RIVOLUZIONI MATEMATICHE: LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

GIOVANNA D'AGOSTINO, SARA DELLA SCHIAVA, MARINA ADRIANO, FABIO BOVE, LAURA CANDOTTI, CORRADO LANERA, CHIARA MILAN, ANNA MARIA ORLANDI

7.1 Introduzione

In questo lavoro viene descritto il Laboratorio "Rivoluzioni Matematiche" svolto negli anni 2011-2012/2012-2013 all'interno del PLS del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Udine, in collaborazione con alcuni Licei della Provincia di Udine.

Il Laboratorio è nato in seguito alla costruzione, sviluppata all'interno del corso di Laurea Magistrale in Matematica, di un insieme di strumenti per disegnare sul Semipiano di Poincaré utilizzando il Software Dinamico Geogebra. Strumenti simili erano già presenti in rete, ma svilupparli autonomamente attraverso un software libero quale Geogebra creava un certo vantaggio per il loro utilizzo in ambito scolastico, sia per la facilità ed economicità di installazione di Geogebra, che per un uso più consapevole dello strumento informatico (vedi la sezione " Costruzione degli Strumenti Iperbolici"). Dopo aver realizzato gli strumenti per disegnare nella geometria iperbolica, ci è venuta l'idea di utilizzarli all'interno di un Laboratorio del Progetto Lauree Scientifiche dedicato alla storia e allo sviluppo delle geometrie non euclidee. Lo scopo di questi laboratori, a nostro avviso, consiste nel cercare di cambiare la visione statica, rigida e meramente tecnica che troppo spesso viene associata alla matematica da parte dei non matematici. Questo pregiudizio si forma in ambito scolastico: è quindi fondamentale avvicinare gli studenti [delle scuole] a una visione dinamica della matematica, dove concetti apparentemente consolidati vengono rivoluzionati da nuove scoperte, spesso ad opera di giovani studiosi solo qualche anno più vecchi degli studenti a cui i laboratori PLS sono dedicati. Sviluppare questo aspetto culturale, però, richiede tempo ed è difficile riuscire a farlo all'interno dell'orario curricolare, visto che i programmi si concentrano in primo luogo sullo sviluppo di competenze tecniche della matematica.

L'obiettivo principale del laboratorio è quindi fornire ai ragazzi spunti di riflessione sulla natura della scoperta matematica e sulla struttura non definitiva delle sue verità. Lo studio delle geometrie non euclidee si presta a questo scopo, poiché l'idea stessa di geometria è stata radicalmente rinnovata all'inizio del XIX secolo: dopo aver attraversato molte resistenze, l'allora ingenua visione della geometria si trasformò in una più consapevole.

7.2 Inquadramento storico

La geometria nasce come scienza della misura già fra gli antichi Egiziani, vari millenni prima di Cristo. Anche gli antichi Greci si dilettavano nello studio di figure e superfici, ma dobbiamo a Euclide (attorno al 300 a.C.) la prima raccolta e sistematizzazione del sapere matematico dell'epoca: gli *Elementi di Geometria*. Quest'opera in 13 volumi ebbe ampia diffusione e fu tradotta in moltissime lingue, tanto da essere considerata un'impareggiabile libro di testo per circa 2000 anni.

Euclide scrisse gli Elementi basandoli su affermazioni semplici ed intuitive dette *postulati*, grazie ai quali articolò i ragionamenti alla base delle dimostrazioni di proposizioni e teoremi. Nel primo libro degli Elementi troviamo la Geometria (piana) Euclidea, alla cui base Euclide pose i seguenti cinque postulati:

1. Per due punti distinti passa un'unica retta.
2. Un segmento rettilineo può essere prolungato all'infinito.
3. Esiste una circonferenza con un centro e un diametro dati.
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti.
5. Se una retta r interseca due rette in modo che la somma degli angoli interni dallo stesso lato di r sia minore di 180 gradi, allora le due rette si intersecano da quel lato.

Il postulato V di Euclide attira immediatamente l'attenzione a causa della sua complessità e lunghezza. Euclide stesso non lo utilizzò prima della proposizione 29:

la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180 gradi,

anteponendogli tutte le proprietà della Geometria piana che possono essere dimostrate senza bisogno del quinto postulato.

