura 5). In simboli

$$\mathbb{H} := \{P = (x_P, y_P) \mid x_P, y_P \in \mathbb{R},\ y_P > 0\}.$$

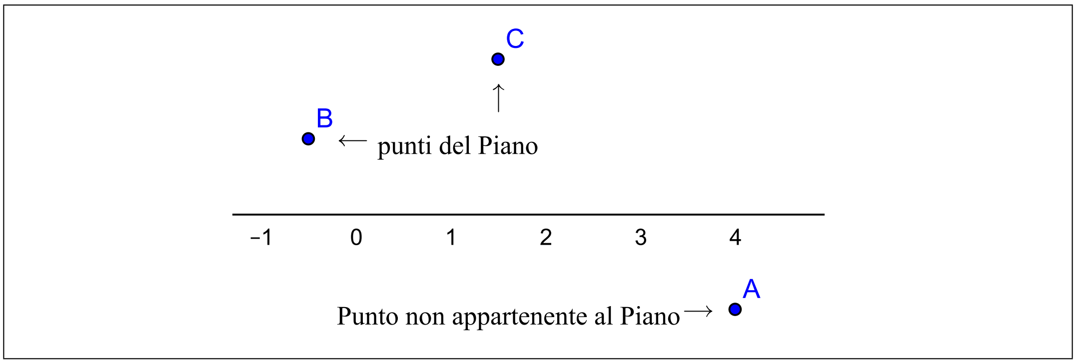

Figura 5: Punti del piano $\mathbb{H}$.

In questo modello l'asse delle x svolge un ruolo particolare: i suoi punti non fanno parte del Semipiano di Poincaré, così come non ne fanno parte i punti con ordinata negativa. L'asse in questione viene detto *Orizzonte*, per motivi che chiariremo in seguito.

I punti di $\mathbb{H}$ sono particolari punti del Piano Euclideo e sono facili da descrivere. La trattazione delle rette, invece, è più delicata e non tutte le nuove rette somigliano a rette euclidee: questo è il prezzo che il modello di Poincaré deve pagare per fare sì che il quinto Postulato non sia vero in questo ambiente, mentre gli altri quattro postulati continuano invece a valere.

1.2 Rette

Gli oggetti che nel Semipiano di Poincaré vengono chiamati *rette* sono di due tipi. Per descrivere una retta del primo tipo, fissiamo un numero reale k e consideriamo la retta euclidea verticale di equazione $x = k$, ovvero la retta verticale passante per il punto $(k, 0)$ del Piano Cartesiano. Tutti i punti di questa retta verticale con ordinata positiva appartengono alla nuova retta iperbolica che chiameremo L_k (vedi figura 6).

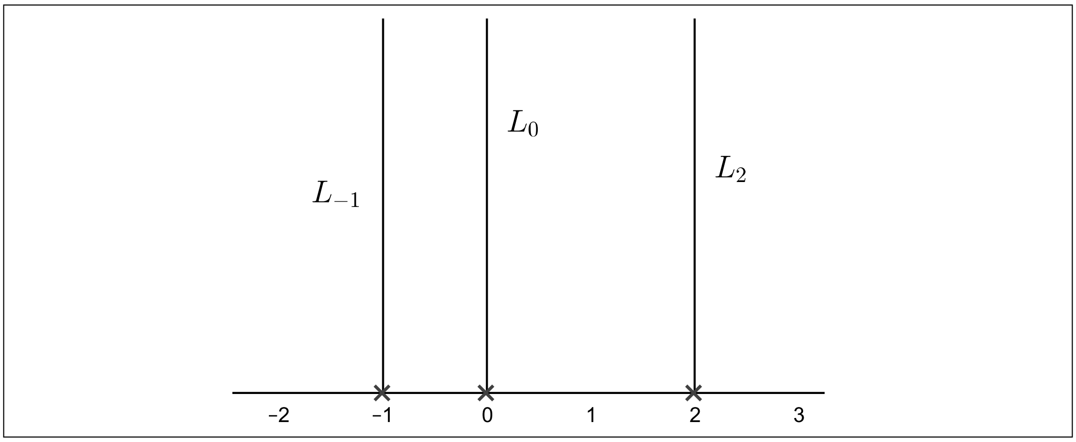

Figura 6: Rette del primo tipo.

Non possiamo però limitarci a considerare rette di questo tipo, altrimenti non varrebbe il postulato I, cioè quello che assicura l'esistenza di una retta per ogni coppia di punti distinti: se considerassimo soltanto rette del primo tipo, non ci sarebbe nessuna retta passante per punti che non sono allineati verticalmente, come ad esempio i punti $P = (0, 1)$ e $Q = (1, 1)$.

Dobbiamo introdurre dunque nuove rette, che chiameremo del secondo tipo. Queste rette non somigliano nemmeno a frammenti di rette euclidee, anzi, sono semicirconferenze private degli estremi e con centro sull'asse delle x! Per descrivere una retta di questo tipo fissiamo un numero $c \in \mathbb{R}$ ed $r > 0$: con questi elementi possiamo determinare la circonferenza euclidea di centro $(c, 0)$ e raggio r. Tutti i punti di questa circonferenza appartenenti ad $\mathbb{H}$ costituiscono una retta del secondo tipo che indicheremo con ${}_cL_r$ (vedi figura 7 nella pagina seguente). Tale retta iperbolica è quindi la semicirconferenza superiore della circonferenza euclidea di equazione $(x - c)^2 + y^2 = r^2$, privata degli estremi.

Esercizio 1.1. *Dimostra che nel Semipiano di Poincaré vale il postulato I di Euclide, ovvero:* ***per due punti distinti passa un'unica retta.***
[Suggerimento: verifica analiticamente la validità dell'assioma I nel Semipiano di

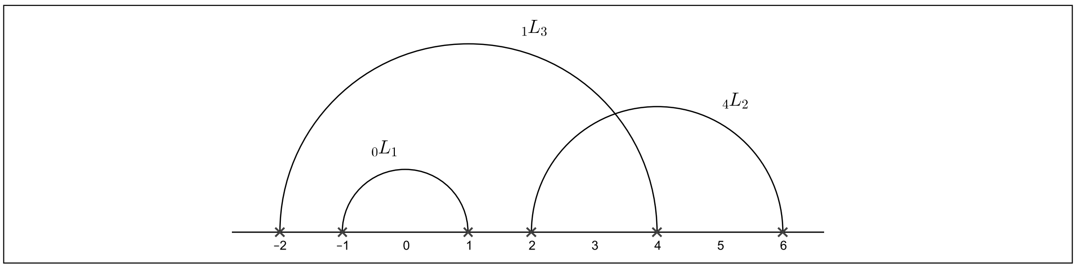

Figura 7: Rette del secondo tipo.

Poincaré: detti $P = (a, b)$ e $Q = (e, f)$ due punti del Semipiano, se $a = e$ la retta iperbolica avrà equazione .. altrimenti la retta iperbolica è la semicirconferenza superiore della circonferenza euclidea di equazione...]
Se le rette del secondo tipo fossero semicirconferenze superiori qualsiasi, senza il vincolo di appartenenza del centro all'asse delle x, varrebbe ancora il postulato sull'unicità delle rette passanti per due punti?

Dati due punti distinti A, B, chiamiamo $\overleftrightarrow{AB}$ l'unica retta iperbolica che passa per entrambi i punti. Nel pacchetto iperbolico di GeoGebra abbiamo inserito una macro per disegnare la retta contenente due punti distinti.

Esercizio 1.2. *Utilizza GeoGebra per disegnare due punti, e la retta passante per essi; muovere i punti osservando come si trasforma la retta.*

1.3 Parallelismo

Trattare di rette parallele nel Semipiano di Poincaré è questione delicata: esse sono le protagoniste del Postulato V di Euclide, dunque possiamo aspettarci che vi siano notevoli differenze tra parallele in senso euclideo e in senso iperbolico. Iniziamo dalla definizione.

Definizione 1. *Due rette r ed s sono parallele se coincidono oppure se non hanno punti in comune.*

Esercizio 1.3. *Con l'aiuto di GeoGebra, disegna due rette parallele distinte del primo tipo, due rette parallele distinte del secondo tipo e due rette parallele di tipi diversi.*

Esercizio 1.4. *Convinciti che tutte le proprietà in neretto elencate nei seguenti punti valgono per le usuali rette del Piano Cartesiano. Con l'aiuto di GeoGebra, attraverso esempi "dinamici", verifica la correttezza o meno delle stesse affermazioni nel Semipiano di Poincaré.*

1. ***Due rette distinte si intersecano al più in un punto.***
   Verifica visivamente e logicamente a partire dal primo assioma.

2. ***Data una retta r e un punto P esterno ad r, esiste una sola retta s parallela ad r e passante per P.***
   [Suggerimento: utilizza inizialmente una retta r del primo tipo e rette del secondo tipo che passano per P; prova poi anche con rette r del secondo tipo.]

3. ***Se r è parallela ad s ed s è parallela a t, allora r è parallela a t.***

1.4 Semirette e segmenti nel Semipiano di Poincaré

Data una retta iperbolica r e un suo punto P possiamo considerare le due *semirette* iperboliche che partono da P e sono contenute in r. Nella figura 8 le due semirette sono evidenziate in rosso e in blu.

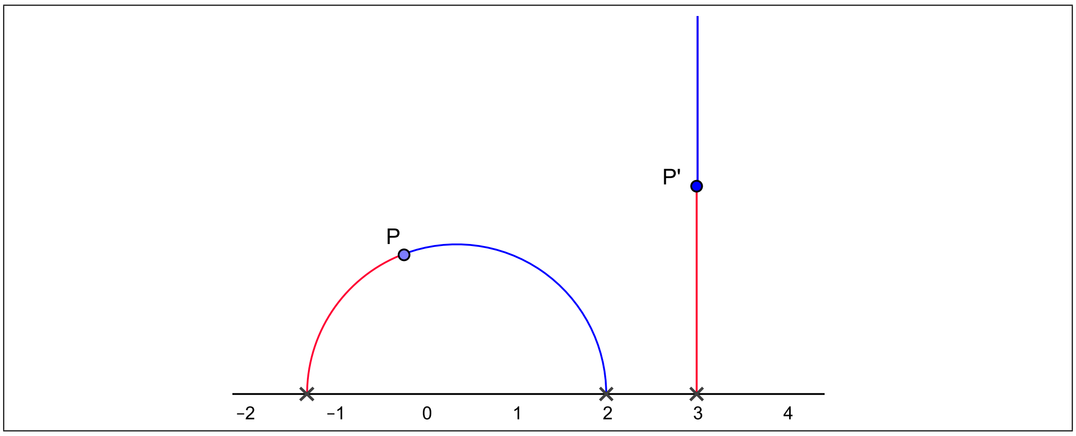

Figura 8: Semirette.

