

10.1 Introduzione

Tutte le attività del laboratorio “*La matematica c’è*” condividono il medesimo obiettivo di base: mettere in relazione la matematica con il mondo reale, per stimolare l’interesse degli studenti e favorire la comprensione dei concetti matematici attraverso un apprendimento attivo anche grazie al supporto del calcolatore. Tra le varie proposte, il laboratorio “*Realtà e modelli*” vuole evidenziare il ruolo chiave della matematica nella modellizzazione di fenomeni reali, puntando anche a sviluppare un’attitudine sperimentale verso la disciplina.

La matematica ha da sempre interagito con il mondo reale fornendo importanti strumenti per la risoluzione di problemi e per la descrizione di fenomeni: “*la matematica ci offre un linguaggio per interrogare la natura e la chiave per interpretarne le risposte*” [51]. Come costruzione della mente umana, essa si è sviluppata anche autonomamente, ma è indubbio che lo scambio reciproco di conoscenze sia stato proficuo: ha dato impulso alla definizione di nuovi strumenti matematici, ha portato alla formulazione di teorie ed ha permesso una migliore comprensione di molteplici aspetti del mondo reale. Il dialogo è stato ed è tuttora particolarmente stretto con la fisica. Queste due discipline si sono sviluppate assieme ed i metodi matematici sono intervenuti fin dal principio come strumenti costitutivi della fisica. Molte delle sue leggi infatti possono essere espresse in forma matematica e la matematica stessa si è rivelata incredibilmente efficace nella comprensione dei fenomeni fisici. Nel suo celebre articolo, il premio Nobel per la fisica E. P. Wigner (1902-1995) così riflette: “*Il miracolo dell’adeguatezza del linguaggio matematico per la formulazione della fisica rappresenta uno splendido dono che non ci siamo meritati e che non siamo in grado di comprendere. Dovremmo [...] sperare che ciò rimanga valido anche per il futuro, e che si estenda a sempre nuovi campi del sapere*” [114]. Nel corso degli anni lo sguardo si è così allargato ad altre discipline delle scienze della natura (biologia, chimica, geologia, astronomia,...) e delle scienze sociali e umane (demografia, sociologia, economia, politica,...). Perché la matematica è diventata uno strumento privilegiato e potente per la conoscenza del mondo reale? La questione è antica, profonda ed è ancora dibattuta. Quando si parla di misurazioni e quindi di numeri è naturale rivolgersi alla matematica, che sa manipolare e trovare correlazioni tra i dati ed è in grado di proporre delle leggi che ne descrivano l’andamento. Ma c’è di più. Dalla varietà confusa dei diversi fenomeni, essa ne cerca gli aspetti *essenziali* e ne costruisce una rappresentazione semplificata nel suo linguaggio, il *modello matematico*, le cui leggi di funzionamento possono fornire una spiegazione della realtà e predirne l’evoluzione. J. von Neumann (1903-1957), uno dei più eminenti scienziati del ’900, ha proposto la seguente definizione generale: “*Un modello matematico è, per l’appunto, la rappresentazione (o descrizione) di un fenomeno. Non*

si tratta di una semplice descrizione verbale. Il modello matematico è una descrizione che mette in luce determinati aspetti caratteristici di un fenomeno in termini formali: è la logica del processo che viene analizzata. Ed ecco il secondo punto. La descrizione che offre il modello non è infatti una descrizione contenutistica ma è una descrizione che utilizza il linguaggio formale e astratto per eccellenza, il linguaggio della matematica. Insistiamo su questa contrapposizione fra descrizione a parole o di contenuto e descrizione in linguaggio formale e quindi matematico.” [66].

Il modello matematico di un fenomeno (o problema) della vita reale è un processo di razionalizzazione che ha lo scopo di fornire una descrizione sintetica ed oggettiva. Il fenomeno può così essere esaminato, eventualmente controllato e si possono fare previsioni sulla sua evoluzione.

La matematica è l'arte del ragionamento deduttivo, la sua forza sta nella capacità di astrazione e di sintesi e nel suo potere predittivo.

La diffusione della modellistica matematica in diversi ambiti scientifici si deve anche all'affermarsi del calcolatore e allo sviluppo di *modelli numerici*, che traducono i modelli matematici in efficienti algoritmi da eseguire sul calcolatore. I modelli matematici e numerici sono quindi diventati gli strumenti attuali della ricerca in diverse aree della scienza. Le *simulazioni numeriche* permettono di sperimentare e testare i modelli, di indagare nuove idee e di predire la dinamica del fenomeno.

Prendendo spunto dalle considerazioni sopra esposte, è stato progettato un laboratorio basato sui modelli matematici descritti da *equazioni differenziali ordinarie*. L'obiettivo era quello di presentare il percorso di modellizzazione matematica, riflettendo allo stesso tempo sulla nozione di derivata di una funzione. Sono stati proposti dei modelli legati alla fisica e alla biologia, e per la loro analisi sono stati utilizzati sia strumenti matematici elementari noti agli studenti che i risultati delle simulazioni numeriche. Tale percorso offre anche un'occasione per un eventuale approfondimento sugli errori introdotti dal calcolatore nella rappresentazione dei numeri reali e nell'aritmetica di macchina.

Il laboratorio “*Realtà e modelli*” si è svolto sia nell'A.A. 2010-11 che nell'A.A. 2011-12 con un'analogia organizzazione, che prevedeva un seminario introduttivo presso la scuola in orario curriculare e due laboratori computazionali presso l'università in orario extracurriculare. Questi ultimi rispondevano anche alla richiesta degli insegnanti di misurarsi con il software matematico ed il calcolatore come supporti alla didattica. Nell'incontro iniziale veniva proposta una riflessione sul linguaggio matematico e sul metodo scientifico, che si completava con la descrizione e l'analisi di semplici modelli di crescita di una popolazione. Tali concetti venivano successivamente ripresi in classe dagli insegnanti. Nei laboratori computazionali, dopo una breve introduzione al Matlab, gli studenti potevano così iniziare ad operare attivamente simulando numericamente alcuni dei modelli proposti con dei codici sviluppati ad hoc. Il Matlab era stato scelto, perchè già presente nel laboratorio della scuola. In alternativa si sarebbe potuto un software open-source, per esempio GNU-Octave o

altri linguaggi di programmazione. La valutazione degli studenti si è basata sul materiale prodotto in laboratorio.

Nella Sezione 10.3 viene presentata più diffusamente l'attività relativa all'A.A. 2010-11, che si è focalizzata sulla dinamiche di popolazioni e di coppia. Il simpatico ed accurato seminario "Radioattività e datazione con il ^{14}C " della prof.ssa Elisa Ellero, allora studentessa della Laurea Specialistica in Matematica, chiudeva il percorso. Nell'A.A. 2011-12 si è parlato più ampiamente delle equazioni differenziali nella fisica, con una particolare attenzione ai circuiti elettrici. Di tale attività nella Sezione 10.3 si accenna solamente al metodo delle analogie, che si basa sul fatto che uno stesso modello matematico può descrivere fenomeni di diversa natura. La sezione infine si conclude con la presentazione di un modello numerico per le equazioni differenziali: il metodo di Eulero.