I postulati della Geometria Euclidea ci appaiono così ovvi che è difficile per noi immaginare una geometria che non li soddisfi, infatti nel corso dei secoli i matematici si sono arrovellati non tanto sulla verità o meno dei postulati di Euclide ma sulla loro indipendenza: per descrivere in modo completo la Geometria piana è necessario assumere tutti e cinque i postulati, oppure il quinto, che è di gran lunga il più lungo e complicato, è una conseguenza degli altri? In quest'ultimo caso il postulato V assumerebbe uno status simile al teorema che afferma che gli angoli opposti al vertice hanno uguale misura: non abbiamo bisogno di assumere questa proprietà come postulato, visto che riusciamo a ricavarla come teorema.

Per spiegare meglio la situazione, riproponiamo il problema in un ambito più semplice. Consideriamo solo i primi due postulati di Euclide e chiediamoci se il secondo non sia già una conseguenza del primo. Possiamo dimostrare il secondo postulato basandoci solo sulle regole logiche e sul primo postulato? In questo caso ci convinciamo facilmente che non è così aiutandoci con un *modello*. Consideriamo la geometria della superficie della Terra invece di quella "ideale" di Euclide, in cui punti e rette sono quelli che riusciamo a disegnare sulla superficie terrestre; le "rette" di questa geometria sono quindi cerchi massimi di una sfera (dobbiamo disegnare "per terra" e la superficie della terra non è piatta . . .). Limitandoci poi a considerare i punti sull'emisfero boreale, cioè i punti che si trovano a nord dell'equatore (e quindi le semicirconferenze come nuove "rette") ci accorgiamo che per ogni coppia distinta di "punti" passa un'unica "retta". Quindi il primo postulato di Euclide è vero in questa geometria terrestre.

Consideriamo ora il secondo postulato: un segmento di retta terrestre (cioè una porzione di cerchio massimo) ha una lunghezza limitata da quella dei semicerchi massimi della superficie terrestre e non è quindi prolungabile indefinitamente. Quindi il secondo postulato di Euclide non è valido nella geometria terrestre. Abbiamo quindi trovato una geometria dove il primo postulato è verificato ma non il secondo: questo ci dice che il secondo postulato non può essere dimostrato logicamente dal primo, altrimenti ogni geometria che rendesse vero il primo postulato dovrebbe obbligatoriamente verificare anche il secondo. Quindi il secondo postulato non è una conseguenza del primo.

Per molto tempo i matematici si sono domandati se il postulato V fosse conseguenza o meno degli altri, ovvero, se fosse possibile o meno immaginare una strana geometria in cui i punti e le rette soddisfino i primi quattro postulati di Euclide ma non il quinto. Una buona parte di loro pensò di aver dimostrato la *dipendenza* del quinto postulato dagli altri quattro, e che quindi nessuna "geometria", per quanto strana, potesse soddisfare i primi quattro postulati senza soddisfare anche il quinto. Oggi sappiamo che tutti questi tentativi di dimostrazione sono errati, perché si basano sull'implicita assunzione di qualche altra proprietà, oltre ai primi quattro postulati; ad esempio:

data una retta e un punto esterno ad essa, per quel punto passa un'unica parallela alla retta data (postulato di Playfair);

oppure

due rette parallele sono sempre equidistanti .

Questa situazione d'incertezza perdurava ancora agli inizi del 1800; furono Carl Fredrich Gauss, Nikolai Lobačhevski e Janos Bolyai, nei primi decenni del 1800, a credere per primi alla possibilità di una convivenza fra i primi quattro postulati e la negazione del quinto, sviluppando quella che oggi conosciamo con il nome di Geometria Iperbolica.

Essi provarono a dimostrare nuovi teoremi geometrici a partire dai primi quattro postulati euclidei e dalla negazione del postulato V. La loro impresa ha dell'incredibile, visto che non potevano aiutarsi con una rappresentazione concreta degli oggetti che stavano studiando; in altre parole, non potevano utilizzare "disegni", cosa che tutti noi facciamo per risolvere anche i più semplici esercizi di Geometria Euclidea.

(a) Johan Carl Fredrich Gauss (1777-1855)

(b) Nicolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856)

(c) Janos Bolyai (1802-1860)

Figura 7.1: Precursori *della G*[g]eometria *I*[i]perbolica

Pur non avendo un modello concreto della nuova geometria, Gauss, Lobachevski e Bolyai si spinsero molto avanti nella sua esplorazione, arrivando a formulare teoremi di trigonometria e calcolo delle aree (ad esempio l'area di un triangolo nella nuova geometria non è data dalla formula (base $\times$ altezza)/2, ma si calcola a partire dalla misura degli angoli del triangolo).