Esercizio 1.5. *Considera il punto* $P = (x_1, y_1)$ *e una retta del primo tipo* r *che passa per* P. *Che equazione ha la retta* r*? Come puoi caratterizzare le due semirette che hanno vertice in* P *e sono contenute in* r*?*
Se r *è una retta del secondo tipo di equazione* $(x - c)^2 + y^2 = r^2$ *che passa per* $P = (x_1, y_1)$*, come puoi caratterizzare le due semirette che hanno vertice in* P *e sono contenute in* r*?*

Dati due punti distinti A e B, chiamiamo $\overrightarrow{AB}$ l'unica semiretta che ha vertice in A e passa per B. Come nel caso delle rette, abbiamo semirette del primo o del secondo tipo, a seconda del tipo si retta in cui sono contenute.

Dati due punti distinti A e B possiamo anche considerare il segmento $\overline{AB}$ determinato dai due punti, definito come l'intersezione fra le semirette $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$. Vediamo alcuni esempi di segmenti, evidenziati in rosso, nella figura 9 nella pagina seguente:

Esercizio 1.6. *Dati due punti distinti* A *e* B*, caratterizza i punti che appartengono al segmento* $\overline{AB}$.
[Suggerimento: utilizza le coordinate di A *e di* B *e considera due casi, a seconda del tipo della retta* $\overleftrightarrow{AB}$.*]*

2 Angoli e Triangoli

2.1 Angoli

Come nel caso euclideo, gli angoli sono determinati da due semirette distinte $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ che si incontrano nel loro punto di origine P. Possiamo dunque distinguere vari

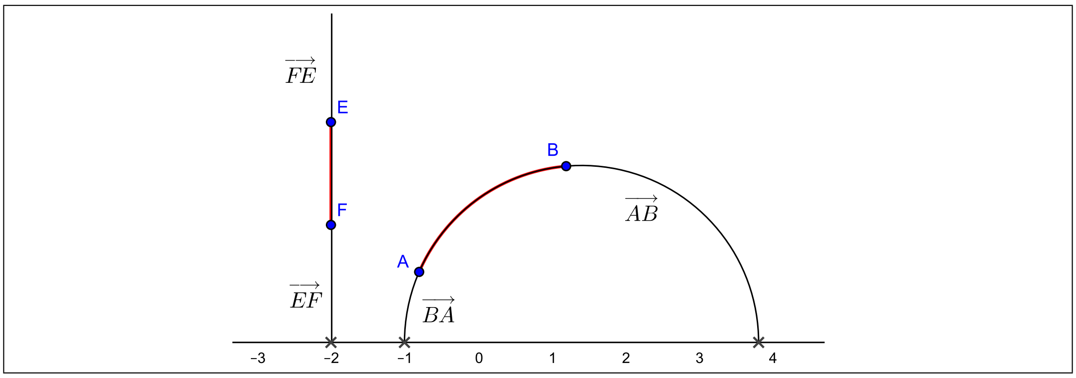

Figura 9: Segmenti.

casi, a seconda del tipo di semirette che formano l'angolo (vedi figura 10 nella pagina successiva).[1]

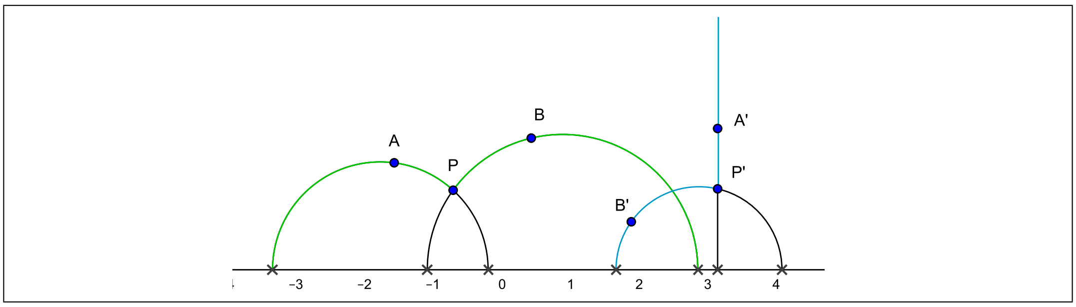

Figura 10: Angoli.

Per misurare l'ampiezza degli angoli nel piano iperbolico, prendiamo in prestito la misura degli angoli euclidei:

- se l'angolo iperbolico è formato da una semiretta iperbolica del primo tipo $\overrightarrow{PA}$ (che è quindi anche una semiretta euclidea) e da una semiretta iperbolica del secondo tipo $\overrightarrow{PB}$ (che non è una semiretta euclidea), definiamo la misura dell'angolo iperbolico fra $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ come segue: si considera la semiretta *euclidea* tangente all'arco di semicirconferenza in P, cioè, la semiretta euclidea che ha vertice in P e passa per B' come in figura 11 nella pagina seguente; poiché la semiretta euclidea $\overrightarrow{PB'}$ forma un angolo euclideo con la semiretta euclidea $\overrightarrow{PA}$, possiamo definire la misura dell'angolo iperbolico fra le semirette iperboliche $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ prendendo in prestito la misura euclidea fra le semirette euclidee $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB'}$ (attenzione! $\overrightarrow{PB'}$ è una semiretta euclidea e non una semiretta iperbolica e viene usata SOLO come strumento per misurare l'ampiezza dell'angolo iperbolico);

- se l'angolo iperbolico è formato da due archi di semicirconferenza $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, come misura dell'angolo si considera la misura dell'angolo euclideo fra le due semirette tangenti agli archi di circonferenza (nella figura 12 nella pagina successiva, quelle che hanno vertice in P e passano per A' e B');

[1] Attenzione: in queste dispense chiamiamo "angolo" l'insieme dei punti che appartengono alle semirette e non i punti che stanno fra esse.

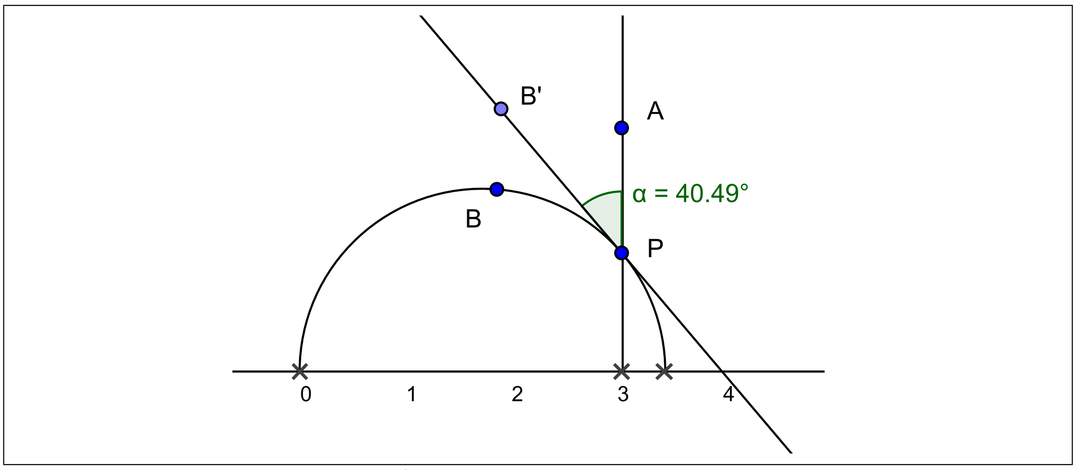

Figura 11: Angolo tra semirette di tipi diversi.

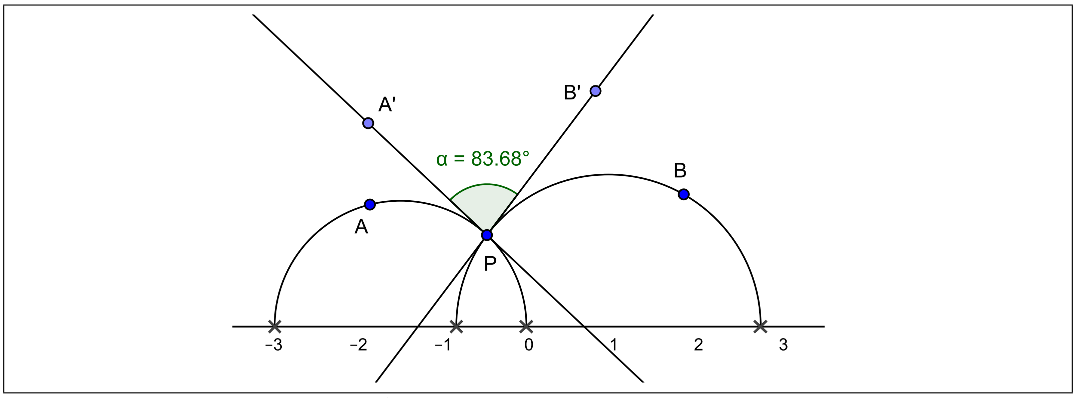

Figura 12: Angolo tra semirette del secondo tipo.

- se le due semirette sono distinte ma individuano la stessa retta abbiamo un angolo *piatto*, ovvero un angolo con misura pari a 180 gradi (vedi figura 13 a pagina 12).

Notiamo che utilizzando la definizione appena data, la misura di un angolo è sempre minore o uguale a quella di un angolo piatto. Nel pacchetto iperbolico di GeoGebra abbiamo inserito una macro per misurare gli angoli, con la possibilità di scegliere fra misure in gradi sessagesimali o radianti. Prova a costruire un angolo e a misurare la sua ampiezza con la macro.

Un'altra macro inserita tra gli strumenti di GeoGebra permette di costruire angoli di data misura.

2.2 Rette Perpendicolari

Ora che abbiamo visto come misurare l'ampiezza degli angoli, possiamo definire la perpendicolarità fra rette.