A tale relazione hanno contribuito la prof.ssa Elisa Ellero per la Sezione 10.2 e la prof.ssa Anna Maria Orlandi per la Sezione 10.4. Per ulteriori approfondimenti e materiale si veda il sito <https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/>

10.2 Inquadramento storico

In questa sezione viene presentata una breve sintesi della storia delle equazioni differenziali ordinarie, tratta dal documento [52], che prende spunto dai libri [57, 20, 94, 96, 58], a cui il lettore può fare riferimento per eventuali approfondimenti.

I primi studi sulle equazioni differenziali risalgono alla seconda metà del XVII secolo, dopo la nascita del calcolo infinitesimale di Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). I diversi tentativi di risoluzione di problemi di fisica hanno portato gradualmente a modelli matematici basati su equazioni contenenti una funzione incognita e le sue derivate, chiamate *equazioni differenziali*. In particolare esse si dividono in *ordinarie* quando la funzione incognita dipende da una sola variabile e in *equazioni alle derivate parziali* quando la funzione incognita dipende da più di una variabile. Esse vengono classificate a seconda del loro *ordine*, cioè il massimo ordine di derivazione che vi compare. Lo scopo della teoria delle equazioni differenziali ordinarie di ordine k è la ricerca di soluzioni $u(t)$ definita in un intervallo I , cioè funzioni derivabili k volte in I che soddisfano l'equazione differenziale per ogni $t \in I$.

Secondo alcuni storici della matematica, lo studio delle equazioni differenziali iniziò nel 1675, quando Leibniz scrisse l'equazione $\int u \, du = (1/2)u^2$. La ricerca di metodi generali di risoluzione ebbe invece inizio quando Newton classificò le equazioni differenziali del primo ordine in tre classi e le risolse utilizzando le serie di funzioni. Nonostante Newton avesse osservato che questo tipo di equazioni ammettevano infinite soluzioni, solo alla fine del XVIII secolo si riuscì a dimostrare che la soluzione generale di un'equazione del prim'ordine dipende da una costante arbitraria. Assegnando un valore alla

soluzione in un certo punto iniziale si definisce un problema a valori iniziali, per la cui dimostrazione di esistenza e unicità di una soluzione si dovrà attendere addirittura fino al XIX secolo.

Un'equazione differenziale ordinaria che ha cambiato per sempre il corso della storia della fisica è legata al secondo principio della dinamica, pubblicato da Newton nel 1687. Se consideriamo un punto materiale P di massa m in moto lungo una retta e fissiamo un sistema di riferimento in cui la posizione del punto P all'istante $t \geq 0$ sia rappresentata dall'ascissa $u(t)$, allora la sua velocità è per definizione $u'(t)$, mentre la sua accelerazione è data da $u''(t)$. Supponiamo che il punto materiale sia soggetto a una forza costante F , nella stessa direzione e nello stesso verso dell'asse u , allora il secondo principio della dinamica è espresso dalla seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$F = m \cdot u''(t) \Rightarrow u''(t) = \frac{F}{m}.$$

Integrando due volte si ottiene:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \int \frac{F}{m} = \frac{F}{m} \cdot t + c_1, \\ u(t) &= \int \frac{F}{m} t + c_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} \cdot t^2 + c_1 t + c_2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Le costanti c_1 e c_2 in (10.1) possono essere determinate fissando la posizione e la velocità del punto materiale P all'istante iniziale $t_0 = 0$, cioè risolvendo il seguente *problema ai valori iniziali* o *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} u''(t) = \frac{F}{m}, & t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases} \tag{10.2}$$

La soluzione di (10.2) rappresenta la legge oraria del moto rettilineo uniforme:

$$u(t) = u_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{m} t^2, \quad t \geq 0,$$

che "predice" la posizione futura del punto materiale P .

Dal punto di vista storico, uno dei primi problemi ad essere studiati consisteva nel determinare la natura di una curva che soddisfacesse una determinata condizione relativa alla tangente o alla normale in un suo punto, e che di conseguenza poteva essere risolto mediante un'equazione differenziale del primo ordine. A partire dal 1690, Leibniz e i fratelli Jakob I Bernoulli (1654-1705) e Johann I Bernoulli (1667-1748) pubblicarono moltissime soluzioni di problemi di grande attualità utilizzando le equazioni differenziali. Inizialmente applicate in ambito geometrico, esse vennero presto utilizzate in moltissime branche della scienza, quali la meccanica, l'ottica, l'astronomia e l'idrodinamica. I vari problemi studiati dai fondatori del calcolo infinitesimale e da molti matematici in epoche successive portarono allo sviluppo di numerose tipologie di equazioni differenziali; a partire dal 1690 vennero individuati alcuni metodi risolutivi adatti a risolvere particolari classi di equazioni. Ad esempio il metodo di sostituzione e di separazione delle variabili portarono alla soluzione delle

equazioni omogenee, lineari del prim'ordine e di Bernoulli. Inoltre tra il Seicento e il Settecento le ricerche iniziarono ad assumere un carattere puramente analitico, allontanandosi sempre più dall'ambito geometrico in cui erano state inizialmente sviluppate.

I diversi approcci degli esponenti della scuola newtoniana e leibniziana alla soluzione delle equazioni differenziali rimasero distinti fino al Settecento. I newtoniani privilegiarono l'utilizzo delle serie nel calcolo integrale; Newton stesso fornì una soluzione generale del problema dell'integrazione delle equazioni differenziali mediante le serie di potenze. Al contrario i leibniziani preferirono ricercare soluzioni in cui le funzioni incognite erano espresse per mezzo di un numero finito di operazioni algebriche tra funzioni elementari. Quando questo non era possibile ricorsero alla "integrazione per quadrature", in cui le funzioni incognite erano espresse mediante un numero finito di integrali indefiniti.

Uno dei primi problemi affrontati fu quello proposto da Leibniz ai cartesiani nel settembre del 1687: esso consisteva nel determinare la natura della curva isocrona, lungo la quale un corpo soggetto al proprio peso discende uniformemente (mantenendo la componente verticale della velocità). Un mese dopo Huygens (1629-1695) ne presentò la soluzione, senza però dimostrarla. Nel 1689 Leibniz tornò ad affrontare il problema, verificando che la curva "parabolica quadrato-cubica" era proprio la soluzione cercata. Nel 1690 Jakob I Bernoulli fu il primo a pubblicare la formulazione e la trattazione analitica del problema utilizzando il formalismo di Leibniz, che consentiva di scrivere l'equazione in forma differenziale. Egli determinò la curva isocrona separando le variabili e poi uguagliando gli integrali di entrambi i membri dell'equazione ("*Ergo et horum integralia aequantur*").

Nel 1694 i fratelli Bernoulli, dopo aver ricordato le molteplici regole da loro ideate per separare le variabili in particolari equazioni differenziali del primo ordine, osservarono acutamente che in un'equazione qualunque non si può sperare di trovare un metodo generale per separare le variabili. Se l'equazione non era a variabili separabili venivano inoltre utilizzate particolari sostituzioni per ricondursi alla separazione delle variabili e costruire le soluzioni.