(a) Eugenio Beltrami (1836-1900)

(b) Jules Henri Poincaré (1854-1912.

(c) Felix Christian Klein (1849-1925)

Figura 7.2: Ideatori modelli iperbolici

L'obiettivo di concretizzare la nuova geometria e di "disegnare" figure iperboliche venne raggiunto qualche decennio più tardi grazie all'opera di Eugenio Beltrami, Henri Poincaré e Felix Klein, che proposero delle realizzazioni (dette anche *modelli*) della Geometria Iperbolica.

7.3 Descrizione

Nel Laboratorio "Rivoluzioni Matematiche" abbiamo utilizzato uno dei modelli di Poincaré: il *Semipiano di Poincaré*. Per visualizzare i punti e le rette di questo modello ci si basa sull'usuale Piano Cartesiano, ma senza considerarne tutti i punti. Un'altra differenza è che non tutte le rette iperboliche "assomigliano" alle usuali rette euclidee. Nonostante ciò, come vedremo, molte proprietà della Geometria Euclidea sono ancora valide nel sistema dei punti e delle rette iperboliche e con un (bel) po' di sforzo si potrebbe verificare che essi soddisfano tutti i postulati di Euclide tranne il V.

L'insieme dei punti e delle rette iperboliche descritte nel prossimo paragrafo costituisce un modello di *Geometria Iperbolica* (piana) e realizza la strana geometria sviluppata da Gauss, Bolyai e Lobačevskij agli inizi del 1800.

Punti e rette nel Semipiano di Poincaré

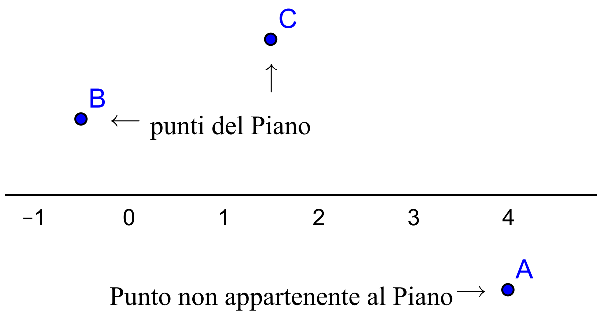

Figura 7.3: Punti del piano $\mathbb{H}$.

Esistono differenti rappresentazioni per la Geometria Iperbolica piana; il modello che utilizzeremo è detto Semipiano di Poincaré e lo indicheremo in breve con la lettera $\mathbb{H}$. L' insieme dei suoi punti è costituito da tutti i punti del piano cartesiano con ordinata (strettamente) positiva, cioè dai $P = (x_P, y_P)$ con $x_P, y_P \in \mathbb{R}$ e $y_P > 0$ (vedi figura 7.3). In simboli

$$\mathbb{H} := \{P = (x_P, y_P) \mid x_P, y_P \in \mathbb{R},\ y_P > 0\}. \tag{7.1}$$

In questo modello l'asse delle x svolge un ruolo particolare: i suoi punti non fanno parte del Semipiano di Poincaré, così come non ne fanno parte i punti con ordinata negativa. L'asse in questione viene detto *Orizzonte*.

I punti di $\mathbb{H}$ sono particolari punti del Piano Euclideo e sono facili da descrivere. La trattazione delle rette, invece, è più delicata e non tutte le nuove "rette" somigliano a rette euclidee: questo è il prezzo che il modello di Poincaré deve pagare per fare sì che il quinto Postulato non sia vero in questo ambiente, mentre gli altri quattro postulati continuano invece a valere.

Rette del Semipiano di Poincaré

Gli oggetti che nel Semipiano di Poincaré vengono chiamati *rette* (o *iper rette*) sono di due tipi. Per descrivere una retta del primo tipo, fissiamo un numero reale k e consideriamo la retta euclidea verticale di equazione $x = k$, ovvero la retta verticale passante per il punto $(k, 0)$ del Piano Cartesiano. Tutti i punti di questa retta verticale con ordinata positiva appartengono alla nuova retta iperbolica che chiameremo L_k (vedi figura 7.4).