Definizione 2. *Due rette r e s si dicono perpendicolari se si incontrano formando quattro angoli di 90 gradi.*

Esercizio 2.1. *Con l'aiuto di GeoGebra, ma senza usare la macro apposita, disegna due rette perpendicolari (puoi comunque usare la macro per la costruzione degli*

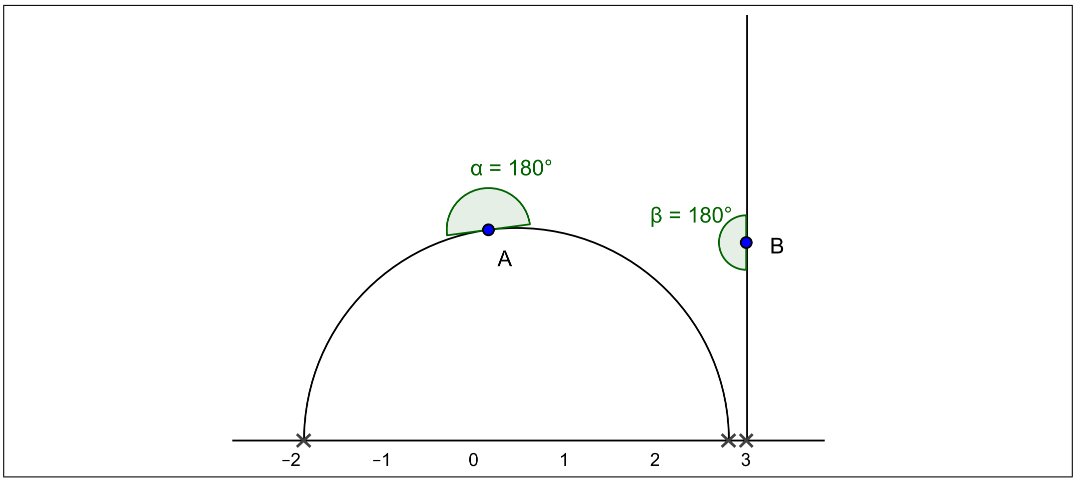

Figura 13: Angoli piatti.

angoli). È possibile trovare due rette del primo tipo che risultino essere perpendicolari fra loro?

Esercizio 2.2. *Convinciti che tutte le proprietà in neretto elencate nei seguenti esercizi valgono per le usuali rette del Piano Cartesiano. Con l'aiuto di GeoGebra, attraverso esempi dinamici, verifica nel Semipiano di Poincaré la correttezza o meno delle stesse affermazioni.*

1. ***Date due rette incidenti, gli angoli opposti al vertice hanno la stessa misura.***

2. ***Data una retta r e un punto P appartenente a r, esiste un'unica retta perpendicolare a r e passante per P.***
   Se la retta r è del primo tipo $r = L_k$ e $P = (k, h)$ quale sarà l'equazione della retta (iperbolica!) perpendicolare a r e passante per P?
   Nel caso di rette del secondo tipo utilizza GeoGebra per convincerti dell'esistenza e dell'unicità della perpendicolare: data una retta r del secondo tipo, due punti $P, B \in r$ e un punto esterno D, costruisci la semiretta $\overrightarrow{PD}$, misura l'angolo $\angle BPD$ e sposta D fino a raggiungere circa 90 gradi. Costruisci poi con l'apposita funzione la perpendicolare a r, passante per P.

3. ***Data una retta r e un punto P non appartenente a r, esiste un'unica retta perpendicolare a r e passante per P.***

4. ***La doppia perpendicolare è parallela alla retta di partenza.***
   Data una retta r e un punto P esterno ad r, costruisci la retta s perpendicolare a r per P. Considera poi la retta t perpendicolare a s per P (aiutati con le macro di GeoGebra). La retta t si chiama "doppia perpendicolare" a r per P.

5. ***Due rette parallele hanno sempre una perpendicolare comune.***
   [Suggerimento: come sono le rette perpendicolari a rette del primo tipo?]

6. ***Se due rette r e s sono parallele, allora ogni retta perpendicolare a r è perpendicolare anche a s.***

2.3 Triangoli

Tre punti A, B e C si dicono *allineati* se esiste una retta r che contiene sia A che B che C. In caso contrario (quando cioè non esiste alcuna retta che contiene A, B e C) diremo che i tre punti sono *non allineati*. Il fatto che tre punti siano o meno allineati dipende chiaramente da quali sono le rette della geometria.

Esercizio 2.3. *Trova tre punti del piano iperbolico A, B e C che siano allineati rispetto alle usuali rette del piano cartesiano, ma non lo siano dal punto di vista iperbolico.*

Se tre punti sono non allineati, possiamo usarli per definire un *triangolo*. Alcuni esempi sono riportati in figura 14.

Definizione 3. *Dati tre punti A, B, C non allineati, definiamo il triangolo $\triangle(A, B, C)$ come l'unione dei tre segmenti $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.*[2]

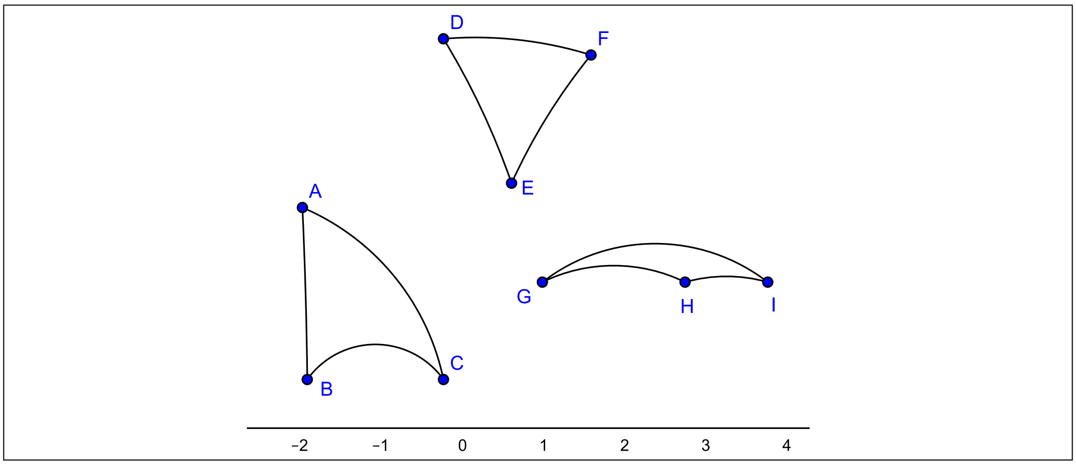

Figura 14: Tre tipi di triangoli.

Un triangolo $\triangle(A, B, C)$ ha tre angoli interni come evidenziato in figura 15 nella pagina seguente dove, nelle tre copie del medesimo triangolo $\triangle(A, B, C)$, sono evidenziati gli angoli interni e le semirette che li determinano.

Un triangolo ha anche (sostanzialmente) tre angoli esterni, ottenuti "prolungando" i lati del triangolo come in figura 16 nella pagina successiva, dove nelle tre copie dello stesso triangolo $\triangle(A, B, C)$ sono evidenziati gli angoli esterni e le semirette che li determinano.

2.4 Esercizi

Verifica la correttezza delle seguenti affermazioni con esempi dinamici GeoGebra.

1. **Teorema dell'angolo esterno, prima versione:** la misura dell'angolo esterno è maggiore della misura degli angoli interni non adiacenti.

[2] Come nel caso dell'angolo, stabiliamo che un triangolo sia l'insieme dei suoi lati, non dei suoi punti interni.

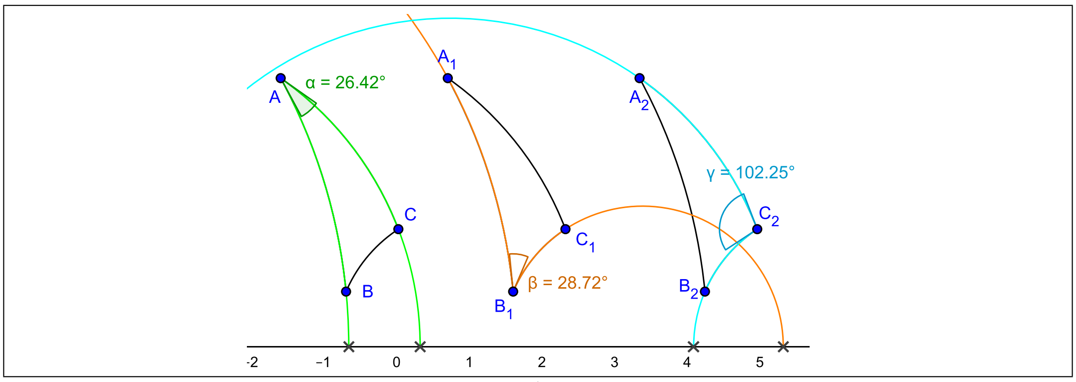

Figura 15: Angoli interni.

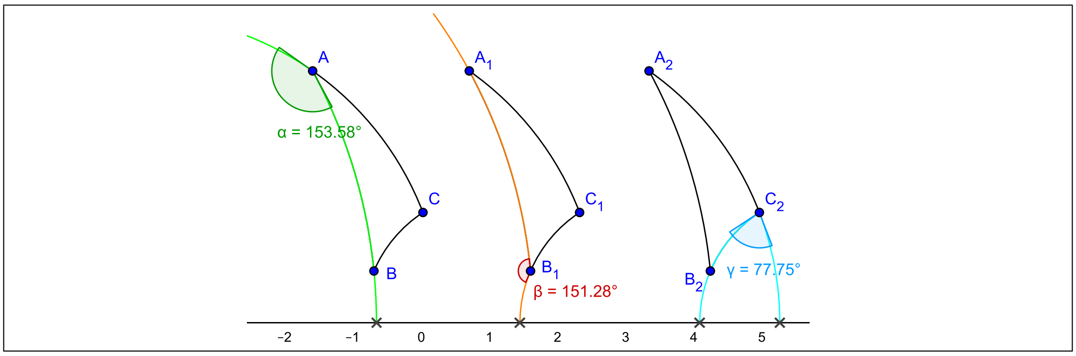

Figura 16: Angoli esterni.

2. **Teorema dell'angolo esterno, seconda versione:** la misura dell'angolo esterno è uguale alla somma della misura degli angoli interni non adiacenti.

3. **La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è sempre 180 gradi.**
   Puoi formulare una congettura sulla somma?

4. **Esistenza dell'incentro:** le bisettrici di un triangolo si incontrano sempre in un punto.

5. **Esistenza dell'ortocentro:** le altezze di un triangolo si incontrano sempre in un punto.