Le menti dei più brillanti matematici del tempo si sfidarono nella risoluzione di numerosi altri problemi (tra cui per la loro importanza storica si ricordano la trattrice, la brachistocrona e l'isocrona paracentrica), gettando le basi per lo sviluppo della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

A partire dai primi studi sulle equazioni differenziali i leibniziani cercarono di determinare procedimenti risolutivi per specifiche classi di equazioni. Essi individuarono facilmente la sostituzione generale che consente la separazione delle variabili nel caso delle *equazioni differenziali omogenee* $u' = f(t, u)$, in cui f è una funzione omogenea di grado zero delle due variabili (t, u) e continua nel suo dominio. La pubblicazione del procedimento risolutivo delle equazioni omogenee risale tuttavia al 1714, con l'articolo di Manfredi (1681-1761).

Le soluzioni delle equazioni lineari del primo ordine $u'(t) = a(t) \cdot u(t) + b(t)$, (dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni continue) e delle cosiddette "equazioni di Bernoulli" (proposte da Jakob I Bernoulli nel 1695) furono pubblicate alla fine del XVII secolo. Nel 1696 Leibniz affermò di aver ricondotto l'equazione di Bernoulli a un'equazione differenziale lineare e di aver già comunicato agli amici il metodo generale di risoluzione, pertanto non ritenne necessario fornire ulteriori spiegazioni. Egli infatti nel novembre 1694 aveva riportato in una lettera a L'Hôpital una soluzione della generica equazione lineare *non omogenea* del primo ordine (cioè avente $b(t) \neq 0$ per qualche t). Le nozioni di soluzione generale e particolare divennero gradualmente più chiare nel corso del XVIII secolo, mentre la relativa terminologia continuava a variare da studioso a studioso. Nel 1694 Johann I Bernoulli dimostrò che un'equazione differenziale del primo ordine ammetteva infinite soluzioni.

Le nozioni di soluzione generale e particolare furono esplicitamente stabilite da Eulero nel 1743, che dimostrò che la soluzione di un'equazione ordinaria di ordine k dipende da k costanti arbitrarie e che le soluzioni particolari si ottengono assegnando alle costanti un valore fissato.

Nella prima metà del Settecento gli studi di molti matematici si concentrarono sull'equazione non lineare del primo ordine detta "equazione di Riccati". In particolare essa fu studiata dai Bernoulli, da Jacopo Riccati (1676-1754) e da suo figlio Vincenzo (1707-1775). Altre ricerche sulle equazioni differenziali lineari di ordine superiore vennero pubblicate in numerosi studi di carattere fisico-matematico, ad esempio sulla vibrazione di corpi elastici, sulla conduzione di calore e sulla teoria del potenziale.

Eulero (1707-1783) fu uno degli scienziati che contribuì maggiormente all'elaborazione dei metodi per la soluzione delle equazioni differenziali; molti problemi presenti nei manuali moderni derivano dai suoi trattati: "Institutiones calculi differentialis" (1755) e "Institutiones calculi differentialis" (1768-1770). L'uso di fattori di integrazione, i metodi per risolvere equazioni lineari di ordine superiore a coefficienti costanti e la distinzione tra equazioni lineari omogenee e non omogenee, tra soluzioni generali e particolari sono solo alcuni dei numerosi contributi di Eulero in questo campo.

Le più semplici equazioni differenziali lineari sono quelle omogenee a coefficienti costanti che, in alcuni casi particolari, furono risolte da Daniel Bernoulli nel 1739-1740 e da d'Alembert (1717-1783). La soluzione generale delle equazioni differenziali lineari omogenee di ordine k a coefficienti costanti fu pubblicata nel 1743 da Eulero. Nel 1747 d'Alembert conosceva già alcuni metodi generali per risolvere equazioni lineari complete. Eulero dimostrò inoltre che la soluzione generale di un'equazione lineare omogenea si ottiene come combinazione lineare di k soluzioni particolari (anche se oggi sappiamo che devono essere linearmente indipendenti, mentre egli non indicò esplicitamente questa condizione), inoltre ottenne l'espressione delle

soluzioni particolari. Tra il 1750 e il 1751 Eulero pubblicò un metodo che permetteva di ricondurre il problema dell'integrazione di una equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti di ordine k all'integrazione di un'equazione di ordine $k - 1$. Pertanto, iterando il procedimento, l'equazione di partenza si riduceva a un'equazione lineare non omogenea del primo ordine, la cui soluzione generale era stata determinata da Leibniz e Jakob I Bernoulli.

A partire dal 1760 sia d'Alembert sia Lagrange (1736-1813) gettarono le basi della teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti non costanti e, con metodi diversi, arrivarono alla loro soluzione. Lagrange inventò inoltre il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, già intuito da Jakob I Bernoulli nel 1696 per la soluzione dell'equazione omonima. Esso permette di determinare una soluzione particolare di un'equazione non omogenea, nota la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Cauchy (1789-1857) fu il primo a riconoscere la necessità di dimostrare l'esistenza locale delle soluzioni per il problema ai valori iniziali. Per lo studio della dipendenza dai dati iniziali, invece, occorre attendere fino alla fine del XIX secolo. Nel 1868 Lipschitz (1832-1903) perfezionò le condizioni di esistenza di Cauchy, determinando la condizione che garantisce l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy. Meno di duecento anni dopo la nascita del calcolo infinitesimale la teoria delle equazioni differenziali ordinarie poteva considerarsi completa.

10.3 Descrizione

L'attività con gli studenti ha avuto inizio con un primo incontro tenutosi presso la scuola e rivolto ad intere classi. Il seminario proponeva una riflessione sull'importanza del linguaggio matematico e sul metodo scientifico, prendendo spunto dalla celebre frase di Galileo *"...La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola..."* [Il saggiatore (1623)]. A Galileo si deve la definizione moderna di metodo scientifico, anche se le idee su cui si fonda sono andate evolvendo fin dall'antichità (Egizi, Greci) con importanti contributi nel Medioevo e di Leonardo da Vinci nel Rinascimento. I rapidi cenni sullo sviluppo storico del metodo scientifico e le considerazioni sull'osservazione sperimentale, sulla formulazione di teorie, sul metodo induttivo e deduttivo hanno permesso inoltre di tracciare un collegamento con il programma di filosofia. Il percorso di conoscenza di un fenomeno si fonda sul continuo dialogo tra teoria ed esperimento. Uno dei punti cardine è la riproducibilità degli esperimenti. Ma non sempre è possibile ripetere e riprodurre speri-

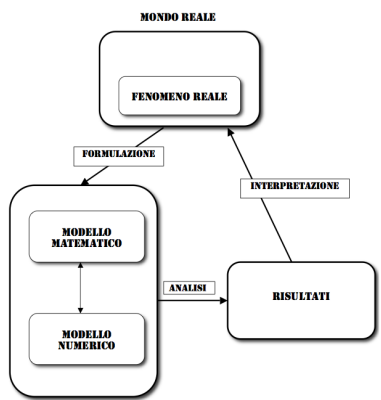


Figura 10.1: Mondo reale, modello matematico e modello numerico

mentalmente il fenomeno da studiare. L'analisi numerica consente la risoluzione di equazioni matematiche attraverso algoritmi e l'uso del calcolatore. Ecco allora che in diversi ambiti scientifici le simulazioni numeriche sono diventate uno strumento essenziale per testare la validità di teorie e per predire il comportamento futuro del fenomeno studiato. Lo sviluppo delle tecnologie e degli algoritmi dell'analisi numerica ha permesso inoltre di trattare fenomeni sempre più complessi.