3 Distanza tra punti

Siamo ora giunti a un punto delicato: dobbiamo introdurre un metodo per calcolare la lunghezza di un segmento $\overline{AB}$ nel Semipiano di Poincaré. Se riconsiderassimo i primi quattro postulati di Euclide ci accorgeremmo che il secondo e il terzo postulato parlano esplicitamente del concetto di lunghezza; in particolare il secondo postulato ci assicura che ogni segmento è infinitamente prolungabile. Se vale questo postulato, quindi, dato un segmento $\overline{AB}$ ed un qualsiasi numero reale r, grande a piacere, possiamo trovare un punto C sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$ tale che il segmento $\overline{AC}$ abbia lunghezza uguale a r. Ora, il secondo postulato vale anche nel Sempiano di Poincaré; questo ci fa capire come la lunghezza a cui siamo abituati, la lunghezza Euclidea che utilizziamo sul Piano Cartesiano, non sia utilizzabile sul Semipiano di Poincaré. Consideriamo infatti il segmento $\overline{AB}$ determinato dai punti $A = (0, 2)$ e $B = (0, 1)$ sul Semipiano di Poincaré. Se calcolassimo le lunghezze come nel Piano Cartesiano, nessun segmento $\overrightarrow{AC}$ con C sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$ potrebbe avere lunghezza maggiore di 2!

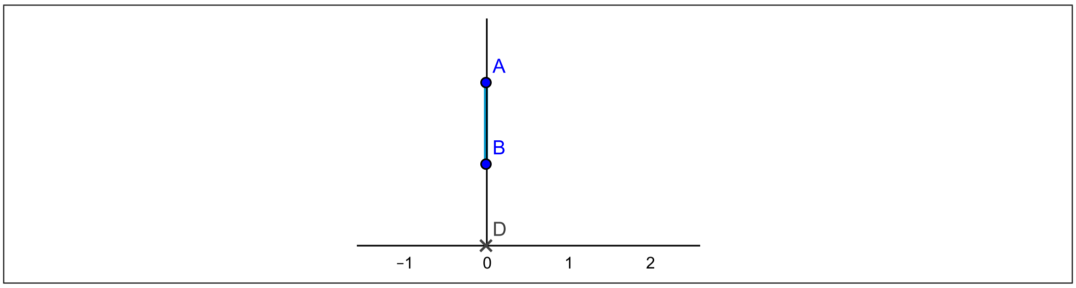

Figura 17: Segmento verticale $\overline{AB}$.

D'altra parte, questa difficoltà non dipende dalla mancanza di punti: la semiretta $\overrightarrow{AB}$ ha infiniti punti anche sul Semipiano di Poincaré. Dobbiamo però trovare il modo di amplificare la distanza euclidea in modo da poter trovare, sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$ della figura 17, sia un punto a distanza 1 da A, che uno a distanza 2, 3, ecc. da A. In altre parole, gli infiniti punti che stanno fra A e D dovranno permetterci di realizzare il secondo postulato, definendo la lunghezza dei segmenti in modo che il segmento $\overline{AC}$ cresca illimitatamente all'avvicinarsi del punto C al punto D.

Ora è quindi chiaro perché l'asse delle ascisse è detto orizzonte del Semipiano di Poincaré: come da linguaggio comune è quella linea sullo sfondo irraggiungibile sebbene sia visibile e apparentemente non così lontana.

Anche un segmento $\overrightarrow{AB}$ del secondo tipo, contenuto cioè in una retta del secondo tipo deve essere prolungabile all'infinito, sia sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$ che su quella $\overrightarrow{BA}$.

Una lunghezza che soddisfa queste proprietà esiste ed è stata implementata negli strumenti iperbolici di GeoGebra.

Esercizio 3.1. *Disegna i punti $A = (0, 1)$ e $B = (0, 0.5)$ sul Semipiano. Utilizzando anche la funzione di zoom, trova un punto C sulla semiretta $\overrightarrow{AB}$ in modo che il segmento $\overline{AC}$ abbia lunghezza 1. Trova altri punti in modo che la lunghezza del segmento $\overline{AC}$ sia 2 o 3 o 5.*

Per definire formalmente la lunghezza di un segmento nel Semipiano di Poincaré distinguiamo due casi, a seconda della tipologia di retta contenente il segmento in questione.

Per prima cosa consideriamo una retta del primo tipo, ad esempio L_0 (vedi fig. 18 nella pagina successiva).

Ovviamente, fissati due punti A e B come nella figura 18 nella pagina seguente, man mano che spostiamo B verso l'alto la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ deve aumentare, come nel caso euclideo. Il problema è che nel Semipiano di Poicaré questo deve accadere anche quando B, superato il punto A, si avvicina sempre più all'orizzonte.

Concentriamoci per il momento sulla lunghezza di un segmento $\overline{AB}$ dove $A = (0, a)$, con $a > 0$, e facciamo variare $B = (0, b)$ sul semiasse positivo delle ordinate.

Quello che ci aspettiamo dalla lunghezza $\ell(\overline{AB})$ del segmento $\overline{AB}$ è che:

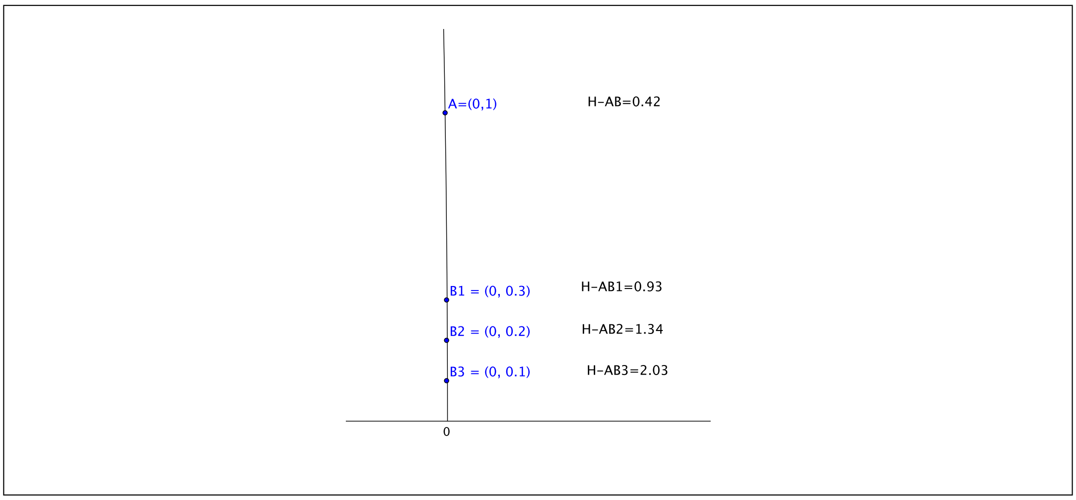

Figura 18: Come varia la distanza nelle rette verticali quando un estremo si avvicina all'orizzonte.

- $\ell(\overline{AB})$ assuma valore 0 quando $b = a$ (cioè: quando i punti A e B coincidono);
- se facciamo crescere b, ad esempio ponendo $b = 10a$, $b = 100a, ...$, la lunghezza $\ell(\overline{AB})$ cresca illimitatamente;
- se facciamo diminuire b avvicinandoci a zero, ad esempio ponendo $b = a/10$, $b = a/100, \ldots$, la lunghezza $\ell(\overline{AB})$ cresca illimitatamente;
- se $0 < a < b < c$ e $C = (0, c)$ allora $\ell(\overline{AB}) + \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{AC})$.

Queste proprietà possono essere realizzate attraverso la funzione logaritmo: questa funzione diventa sempre più grande, superando qualsiasi lunghezza fissata, se la calcoliamo su valori sempre più grandi, mentre diventa un numero negativo sempre più piccolo se la calcoliamo su valori che si avvicinano a zero.

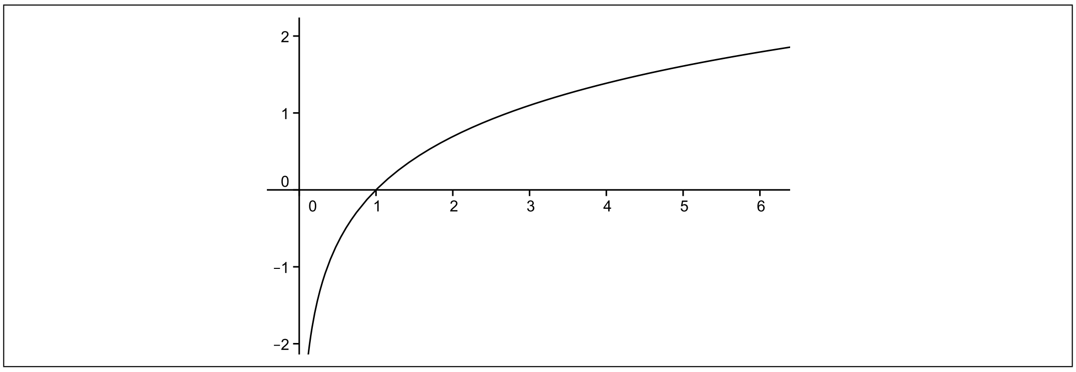

Figura 19: Funzione del logaritmo naturale.

Se $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ e considerando i valori di $|ln(a/b)|$, al variare di b, ci accorgiamo che:

- $|ln(a/b)|$ assume valore 0 quando $b = a$ (cioè: quando i punti A e B coincidono);

- se facciamo crescere b, ad esempio ponendo $b = 10a$, $b = 100a, ...$, il valore di a/b diventa sempre più vicino a zero, e $|ln(a/b)|$ cresce illimitatamente;
- se facciamo diminuire b avvicinandoci a zero, ad esempio ponendo $b = a/10$, $b = a/100, \ldots$, il valore di a/b diventa sempre più grande e il modulo $|ln(a/b)|$ cresce illimitatamente;

Infine se consideriamo tre punti $A(= 0, a), B = (0, b)$ e $C = (0, c)$ con $0 < a < b < c$ allora

$$\begin{aligned} |\ln(a/b)| + |ln(b/c)| &= -(ln(a/b) + ln(b/c)) = -ln((a/b)(b/c) \\ &= -ln(a/c) = |ln(a/c)|. \end{aligned}$$

Queste proprietà suggeriscono se $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ di definire la lunghezza iperbolica del segmento $\overline{AB}$ come

$$\ell(\overline{AB}) = |ln(a/b)|,$$

e non è difficile verificare che la stessa formula per la distanza può essere adottata anche nel caso di due punti $A = (d, a)$ e $B = (d, b)$ appartenenti ad una generica retta del primo tipo L_d.

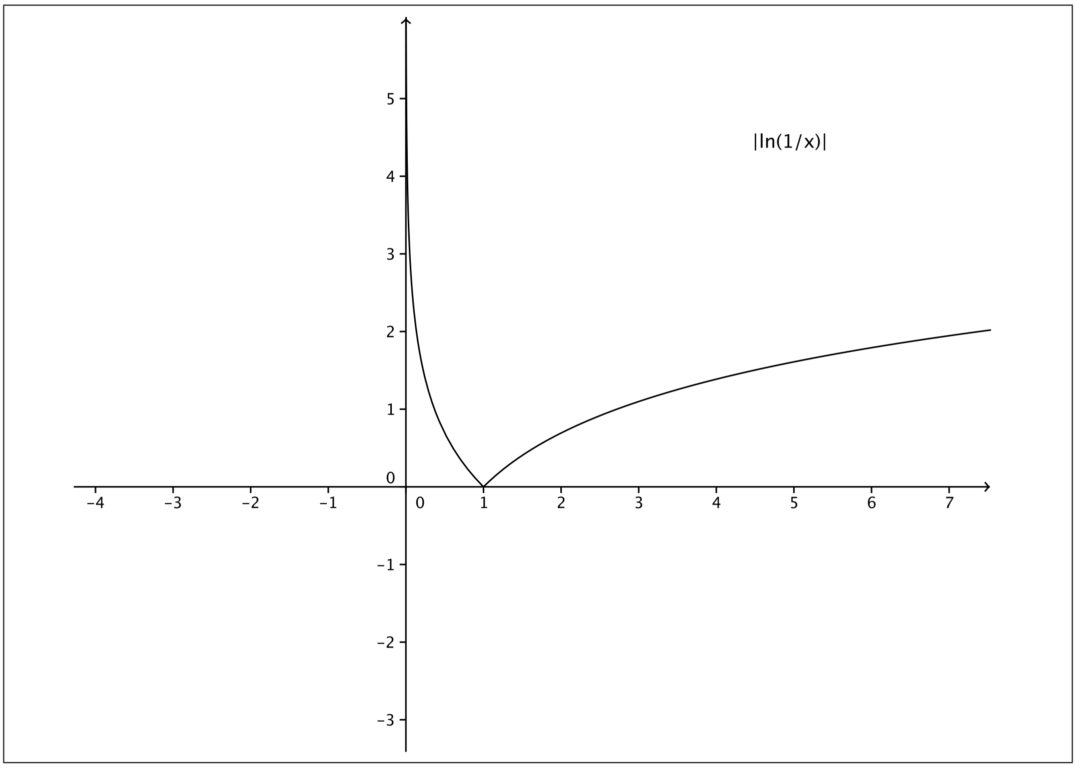

Figura 20: Funzione modulo del logaritmo naturale $|\ln(1/x)|$.

Consideriamo ora una retta ${}_cL_r$ (del secondo tipo, fig. 21 nella pagina successiva). Come nel caso analizzato, fissato un punto B e facendo variare A (indifferentemente a destra o sinistra) dobbiamo essere in grado di costruire segmenti di qualsiasi lunghezza.

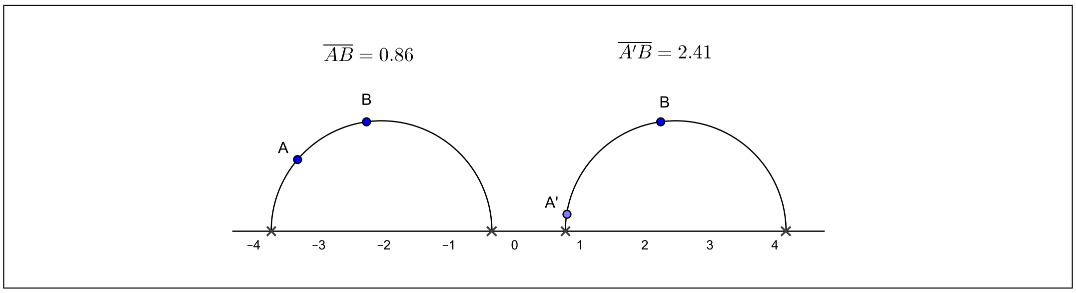

Figura 21: Esempi di come varia la distanza nelle rette del secondo tipo quando un estremo si avvicina all'orizzonte.

Esercizio 3.2. *Disegna i punti* $A = (0, 1)$ *e* $B = (1, 1)$ *sul Semipiano di Poincaré. Utilizzando anche la funzione di zoom, trova un punto* C *sulla semiretta* $\overrightarrow{AB}$ *in modo che il segmento* $\overline{AC}$ *abbia lunghezza* 1*. Trova altri punti in modo che la lunghezza del segmento* $\overline{AC}$ *sia* 2 *o* 3 *o* 5*.*

La definizione formale della lunghezza di un segmento del secondo tipo è costruita ancora a partire dal logaritmo, ma la funzione utilizzata è più complicata a causa della curvatura delle rette iperboliche del secondo tipo. Supponiamo che i punti siano $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e che la semiretta iperbolica che li contiene abbia centro in $C = (c, 0)$ e raggio r. La definizione della lunghezza iperbolica del segmento $\overline{AB}$ è allora:

$$\ell(\overline{AB}) = \left| \ln\Big(\frac{(x_A - c + r)/y_A}{(x_B - c + r)/y_B} \Big) \right|.$$

Esercizio 3.3. *Utilizzando lo strumento "punto medio" trova il punto medio del segmento* $\overline{AB}$ *per i punti* $A = (0, 5)$*,* $B = (0, 3)$*, oppure* $A = (1, 2)$*,* $B = (3, 1)$*, notando la differenza con il Piano Cartesiano.*

Esercizio 3.4. *Disegna un triangolo e le sue mediane. Disegna un triangolo e i suoi assi.*

Esercizio 3.5. *Verifica l'esistenza dei seguenti punti:*

1. ***Esistenza del baricentro*** *(intersezione delle mediane).*
2. ***Esistenza del circocentro*** *(intersezione degli assi).*

Esercizio 3.6. *Fissato un triangolo, il prodotto della lunghezza di un lato e dell'altezza relativa al vertice opposto al lato non dipende dal lato scelto.*

Esercizio 3.7. *Disegna un punto* C *del Semipiano di Poincaré e due rette perpendicolari passanti per* C*. Trova un punto a distanza* 0.5 *su ciascuna delle quattro semirette così determinate. Usa lo strumento circonferenza iperbolica di dato centro e raggio per costruire la circonferenza iperbolica di centro* C *e raggio* 0.5*.*
Nota: le rette iperboliche non sempre somigliano a rette euclidee; cosa possiamo dire delle circonferenze iperboliche?

3.1 Congruenze tra triangoli

Sapendo come misurare gli angoli e i segmenti, possiamo parlare di congruenza tra triangoli. Date le diversità tra il Piano Cartesiano e il Semipiano di Poincaré, potremmo pensare che sotto questo aspetto i triangoli abbiano un comportamento differente da quello studiato in Geometria Euclidea, ma non è così.

Negli *Elementi*, Euclide, aveva trascurato o non reso espliciti alcuni punti, tra cui un Postulato riguardante la congruenza dei triangoli. Ricordiamo che *congruente* significa *della stessa misura*, riferito sia a segmenti che ad angoli e triangoli. Il postulato dimenticato da Euclide afferma che due triangoli con due lati e l'angolo ad essi compreso congruenti sono a loro volta congruenti, cioè, anche la misura del terzo lato e degli altri due angoli è la stessa. Questo Postulato, detto LAL (Lato-Angolo-Lato), è fondamentale per dimostrare i principali teoremi sui triangoli, tra cui il secondo criterio di congruenza ALA (Angolo-Lato-Angolo)) ed il terzo criterio di congruenza LLL (Lato-Lato-Lato).

Esercizio 3.8. 1. *Verifica la correttezza di LAL sul Semipiano di Poincaré.*

2. *Formula il criterio ALA e verificane la correttezza sul Semipiano di Poincaré.*

3. *Formula il criterio LLL. Descrivi una costruzione che garantisca la costruzione di due triangoli con lati della stessa misura. Verifica che, in siffatti due triangoli, gli angoli corrispondenti (rispetto ai lati della stessa misura) hanno la stessa misura.*

Esercizio 3.9. *Verifica la correttezza o meno delle seguenti proprietà sul Semipiano di Poincaré.*

1. ***Pons Asinorum:*** *gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti.*

2. ***Inverso del Pons Asinorum:*** *se gli angoli alla base di un triangolo sono congruenti, il triangolo è isoscele.*

3. ***In un triangolo, a lato maggiore corrisponde angolo (opposto) maggiore.***

4. ***Gli angoli alla circonferenza misurano la metà degli angoli al centro.***

5. ***La somma delle lunghezze di due lati di un triangolo è sempre maggiore della lunghezza del terzo lato.***

6. ***Teorema di Pitagora.***

3.2 Distanza tra rette

La distanza $d(P, r)$ fra un punto P ed una retta r si definisce come la misura del segmento che congiunge P con il piede della perpendicolare da P a r. Vediamo un confronto grafico tra distanza punto-retta euclideo ed iperbolico nella seguente immagine:

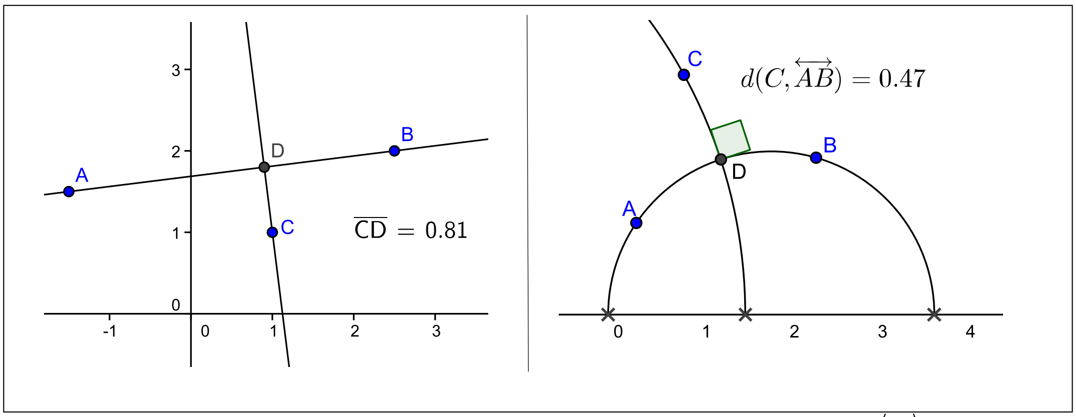

Figura 22: A sinistra: distanza euclidea del punto C dalla retta $\overleftrightarrow{AB}$. A destra: distanza iperbolica.