Rafforzati nella convinzione che gli strumenti della matematica possono contribuire alla descrizione e all'analisi della realtà, la presentazione procedeva con l'indicazione dei passi fondamentali del processo di modellizzazione e la definizione dei concetti-chiave. Il *mondo reale* è un particolare settore delle scienze ed un *fenomeno* è un suo particolare aspetto. La formulazione del *modello matematico* è una rappresentazione semplificata del fenomeno. La complessità della realtà richiede infatti l'introduzione di *ipotesi semplificatrici*, che definiscono i limiti e l'attendibilità del modello. Gli aspetti essenziali del fenomeno sono descritti dalle *variabili di stato* e la loro dinamica nel tempo richiede la definizione di una *legge di evoluzione*. Al fine di prevederne l'andamento, le proprietà del modello devono essere analizzate con gli strumenti dell'analisi matematica e numerica. Lo sviluppo di un *modello numerico* per la risoluzione mediante il calcolatore del modello matematico è estremamente importante per trattare problemi difficili e complessi. I risultati ottenuti dalle *simulazioni numeriche* devono infine essere interpretati nel contesto del problema originario (figura 10.1). Ogni passo compiuto introduce delle semplificazioni e quindi degli errori. Anche il calcolatore, dovendo operare in aritmetica finita, introdurrà errori nella rappresentazione dei numeri reali e nelle operazioni. Compito del matematico è controllare tutti questi errori, in modo da garantire che la soluzione calcolata fornisca una rappresentazione sufficientemente accurata del fenomeno da cui si è partiti. La presentazione del percorso dal fenomeno reale alla simulazione numerica è stata accompagnata da alcuni sempli-

ci esempi scelti tra le conoscenze pregresse degli studenti in fisica e si è completata con la descrizione di modelli di crescita di una popolazione. Nei primo laboratorio computazionale sono stati studiati i modelli di crescita di una popolazione sia con i metodi dell'analisi matematica che con l'analisi dei risultati delle simulazione numeriche. I modelli di competizione e di dinamica di coppia sono stati oggetto di studio del secondo laboratorio. Essi propongono il passaggio da un'unica equazione differenziale ad un sistema di equazioni e, per sottolineare che il modello numerico diventa uno strumento essenziale quando il modello matematico cresce di complessità, sono state usate principalmente le simulazione numeriche. Gli studenti hanno potuto scoprire l'esistenza di soluzioni periodiche nei modelli preda-predatore e di costruire e personalizzare un modello di coppia.

Modelli di crescita di una popolazione

Modello di Malthus

Malthus (1766 -1834) era uno studioso inglese di economia politica e demografia, che propose un semplice modello per lo studio della dinamica di una popolazione in un ambiente con *risorse illimitate*. Questa assunzione rappresenta una semplificazione della realtà: tale modello considera trascurabile la questione della disponibilità delle risorse e quindi può essere appropriato in una fase iniziale di sviluppo, quando la popolazione non risente di tali vincoli.

La popolazione oggetto di studio viene rappresentata dalla sua numerosità $u(t) \geq 0$ all'istante di tempo $t \in \mathbb{R}$ (*variabile di stato*). Per descrivere il comportamento della popolazione al variare del tempo, ovvero la sua dinamica, abbiamo bisogno di definire una *legge* che descriva con il linguaggio matematico la variazione di $u(t)$ del tempo. Tale cambiamento è dovuto ai nuovi nati e ai morti, che assumiamo essere proporzionali alla popolazione. Indicati con $n > 0$ ed $m > 0$ rispettivamente i tassi di natalità e mortalità della popolazione nell'unità di tempo, abbiamo che:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + n\Delta t u(t) - m\Delta t u(t), \quad \Delta t > 0,$$

da cui

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = ru(t),$$

dove $r = n - m$ è il *tasso di riproduzione*. Ricordando la definizione di derivata di una funzione

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = u'(t)$$

si ottiene

$$u'(t) = ru(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (10.3)$$

che afferma che la variazione istantanea $u'(t)$ della funzione al tempo t è proporzionale alla popolazione $u(t)$ secondo il tasso di riproduzione r . La relazione (10.3) rappresenta un'equazione differenziale

ordinaria del primo ordine mentre la funzione $f(u) = ru$ è la legge di evoluzione della popolazione.

Risolvere l'equazione significa trovare quelle funzioni $u(t)$, chiamate *soluzioni*, che soddisfano (10.3). Con la tecnica della separazione delle variabili [57], si trova che la generica soluzione risulta

$$u(t) = ce^{rt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria (esercizio). Assegnando un valore $u_0 \geq 0$ alla popolazione all'istante iniziale $t_0 = 0$, si ottiene che $c = u_0$ e quindi la soluzione del *problema a valori iniziali*

$$\begin{cases} u(t) = ce^{rt} & t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (10.4)$$

risulta univocamente determinata. Nel caso $u_0 = 0$ la soluzione risulta $u(t) = 0, t \geq 0$. Essa rappresenta una *soluzione stazionaria* o di *equilibrio* che chiamiamo *banale* perchè corrisponde alla popolazione nulla. Quando $u_0 > 0$ possiamo predire il comportamento nel tempo della popolazione per $t > t_0$: se $r < 0$ la popolazione continua a decrescere ed è destinata all'estinzione in un tempo infinito, se $r > 0$ la popolazione continua ad aumentare, mentre rimane costante per $r = 0$ (esercizio). In questo caso avevamo la formula esplicita per le soluzioni. Vediamo ora come alcune informazioni qualitative sulla dinamica della popolazione possono essere dedotte dallo studio della funzione $f(u) = ru$ per $u \geq 0$, senza risolvere esplicitamente l'equazione, sapendo che il problema a valori iniziali ha unica soluzione. La funzione f è una retta tale che $f(u^*) = 0$ solo per $u^* = 0$. L'equazione ha quindi un unico equilibrio banale. Inoltre, dato $u > 0$, ci aspettiamo una decrescita della popolazione se $r < 0$, perchè la derivata risulta sempre negativa, ed una crescita se $r > 0$, perchè la derivata risulta positiva (esercizio). Si veda la figura 10.2. Concludiamo osservando che la formulazione del modello (10.3) ha permesso di sottolineare diversi aspetti importanti: l'individuazione della quantità essenziale che descrive il fenomeno in oggetto, l'introduzione delle ipotesi semplificatrici che limitano la validità del modello, la formulazione della legge che descrive la dinamica, la riflessione sulla nozione di derivata, l'introduzione di nuovi concetti matematici e di tecniche risolutive per le equazioni differenziali.