Esercizio 3.10. *Sfruttando Geogebra, convinciti che, cosí come avviene nel Piano Cartesiano, anche nel Semipiano di Poincaré la perpendicolare realizza la distanza minima di un punto da una retta (questa è infatti una proprietà che si dimostra senza usare il V Postulato).*

Date due rette parallele r, s nel Piano Cartesiano, notiamo che al variare del punto P su s la distanza $d(P, r)$ si mantiene costante: in altre parole, le due rette r, s sono *equidistanti* (Fig. 23).

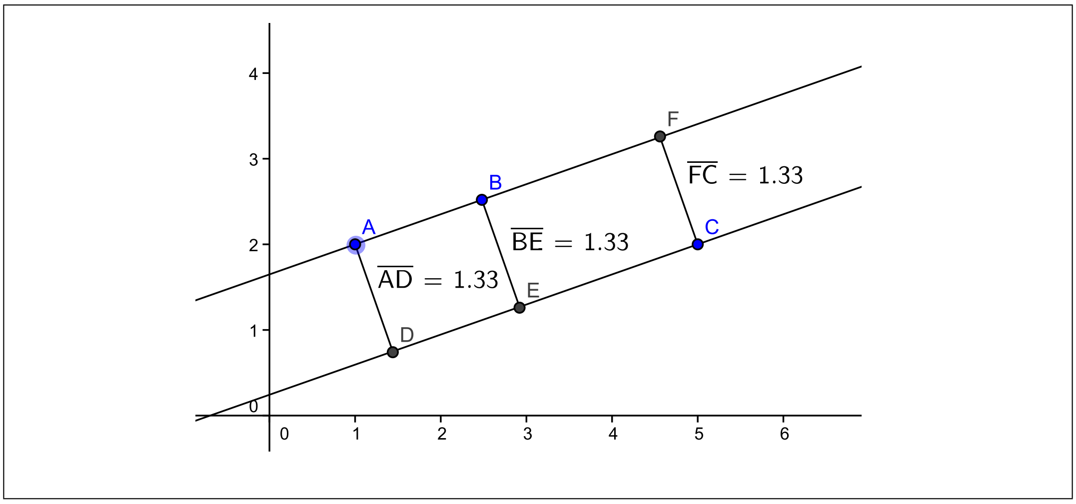

Figura 23: Distanza tra due parallele nel Piano Cartesiano.

L'equidistanza fra rette parallele è stata a lungo considerata come una proprietà imprescindibile di una geometria: come potremmo immaginare due rette parallele che non siano equidistanti? Il Semipiano di Poicaré ci permette di capire che esistono geometrie in cui vi sono rette di questo tipo. Consideriamo due rette parallele del primo tipo nel Semipiano di Poincaré, ad esempio le rette L_{-1} ed L_2. Dati due punti P, Q su L_{-1} calcoliamo le distanze $d(P, L_2)$, $d(Q, L_2)$, come nella figura 24 nella pagina seguente; ci accorgiamo facilmente che la distanza non si mantiene costante.

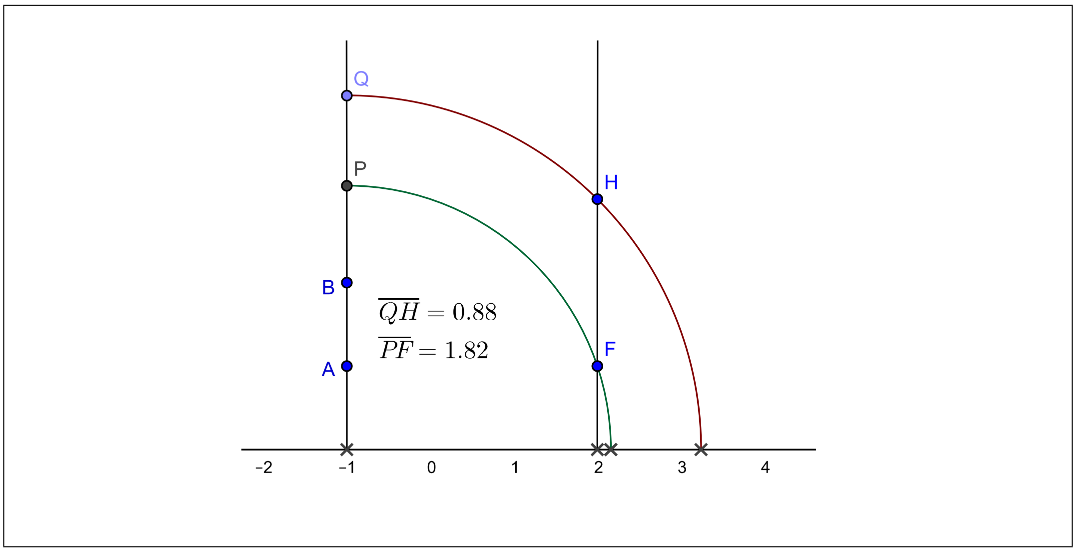

Figura 24: Distanze tra le rette L_{-1} ed L_2.

Definizione 4. *Due rette parallele r, s si dicono asintotiche se esiste un verso di s per cui la distanza $d(P, r)$, con P punto di s, diminuisce assumendo valori sempre più prossimi a 0 quando P si sposta seguendo tale verso di s, mentre aumenta assumendo valori grandi a piacere quando P si sposta nel verso opposto di s.*

In geometria euclidea non esistono rette asintotiche, mentre ne abbiamo in abbondanza nel Semipiano di Poincaré:

Esercizio 3.11. *Dopo aver disegnato L_{-1} ed L_2 con Geogebra, preso un punto $P \in L_{-1}$, traccia la perpendicolare ad L_2 passante per P e calcola la lunghezza del segmento $\overline{PP'} = d(P, L_2)$ dove P' è il piede della perpendicolare.*
Osserva come varia la distanza $d(P, L_2)$ spostando P prima verso l'orizzonte e poi verso l'infinito. Verifica che le rette L_{-1} ed L_2 sono asintotiche.

Non tutte le rette parallele nel Sempiano di Poincaré sono asintotiche. Consideriamo ad esempio le rette del secondo tipo ${}_1L_2$ ed ${}_5L_1$ come in figura 25.

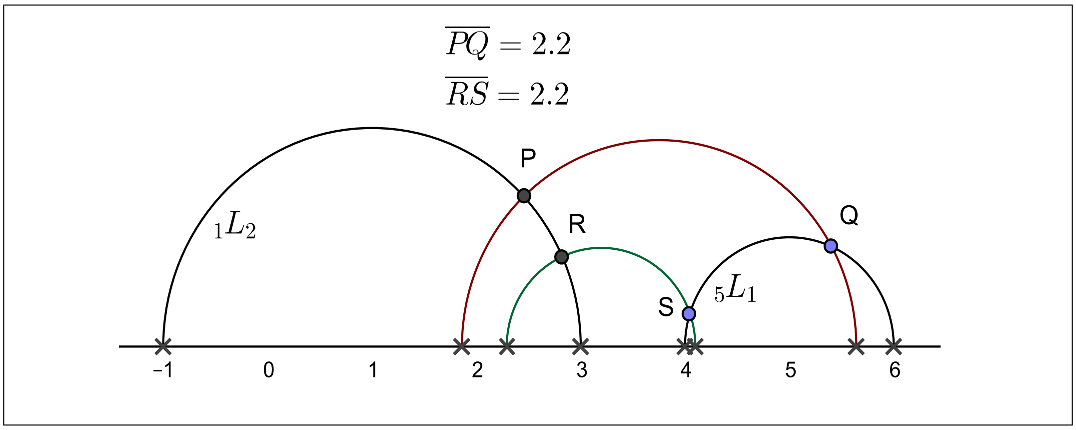

Figura 25: Distanze tra le rette ${}_1L_2$ ed ${}_5L_1$.

Esercizio 3.12. *Dopo aver disegnato* ${}_1L_2$ *ed* ${}_5L_1$ *con Geogebra, preso un* $P \in {}_1L_2$*, la perpendicolare ad* ${}_5L_1$ *passante per* P *e calcola la lunghezza del segmento* $\overline{PP'} = d(P, L_2)$ *dove* P' *è il piede della perpendicolare.*
Osserva come varia la distanza $d(P,\ {}_5L_1)$ *spostando* P *prima in un verso e poi nell'altro della retta* ${}_1L_2$*. Verifica che le rette* ${}_1L_2$ *ed* ${}_5L_1$ *non sono asintotiche.*

Si può dimostrare che se $r \neq s$ sono rette parallele del Semipiano di Poincaré che non sono asintotiche allora esistono due punti P, Q con $P \in r, Q \in s$ tali che la retta per P e Q è perpendicolare sia a r che ad s; inoltre $d(P,Q)$ realizza la distanza minima fra punti di r e punti di s: muovendo il punto P in un determinato verso, di r la distanza fra P ed s aumenta assumendo valori grandi a piacere. Rette di questo tipo vengono dette *parallele divergenti*come in figura 26).

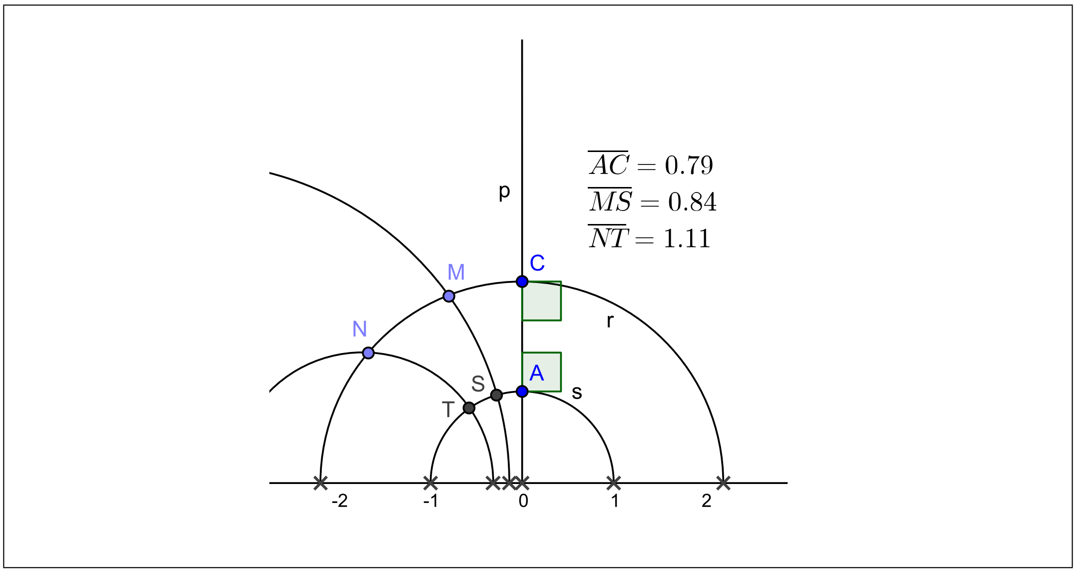

Figura 26: Parallele divergenti. Si può notare come, muovendosi a sinistra della perpendicolare, la distanza tra le due rette aumenti (ciò avviene per simmetria anche dal lato destro).