Modello di Verhulst

Dopo aver letto del modello di crescita di una popolazione di Malthus, il matematico Pierre F. Verhulst (1804-1849) ne propose un miglioramento per descrivere le auto-limitazioni alla crescita dovute a risorse limitate:

$$u'(t) = ru(t)\left(1 - \frac{u(t)}{k}\right) = ru(t) - cu(t)^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (10.5)$$

dove $r > 0$ rappresenta il tasso di riproduzione e $k > 0$ la *capacità*. Il parametro $c = \frac{r}{k} > 0$ descrive la *competizione interna* alla popolazione. L'equazione differenziale del primo ordine (10.5) viene ricordata

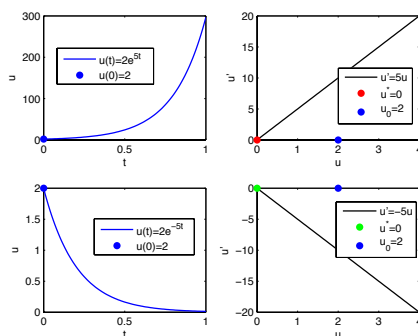


Figura 10.2: Sopra: soluzione di (10.4) con $u_0 = 2$ (sinistra) e grafico della relativa legge di evoluzione (destra) con $r = 5$. Sotto: soluzione di (10.4) con $u_0 = 2$ (sinistra) e grafico della relativa legge di evoluzione (destra) con $r = -5$.

anche come *equazione logistica o modello di Verhulst-Pearl*, dopo che fu riproposta da Ray Pearl. Come cambia la dinamica di (10.5) rispetto a (10.3)? Assegnato il valore iniziale u_0 all'istante iniziale $t_0 = 0$, si trova che l'unica soluzione del problema a valori iniziali associato (10.5) è data da

$$u(t) = \frac{ku_0 e^{rt}}{k - u_0(e^{rt} - 1)} = \frac{k}{1 + k_0 e^{-rt}}, \quad t \geq 0, \quad (10.6)$$

dove $k_0 = \frac{k - u_0}{u_0}$ (esercizio). Anche in questo caso abbiamo una formula esplicita per le soluzioni ed quindi possibile predire il comportamento della popolazione, studiando le funzioni (10.6) con i metodi dell'analisi matematica. In generale non sempre ciò è possibile. Proviamo ad analizzare la dinamica del modello, studiando la parabola $f(u) = ru(1 - \frac{u}{k})$ che descrive la legge di evoluzione di (10.5). Risolvendo $f(u) = 0$, si trova che esistono due soluzioni stazionarie $u_1^* = 0$ e $u_2^* = k > 0$. La seconda risulta non banale ed è pertanto interessante studiare cosa succede quando u_0 si discosta da tale valore di equilibrio. Disegnando il grafico della parabola $f(u)$ si osserva che $f(u) > 0, u \in (0, k)$ mentre $f(u) < 0, u > k$. Ricordando il significato di derivata, possiamo concludere che per valori iniziali u_0 tali che $0 < u_0 < k$, $u(t)$ cresce con t e $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = k$, mentre per valori iniziali u_0 tali che $u_0 > k$, $u(t)$ decresce con t e $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = k$ (esercizio). Si veda la figura 10.3.

Inoltre possiamo osservare che quando una soluzione attraversa la retta costante $u = \frac{k}{2}$ (la retta tratteggiata in figura 10.3) c'è un punto di flesso; questo accade solo per $0 < u_0 < \frac{k}{2}$ (esercizio).

Il laboratorio includeva anche la presentazione del modello di crescita logistica di una popolazione con migrazione:

$$u'(t) = ru(t)(1 - \frac{u(t)}{k}) - du(t), \quad t \geq 0, \quad (10.7)$$

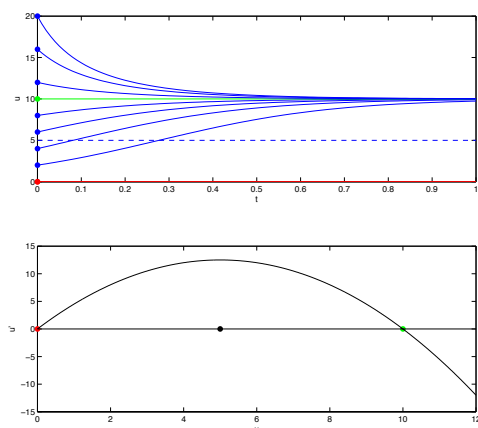


Figura 10.3: Soluzioni dell'equazione logistica (10.5) (sopra) e grafico della relativa legge di evoluzione (sotto) con $r = 5, k = 10$.

dove d descrive il tasso di migrazione della popolazione, e del modello di crescita logistica di una popolazione con un prelievo p costante nel tempo (es. pesca o caccia):

$$u'(t) = ru(t)\left(1 - \frac{u(t)}{k}\right) - p, \quad t \geq 0. \quad (10.8)$$

Nel primo laboratorio computazionale, agli studenti è stato chiesto di prevedere il comportamento qualitativo delle soluzioni studiando le leggi di evoluzione f di (10.7) e (10.8) e di confrontare le loro previsioni con i risultati delle simulazioni numeriche. Avevano a disposizione dei codici scritti in Matlab, che permettevano di cambiare i valori iniziali ed i parametri del modello. I codici producevano anche i grafici delle soluzioni e gli studenti avevano un riscontro sperimentale delle loro conclusioni (figura 10.4 e figura 10.5). Gli esercizi chiedevano di calcolare, quando esistevano, gli equilibri; studiare le loro proprietà di stabilità variando il punto iniziale; valutare la presenza di punti di flesso nelle soluzioni; studiare la dinamica variando i parametri del modello.

Infine per descrivere una crescita che risulta difficile quando gli individui sono pochi, è più rapida quando gli individui aumentano (*effetto branco*) e rallenta quando si supera una certa soglia, è stato proposto anche lo studio del modello

$$u'(t) = ru^2(t)\left(1 - \frac{u(t)}{k}\right), \quad t \geq 0,$$

con l'analisi qualitativa e attraverso le simulazioni numeriche (esercizio).

L'equazione logistica di base e le sue varianti trovano applicazione anche in altri ambiti (*adattabilità* del modello). Per esempio, in economia $u(t)$ può rappresentare il capitale al tempo t , r il tasso di

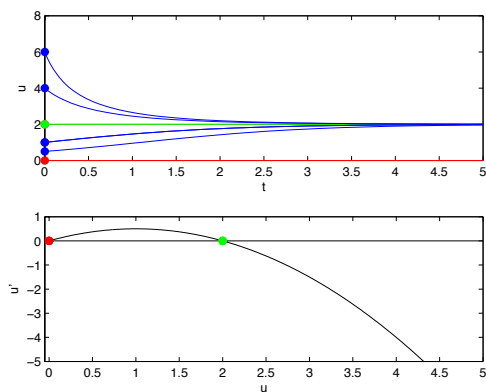


Figura 10.4: Soluzioni dell'equazione logistica con migrazione (10.7) (sopra) e grafico della relativa legge di evoluzione (sotto) con $r = 5, k = 10, d = 4$.

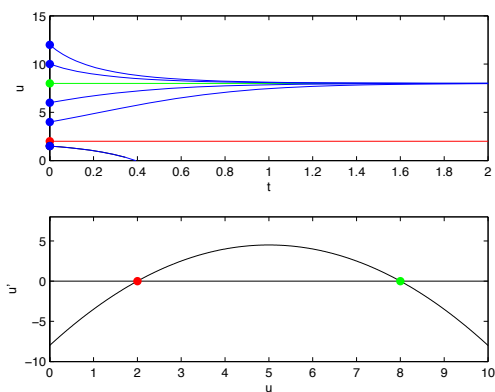


Figura 10.5: Soluzioni dell'equazione logistica con prelievo (10.8) (sopra) e grafico della relativa legge di evoluzione (sotto) con $r = 5, k = 10, p = 8$ ($kr > 4p$).