Esercizio 3.13. ***Parallele divergenti o asintotiche?*** *Stabilisci a quale categoria appartengono le seguenti coppie di rette parallele.*

1. ***Rette del secondo tipo con un punto all'orizzonte in comune.*** *Considerare le rette* ${}_2L_3$ *e* ${}_4L_1$*.*

2. ***Rette del primo e del secondo tipo senza punti in comune sull'orizzonte.*** *Provare con le rette* L_2 *e* ${}_{-1}L_2$*.*

3. ***Rette del primo e del secondo tipo con un punto all'orizzonte in comune.*** *Prendere le rette* L_3 *e* ${}_1L_2$*.*

3.3 Quadrilateri di Saccheri

Nel Semipiano di Poincaré non è difficile costruire un triangolo equilatero di lato r: presi due punti P, Q con $d(P, Q) = r$ possiamo costruire la circonferenza $\mathcal{C}_1$ di centro P e raggio r e la circonferenza $\mathcal{C}_2$ di centro Q e raggio r. Se S è un punto che appartiene all'intersezione delle due circonferenze, il triangolo di vertici P, Q, S è un triangolo equilatero di lato r (vedere Fig. 27).

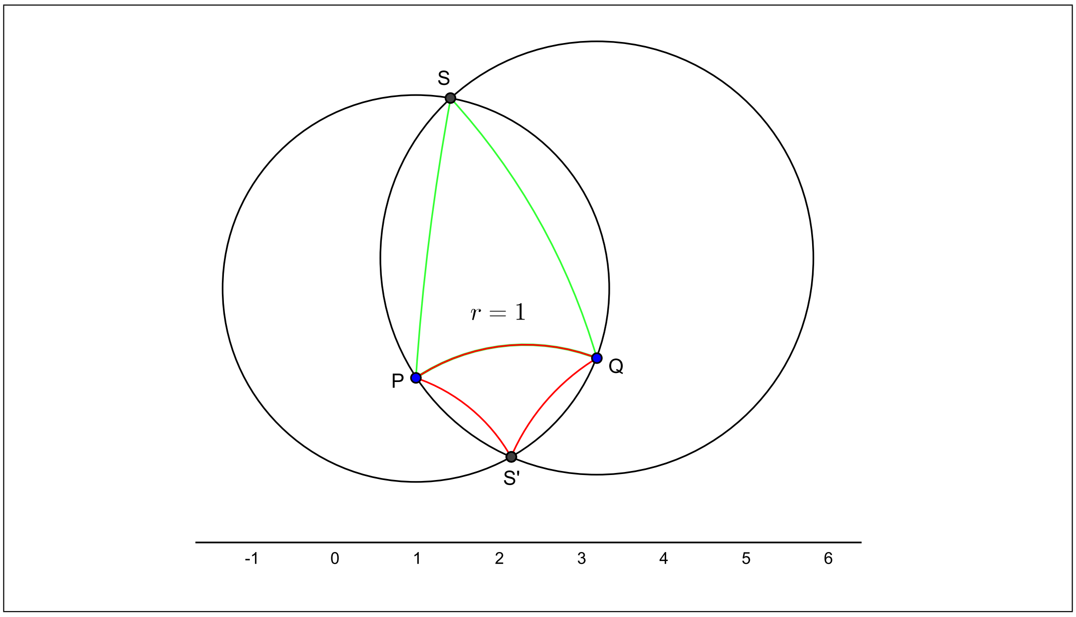

Figura 27: Costruzione di due triangoli equilateri ($\triangle PQS$ e $\triangle PQS'$) a partire dalle due circonferenze di raggio P e Q.

I triangoli equilateri sono il primo esempio di poligono regolare. Nella geometria euclidea sappiamo che esistono poligoni regolari con un qualsiasi numero di lati; possiamo ad esempio disegnare senza difficoltà un quadrato sul Piano Cartesiano. Abbastanza sorprendentemente, questo non è possibile nel Semipiano di Poincaré, dove non esistono quadrati! L'assenza del quinto postulato, infatti, impedisce la costruzione dei rettangoli (e quindi dei quadrati). Vediamo di capire perché. Cercando di costruire un rettangolo nel Semipiano di Poincaré, possiamo seguire due strade. Per visualizzarle eseguiamo prima il seguente esercizio.

Esercizio 3.14. *Utilizzando Geogebra esegui le due costruzioni seguenti.*

- *Partendo da un segmento $\overline{AB}$, possiamo considerare le perpendicolari al segmento condotte dai vertici A, B e su queste perpendicolari, dallo stesso lato rispetto al segmento $\overline{AB}$, considerare due punti C e D tali che $d(A, D) = d(B, C)$; congiungendo infine C e D si completa il quadrilatero (Fig. 28).*

- *Partendo da un segmento $\overline{AB}$, possiamo considerare la perpendicolare al segmento condotta dal vertice A ed un punto D su questa perpendicolare; da questo punto possiamo condurre la perpendicolare al segmento $\overline{AD}$ e considerare un punto C dallo stesso lato di B rispetto al segmento $\overline{AD}$, e tale che $d(C, D) = d(B, A)$; congiungendo infine C e B si completa il quadrilatero (come in Fig29).*

Entrambe queste costruzioni, che nel Piano Cartesiano permettono di costruire un rettangolo, falliscono nel Semipiano di Poincaré. Nel primo caso, possiamo verificare

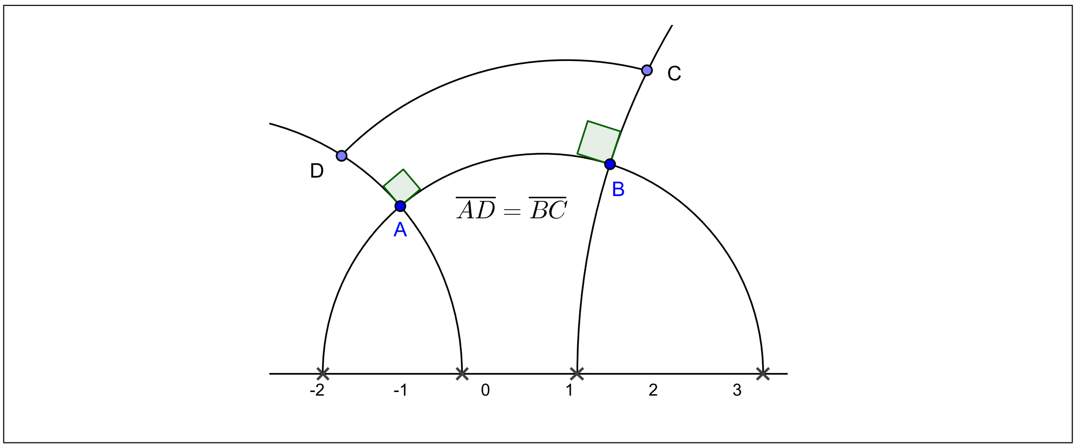

Figura 28: Costruzione descritta nel primo punto dell'esercizio, a partire dai punti $A = (-1, 2)$ e $B = (1.5, 2.5)$ e con $\overline{AD} = \overline{BC} = 0.4$.

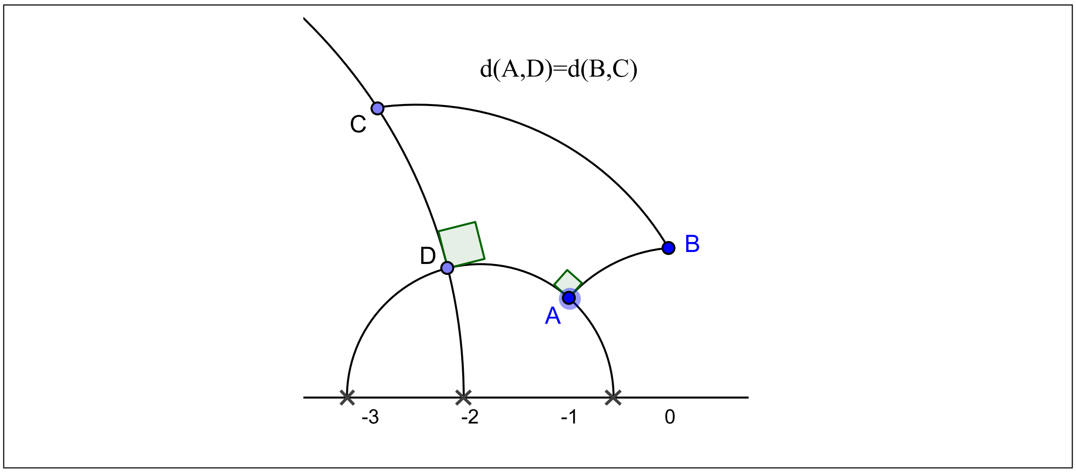

Figura 29: Costruzione descritta nel secondo punto dell'esercizio, a partire dai punti $A = (-1, 1)$ e $B = (0, 1.5)$ e con $\overline{AD} = \overline{BC} = 0.88$.

che gli angoli in C e in D non sono retti; nel secondo caso, ci accorgiamo che l'angolo in B non è retto.

Un quadrilatero costruito seguendo la prima costruzione si chiama *quadrilatero di Saccheri*; un quadrilatero costruito seguendo la seconda costruzione si chiama *quadrilatero di Lambert*.
Indicheremo un quadrilatero di Saccheri di vertici A, B, C e D con $\square(ABCD)$.

Date due rette divergenti possiamo sempre costruirvi un quadrilatero di Saccheri $\square(ABCD)$, individuando sulla prima retta due punti equidistanti rispetto alla seconda (vedi figura 30 nella pagina successiva).