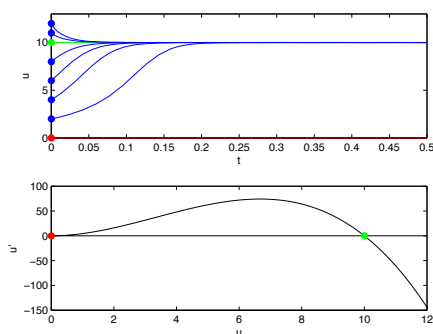


Figura 10.6: Soluzioni dell'equazione logistica con effetto branco (sopra) e grafico della relativa legge di evoluzione (sotto) con $r = 5, k = 10$.

rendimento del capitale e k la capacità massima del mercato. Tali modelli sono stati anche usati per studiare la diffusione delle innovazioni tecnologiche nelle fattorie americane negli anni 1930-1960, assumendo che la funzione $u(t)$ fosse il numero degli agricoltori che avevano adottato la nuova tecnologia e che un agricoltore fosse indotto al cambiamento da quelli che già usavano la nuova tecnologia [21].

Modelli di competizione tra due popolazioni

In genere una popolazione non vive in isolamento e può incontrare degli antagonisti. I modelli *predatore-preda* furono proposti ed analizzati dal matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) e dallo statistico americano Alfred Lotka (1880-1949) per descrivere la *competizione esterna* tra due popolazioni. Per questo motivo sono anche chiamati modelli di *Lotka-Volterra*.

Indicate con $u_1(t)$ e $u_2(t)$ rispettivamente la numerosità delle prede e dei predatori all'istante t , il più semplice modello per descrivere l'*interazione* tra le due specie è

$$\begin{cases} u_1'(t) = r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t), \\ u_2'(t) = -r_2 u_2(t) + c_{21} u_1(t) u_2(t), \end{cases} \quad (10.9)$$

dove r_1, r_2, c_{12}, c_{21} sono parametri positivi. Tali assunzioni descrivono la seguente situazione: la preda in assenza del predatore trova il suo sostentamento e si sviluppa, al contrario il predatore in assenza della preda è destinato all'estinzione. Inoltre l'effetto dell'interazione predatore-preda porta ad una decrescita della preda e un beneficio al predatore, che deve quindi la sua sopravvivenza alla presenza della preda.

Con gli strumenti dell'analisi matematica, gli studenti possono determinare i due equilibri di (10.9): $(0, 0)$ e $(\frac{r_2}{c_{21}}, \frac{r_1}{c_{12}})$ che rappresentano due punti nel piano di coordinate u_1 e u_2 (*piano delle fasi*) (eser-

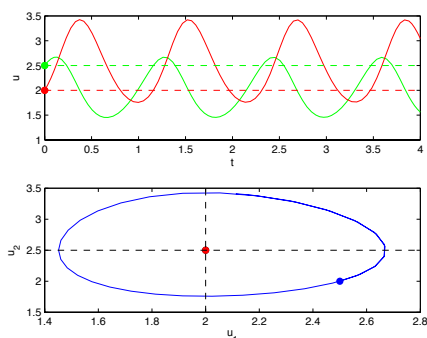


Figura 10.7: Soluzioni u_1 (preda in verde) e u_2 (predatore in rosso) di (10.9) (sopra) orbita e punto di equilibrio nel piano delle fasi (sotto) con $r_1 = 5, r_2 = 6, c_{12} = 2, c_{21} = 3$

cizio). Tracciando nel piano le rette di equazioni $u_1 = \frac{r_2}{c_{21}}$ e $u_2 = \frac{r_1}{c_{12}}$, si possono studiare il segno delle derivate delle due funzioni e dedurre alcune considerazioni qualitative sul comportamento delle soluzioni (esercizio). Assegnando i valori iniziali $u_1(0) = u_{1,0}, u_2(0) = u_{2,0}$ all'istante iniziale $t_0 = 0$, gli studenti ottengono dalle simulazioni numeriche i due grafici delle soluzioni $u_1(t), u_2(t)$ per $t \geq 0$ (*traiettorie*) e le relative *orbite* $(u_1(t), u_2(t))$ per $t \geq 0$ nel piano delle fasi (figura 10.7). Possono così apprezzare l'esistenza di soluzioni periodiche, che corrispondono alle orbite chiuse, ed il fatto che la dinamica si conserva variando i parametri del modello. Con gli strumenti dell'analisi matematica si possono anche determinare i valori medi $\int_0^T u_1(s) ds, \int_0^T u_2(s) ds$ con $T > 0$ uguale al periodo e dimostrare che le coordinate dell'equilibrio non banale (esercizio).

Gli studenti avevano inoltre a disposizione i codici per simulare numericamente anche la dinamica del modello con prelievo

$$\begin{cases} u_1'(t) = r_1 u_1(t) - c_{12} u_1(t) u_2(t) - d u_1(t), \\ u_2'(t) = -r_2 u_2(t) + c_{21} u_1(t) u_2(t) - d u_2(t), \end{cases} \quad (10.10)$$

con $d > 0$.

Negli anni Venti, Volterra propose i modelli (10.9) e (10.10) per risolvere un problema "reale" che il genero Umberto D'Ancona, biologo all'Università di Siena, gli aveva sottoposto. Le statistiche relative alla pesca nell'Adriatico settentrionale indicavano che, durante il periodo 1905-1923, la percentuale dei pesci grandi (= predatori) nel pesce pescato era aumentata negli anni della guerra e in quelli immediatamente successivi, in cui c'era stata una riduzione dell'attività di pesca (=prelievo). Perché l'incremento riguardava solo i predatori e non le prede? Analizzando i modelli, Volterra riuscì a spiegare in maniera esauriente questo fatto empirico (esercizio).

La fortuna dei modelli predatore-preda nasce dal fatto che si adattano bene alla descrizione di dinamiche di competizione tra popola-

zioni in diversi contesti applicativi - basti pensare all'uso dei pesticidi in agricoltura, alle tensioni fra classi sociali in politica e ai rapporti tra risorse e consumatori in ecologia. Altri modelli sono stati proposti per considerare anche gli effetti della competizione all'interno dei due gruppi di prede e predatori a causa di risorse limitate. Tali modelli più complessi possono essere agevolmente trattati in laboratorio proponendo agli studenti di modificare i codici forniti. In <https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/> sono proposti ulteriori modelli matematici con i relativi i codici per la simulazione numerica, quali, per esempio, il modello di epidemia proposto nel 1927 dai biomatematici A. G. McKendrick (1876-1943) e W.O. Kermak (1898-1970). Nonostante la sua semplicità, si è rivelato utile nella descrizione della diffusione di epidemie, quali la peste di Bombay nel 1905, e rappresenta un primo importante contributo nello studio dei modelli di epidemie.

Dinamica di coppia

L'idea di proporre un modello per lo studio della dinamica di coppia è stata ispirata dal lavoro di S. H. Strogatz [104]. In tale articolo l'autore analizza il rapporto amoroso di Romeo e Giulietta e sottolinea come il tema, catturando l'attenzione degli studenti, stimoli il loro interesse nei confronti della matematica. La passione d'amore di Laura e Petrarca è stata più recentemente esaminata da S. Rinaldi [92].