Esercizio 3.15. *Dopo aver costruito un quadrilatero di Saccheri come nella costruzione 3.14, verifica che le rette contenenti i lati* $\overline{AB}, \overline{CD}$ *sono divergenti.*
[Sugg. costruisci la retta per i due punti medi di $\overline{AB}, \overline{CD}$ *e verifica che tale retta è perpendicolare ad entrambe le basi.]*
Confronta la lungheza del lato $\overline{AB}$ *con la lunghezza del lato* $\overline{CD}$ *.*

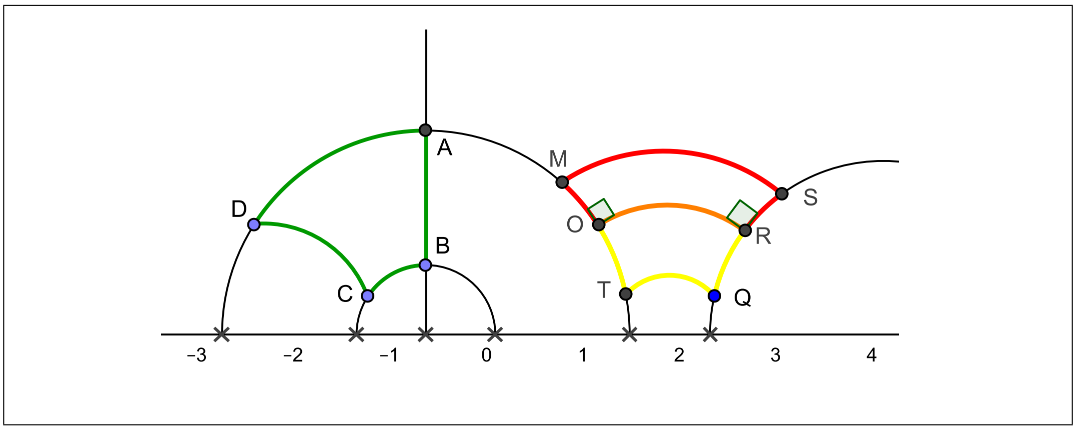

Figura 30: Tre quadrilateri di Saccheri (evidenziati in giallo, rosso e verde).

3.4 Area dei Triangoli e Difetto

Nel caso euclideo possiamo calcolare l'area di un triangolo scegliendo un lato (la "base") e moltiplicando la sua lunghezza per la metà della lunghezza dell'altezza relativa alla base. Utilizzando la teoria della similitudine, si dimostra che questa grandezza è una caratteristica *intrinseca* del triangolo in quanto non dipende dalla scelta della base. Nel Semipiano di Poincaré le cose non sono così semplici:

Esercizio 3.16. *Dato un triangolo, scegli un lato e calcola il prodotto della lunghezza del lato per la lunghezza dell'altezza relativa. Confronta il risultato ottenuto scegliendo un lato diverso.*

L'esercizio precedente ci fa capire che nel Semipiano di Poincarè non possiamo utilizzare la solita formula per definire l'area di un triangolo. Abbiamo altre strade? Un oggetto che caratterizza un triangolo iperbolico è indubbiamente il suo *difetto*: questo rappresenta quanto il triangolo considerato sia lontano dall'essere un triangolo euclideo. Dato $\triangle ABC$, di angoli α, β e γ, il difetto è definito nel seguente modo:

$$\delta(\triangle ABC) = 180 - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Osservazione 1. *Triangoli con gli stessi angoli hanno lo stesso difetto.*

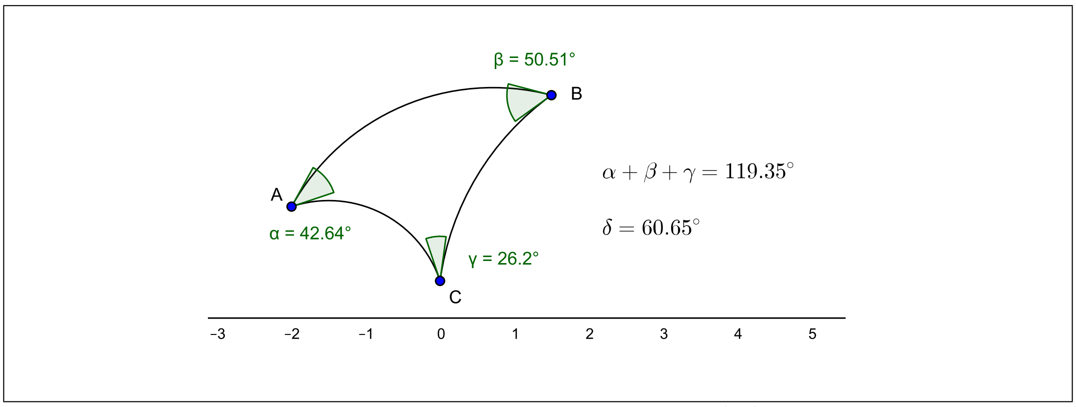

Figura 31: Difetto δ del triangolo $\triangle ABC$.

Osservazione 2. *Il difetto è sempre positivo: in geometria iperbolica, la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di* 180 *(questa è la congettura che si può formulare svolgendo l'esercizio 3 a pagina 14).*

Un'importante proprietà del difetto è l'additività: dato un triangolo $\triangle ABC$ ed un suo punto $D \in \overline{AB}$, possiamo dimostrare che $\delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle DBC) = \delta(\triangle ABC)$ (come in fig. 32).

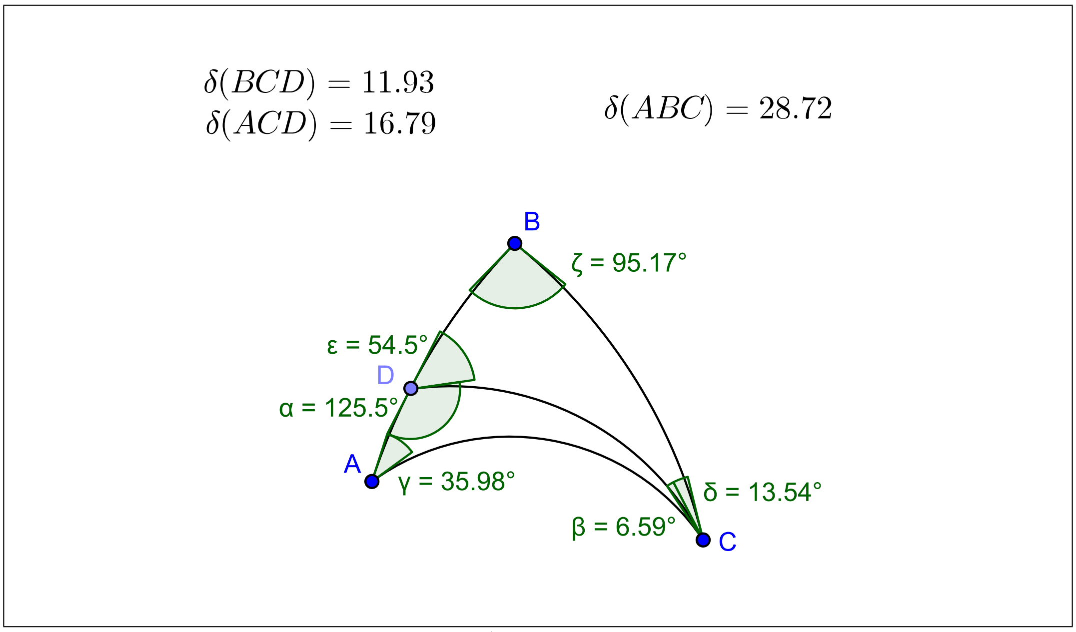

Figura 32: Additività del difetto.

L'additività del difetto ci suggerisce di usarlo come una misura dell'area del triangolo nel Semipiano di Poincaré.

$$Area(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABC).$$

Il difetto ha infatti tutte le caratteristiche necessarie per essere la misura di un'area:

- è una misura positiva;
- triangoli congruenti hanno la medesima area;
- suddividendo un triangolo in triangoli più piccoli la somma delle aree è uguale all'area del triangolo di partenza.

Questa definizione ci permette di calcolare l'area di qualsiasi poligono covesso: basta suddividere in modo opportuno il poligono utilizzando dei triangoli.

Mostriamo il procedimento nella figura 33 nella pagina seguente sul poligono $\mathcal{P}$ di vertici $A = (0, 1)$, $B = (2, 0.5)$, $C = (3, 1)$, $D = (4, 3)$, $E = (1, 4)$ e $F = (-1, 2.5)$. Prendiamo un punto interno alla figura, ad esempio $P = (1.5, 2.5)$; unendo i vertici con P si ottiene una scomposizione in triangolini e, sommando le loro aree (cioè i loro difetti), otteniamo una grandezza che chiamiamo *area* del poligono.

Tale definizione sembra dipendere dalla scelta del punto P interno al poligono ma si può dimostrare che non è così. Infatti dipende solo dal poligono considerato, in

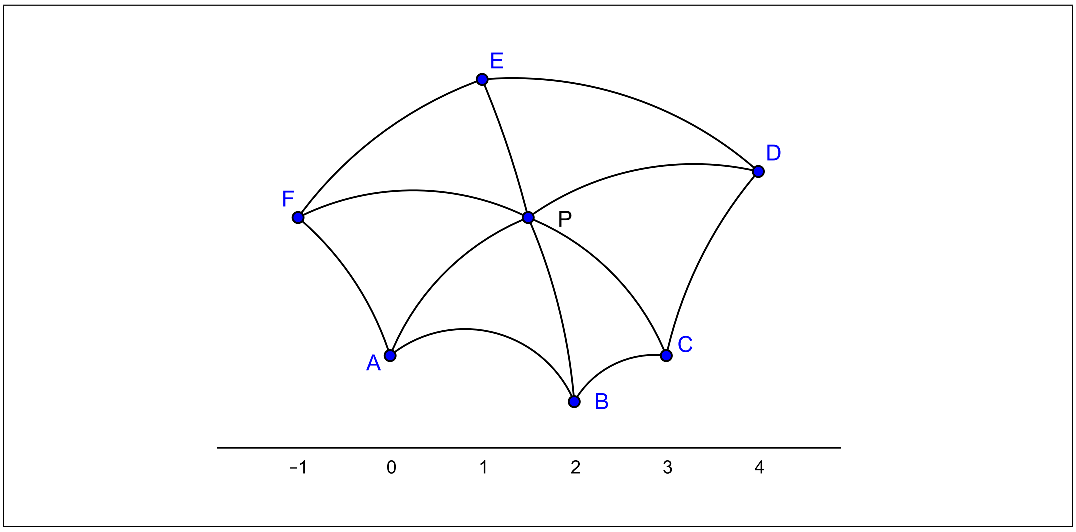

Figura 33: Poligono $\mathcal{P}$ di sei vertici.

particolare dalla misura degli angoli ai vertici, e non dal punto P scelto. È pertanto una buona definizione di area per poligono convessi.