Per costruire un modello minimale che descriva la dinamica nel tempo dell'affetto in una coppia, si è assunto che:

- l'intensità dell'affetto di un individuo verso l'altro sia rappresentato da un'unica variabile (anche se l'amore è costituito da molteplici sentimenti difficilmente descrivibili da un'unica quantità);
- il modello descriva solo l'interazione dei due individui della coppia (in realtà la dinamica dell'amore in una coppia e delle emozioni di una persona risente anche della sua vita sociale);
- le personalità dei due individui non varino nel tempo (quindi il modello è adatto a valutare la dinamica sui brevi periodi).

All'interno della coppia vengono considerati i tre fenomeni:

- la *dimenticanza*, che descrive il disinteresse verso il partner;
- il *rinnovo*, che aumenta con l'amore del partner;
- l'*istinto*, che rende sensibile al fascino del partner.

Le variabili di stato sono $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e descrivono l'intensità dell'amore dell'individuo 1 e individuo 2 verso il partner all'istante t , con l'assunzione che valori positivi indichino *affetto*, valori nulli *indifferenza* e valori negativi *disamore*. La personalità è descritta da quattro parametri *costanti e positivi*: il fascino F_i , il tasso di dimenticanza a_i ,

il tasso di reattività b_i all'affetto del partner ed i tassi di reattività c_i al fascino del partner. Con queste ipotesi possiamo formulare il seguente modello:

$$\begin{cases} u_1'(t) = -a_1 u_1(t) + b_1 u_2(t) + c_1 F_2, \\ u_2'(t) = -a_2 u_2(t) + b_2 u_1(t) + c_2 F_1. \end{cases} \quad (10.11)$$

I termini $-a_i u_i$, $i = 1, 2$, in (10.13) descrivono l'effetto della dimenticanza: in assenza del partner il sentimento si spegne (si veda 10.3). La reazione dell'individuo i all'affetto (rinnovo) e al fascino del partner j , con $i \neq j$ è descritta rispettivamente dai termini $b_i u_j$ e $c_i F_j$ in (10.13). Utilizzando i codici forniti, che calcolavano le soluzioni e ne disegnavano il grafico e le relative orbite, gli studenti hanno potuto studiare la dinamica del modello (10.13), variandone la situazione iniziale e i parametri. Hanno potuto inoltre valutare l'esistenza o meno di situazioni di equilibrio, la solidità della relazione nel tempo o se la coppia trae vantaggio da un incremento del fascino (esercizio). Per tener conto del fatto che la reazione di un individuo all'affetto del partner è limitata, è stato proposto di considerare le seguenti funzioni di rinnovo:

$$R_i(u) = b_i \frac{u}{1 + |u|} \quad i = 1, 2. \quad (10.12)$$

Dopo aver studiato la funzione (10.12) e disegnato il grafico (esercizio), agli studenti è stato chiesto di fornirne un'interpretazione nel contesto della coppia e di simulare la dinamica del nuovo modello

$$\begin{cases} u_1'(t) = -a_1 u_1(t) + R_1(u_2(t)) + c_1 F_2, \\ u_2'(t) = -a_2 u_2(t) + R_2(u_1(t)) + c_2 F_1, \end{cases} \quad (10.13)$$

assegnando i valori iniziali e variando i parametri del modello (esercizio). Hanno potuto poi proporre altre funzioni $R_i(u)$ per meglio descrivere la reazione. Infine modificano i codici, hanno potuto considerare anche il caso del fascino che dipende dal tempo, definendo opportune funzioni $F_i(t)$. Attraverso l'interpretazione dei risultati numerici, andavano via via perfezionando il loro modello per meglio rispondere alla situazione reale che volevano descrivere.

Il metodo della analogie

Nell'A.A. 2011-12 il laboratorio si è concentrato soprattutto sui modelli descritti da equazioni differenziali in fisica, con una particolare attenzione ai sistemi meccanici ed ai circuiti <https://www.dimi.uniud.it/scuole/pls/>. Come più volte ricordato, un aspetto importante della modellizzazione consiste nell'adattabilità di un modello a descrivere fenomeni di diversa natura. Su tale osservazione si basa il *metodo della analogie* (figura 10.8). Confrontando tra loro le equazioni differenziali della meccanica e dei circuiti in figura 10.8, è stata costruita la tabella di corrispondenze in figura 10.9 dove la massa m corrisponde all'induttanza L , la costante elastica k all'inverso della capacità, l'attrito β alla resistenza R , la forza $f(t)$ applicata all'oscillatore meccanico corrisponde la f.e.m. $f(t)$ applicata al circuito elettrico. È quindi possibile studiare un sistema meccanico in termini di

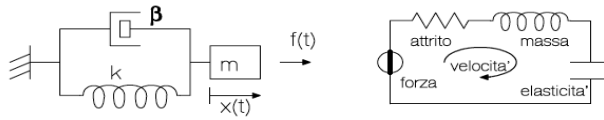


Figura 10.8: Sistemi meccanici e circuiti elettrici

forza	tensione	induttanza	massa
velocità	corrente elettrica	attrito	resistenza elettrica
spostamento	carica elettrica	capacità elettrica	elasticità

Figura 10.9: Tabella di corrispondenze sistemi meccanici e circuiti

temperatura	tensione	resistenza termica	resistenza elettrica
potenza termica dQ/dt	corrente elettrica	capacità termica	capacità elettrica
quantità di calore Q	carica elettrica		

Figura 10.10: Tabella corrispondenze sistemi termici e circuiti

un *circuito elettrico equivalente*. Nel caso dell'oscillatore armonico il circuito equivalente è il circuito RLC in serie. Il metodo delle analogie è usato anche per studiare *i sistemi termici* in termini di circuiti equivalenti. Si tratta, naturalmente, di sistemi termici schematizzati in termini di elementi concentrati e quindi descritti da equazioni differenziali ordinarie. In questo caso l'analogia usata più spesso è descritta nella tabella in figura 10.10, dove si nota l'assenza di elementi induttivi, in accordo con la forma delle equazioni che descrivono i fenomeni termici. Il metodo delle analogie trova impieghi importanti anche nello studio dei *sistemi elettromeccanici*, che comprendono una parte costituita da elementi elettrici e una da elementi meccanici, accoppiate fra loro in modo trasferimento di segnali dall'una parte all'altra. Questo è il caso, per esempio, di microfoni, altoparlanti e sensori di vibrazioni.

Modello numerico

Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è una relazione tra la funzione incognita $u(t) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e la sua derivata $u'(t)$, che può essere in generale descritta dalla relazione:

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0, \quad (10.14)$$

dove $f : [t_0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione che descrive la legge di evoluzione. Sotto opportune ipotesi sulla funzione f , è possibile dimostra-

re che esiste ed è unica la soluzione del problema a valori iniziali

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t_0 \leq t \leq t_f, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (10.15)$$

Quando ci sono più equazioni si parla di *sistema* di equazioni differenziali del primo ordine. Un'equazione differenziale di ordine k , che coinvolge le derivate della funzione fino all'ordine k , può essere sempre ricondotta ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. I sistemi di equazioni differenziali ordinarie sono uno degli strumenti matematici più importanti nella descrizione della dinamica di fenomeni reali. In generale è difficile ottenere una formula esplicita per la soluzione del problema a valori iniziali (10.15): abbiamo quindi bisogno di metodi numerici per l'approssimazione delle soluzioni che possono essere implementati sul calcolatore. Il metodo di Eulero fornisce un primo semplice esempio di *modello numerico*. Suddividiamo $[t_0, t_f]$ in N sotto-intervalli $[t_n, t_{n+1}]$ di ampiezza costante $h = \frac{t_f - t_0}{N}$:

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f, \quad t_{n+1} = t_n + h, \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Da

$$u'(t_0) = f(t_0, u_0) \approx \frac{u(t_0 + h) - u(t_0)}{h}$$

otteniamo che

$$u(t_0 + h) \approx u_1 = u_0 + hu'(t_0) = u_0 + hf(t_0, u_0).$$

Applicando ricorsivamente tale formula, otteniamo il metodo di Eulero

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n), \quad n \geq 0, \quad (10.16)$$

dove

$$u_n \approx u(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Riducendo l'ampiezza h l'approssimazione diventa sempre più accurata e si dice che il metodo *converge*. Il metodo di Eulero implementato dagli studenti che conoscono i rudimenti della programmazione anche per sistemi.

10.4 La voce della scuola

Alla presentazione del PLS-MS dell'A.A. 2010-11, come insegnante fui attratta in modo particolare da un grande tema: "La Matematica c'è", una proposta che comprendeva vari laboratori in cui si applicava la matematica per rappresentare e studiare la realtà che ci circonda. L'attività dal titolo "Realtà e modelli" era uno di questi. Avendo insegnato per parecchi anni agli studenti dell'Istituto Tecnico Industriale, indirizzo Elettronica, avevo potuto constatare che la matematica veniva applicata in tutte le discipline di indirizzo anche se a volte in modo massiccio, inconsapevole e poco sincronizzato con il corso di

matematica. Al contrario al Liceo Scientifico Tecnologico, oggi Liceo delle Scienze Applicate, neanche nell'insegnamento della fisica si riusciva a cogliere lo stretto legame con la matematica, raramente infatti in un corso di fisica di una scuola superiore si parla di derivata o di integrale. Tali considerazioni mi convinsero a partecipare al progetto con una classe quinta del liceo. L'attività ebbe inizio con alcuni incontri organizzativi e di formazione per gli insegnanti interessati con la prof.ssa R. Vermiglio, presso la sede dell'Università di Udine. Alcune lezioni teoriche sui concetti che sono alla base delle equazioni differenziali e propedeutici al laboratorio vero e proprio furono svolte dai docenti delle classi coinvolte.

La conferenza della prof.ssa Vermiglio presso l'Istituto, partendo da una introduzione storica al metodo scientifico, presentò un ampio ventaglio di situazioni reali studiate mediante equazioni differenziali: il moto di un pendolo, la dinamica di crescita di una popolazione, la dinamica di coppia, etc. Per problemi di tempo la scelta fu ristretta a due argomenti: dinamica di crescita di una popolazione legata al corso di biologia e dinamica di coppia che agli occhi di diciottenni sembrava molto intrigante. L'attività di laboratorio si svolse presso i laboratori dell'Università ed occupò due pomeriggi in orario extra-curricolare. Gli studenti simularono al computer alcune situazioni, utilizzando codici scritti in precedenza dalla docente con il software Matlab e provarono ad interpretare le soluzioni ottenute. Modificando opportunamente i parametri presenti nelle equazioni utilizzate era possibile osservare come cambiavano le soluzioni, i grafici corrispondenti e le relative interpretazioni. La conferenza conclusiva di una neo laureata, la dott.ssa Elisa Ellero, entusiasmò studenti ed insegnanti presenti, anche con aneddoti che richiamavano la datazione di opere d'arte ed altri reperti mediante lo studio del carbonio-14, ^{14}C .

Sull'onda dell'entusiasmo suscitato da questa attività una studentessa preparò la tesina per l'Esame di Stato dal titolo "*La Scientificizzazione dell'amore*", nella quale riferiva in particolare di uno studio fatto dal prof. Sergio Rinaldi del Politecnico di Milano sulle dinamiche dell'amore in chiave matematica [92]. Il prof. Rinaldi ha analizzato infatti, mediante equazioni differenziali, le variabili in gioco nel corso della passione amorosa di Petrarca per Laura, partendo da uno studio condotto da Frederic Jones, dell'Università di Cardiff, che quindici anni prima aveva svolto una attenta analisi linguistica e stilistica del Canzoniere [67]. La consapevolezza delle positive ricadute sia sugli studenti che sulla loro insegnante ha portato negli anni successivi altri docenti della scuola a ripetere l'esperienza con altre classi.

10.5 Conclusioni

La matematica si è sviluppata anche attraverso una continua interazione col mondo reale in un processo di *astrazione* e di *applicazione*. I nuovi problemi posti dalla realtà in cui viviamo richiedono lo sviluppo di idee matematiche ed algoritmiche innovative e queste a loro

volta forniscono potenti strumenti per la comprensione di fenomeni reali. Nel laboratorio si è voluto proporre agli studenti tale percorso, per consentire loro di apprezzare le potenzialità del linguaggio matematico. Inoltre hanno potuto svolgere un ruolo attivo “simulando” il lavoro dei ricercatori. Su indicazione degli insegnanti, tale percorso si è basato sui modelli descritti dalle equazioni differenziali ordinarie, ma può essere riformulato con modelli descritti da equazioni alle differenze.

Riferimenti bibliografici

- [21] M. Braun. *Differential Equations and their Applications. An Introduction to Applied Mathematics*. Springer, 1993.
- [51] U. Bottazzini E. Boncinelli. *La serva padrona. Fascino e potere della matematica*. Scienza e idee. Cortina Raffaello Editore, 2000.
- [52] E. Ellero. *Nota storica sulle equazioni differenziali ordinarie*. 2014.
- [57] A. Trifone G. Barozzi M. Bergamini. *Matematica blu*. Zanichelli, 2010.
- [58] L. Scaglianti G. Zwirner. *Strumenti e metodi matematici*. Vol. 2. Classics in Applied Mathematics. CEDAM, 1993.
- [66] G. Israel. *Modelli matematici-Introduzione alla matematica applicata*. Muzzio, 1995.
- [67] Frederic J. Jones. *The Structure of Petrarch's Canzoniere- A Chronological, Psychological and Stylistic Analysis*. Boydell e Brewer, 2002.
- [92] S. Rinadi. «Laura and Petrarch: An intriguing case of cyclical love dynamics». In: *SIAM Journal of Applied Mathematics* 58.4 (1988), pp. 1205–1221. DOI: [10.1137/S003613999630592X](https://doi.org/10.1137/S003613999630592X).
- [94] C.S. Roero S. Mazzone. *L'Età dei Lumi: matematica. Le equazioni differenziali*. Storia della scienza. Treccani, 1976.
- [96] J. E. Sasser. «History of ordinary differential equations. The first hundred years». In: *University of Cincinnati* (?).
- [104] Steven H. Strogatz. «Love Affairs and Differential Equations». In: *Mathematics Magazine* 61.1 (1888), p. 35.
- [114] Eugene Paul Wigner. «The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences». In: *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13 (1960), pp. 141–156.