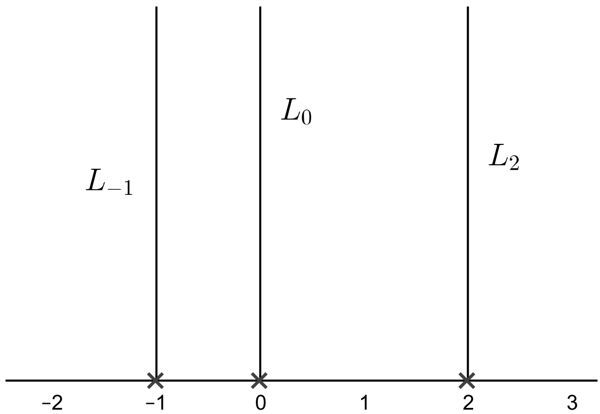

Figura 7.4: Rette del primo tipo.

Non possiamo però limitarci a considerare rette di questo tipo, altrimenti non varrebbe il postulato I (che assicura l'esistenza di una retta per ogni coppia di punti distinti): se considerassimo soltanto rette del primo tipo, non ce ne sarebbe alcuna passante per punti che non sono allineati verticalmente, come ad esempio i punti $P = (0, 1)$ e $Q = (1, 1)$.

Dobbiamo introdurre dunque nuove rette, che chiameremo del secondo tipo. Esse non sono porzioni di rette euclidee, come quelle del primo tipo, anzi sono curve (da un punto di vista euclideo ortodosso...)*!* Per descrivere una retta di questo tipo fissiamo un numero $c \in \mathbb{R}$ ed $r > 0$: con questi elementi possiamo determinare la circonferenza euclidea di centro $(c, 0)$ e raggio r. Tutti i punti di questa circonferenza appartenenti ad $\mathbb{H}$ costituiscono una retta del secondo tipo, che indicheremo con ${}_cL_r$ (vedi figura 7.5). Tale retta iperbolica è quindi la semicirconferenza superiore della circonferenza euclidea di equazione $(x - c)^2 + y^2 = r^2$, privata degli estremi.

Qualche domanda sulle nuove rette...

Una volta definiti i nuovi punti e le nuove rette (gli iper punti e le iper rette) siamo pronti a porci le prime domande; ad esempio è vero che:

1. per due iper punti diversi passa sempre un'unica iper retta?

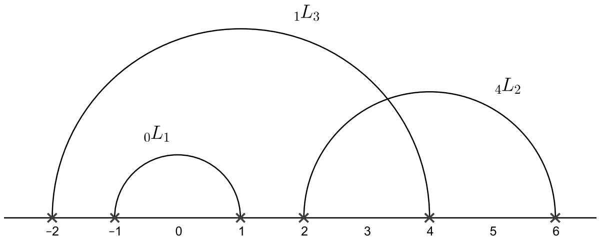

Figura 7.5: Rette del secondo tipo.

2. due iper rette diverse si intersecano in al più un punto?

3. data una iper retta r e un punto P che non appartiene ad r, esiste una sola iper retta parallela ad r che passa per P? (due iper rette si dicono parallele se coincidono o se non si intersecano)

4. se r è parallela ad s ed s è parallela a t, allora r è parallela a t?

Più le domande si complicano, più sentiamo l'esigenza di avere a disposizione un mezzo veloce e preciso per iper disegnare...

Nel prossimo paragrafo daremo un'idea di come si possa utilizzare il Software Geogebra per disegnare sul Semipiano di Poincaré.

Esempio di costruzione di uno strumento: la semiretta iperbolica fra due punti

Utilizzando il Software GeoGebra è possibile ricreare il Semipiano di Poincaré e disegnarci sopra dinamicamente, cercando di scoprire in questo modo quali delle proprietà geometriche a noi familiari sono ancora valide in questo mondo e quali no.

Costruire uno strumento iperbolico GeoGebra per degli studenti richiede di fare in modo che il risultato ottenuto sia indipendente da particolari configurazioni del sistema informatico in uso. Per esempio non si potranno sfruttare specificità configurabili del software o strumenti già creati in precedenza, ma il tutto dovrà essere auto-consistente. Allo stesso tempo bisogna capire come *ragiona* il software, per far sì che le costruzioni siano sempre ben definite, soprattutto quando (come nel caso delle rette iperboliche) si può passare *dinamicamente* da una retta di un tipo a una dell'altro muovendo i punti in gioco.

Presentiamo ora a titolo di esempio le considerazioni che sono alla base della costruzione dello strumento per disegnare *semirette iperboliche* (o iper semirette). Questo tipo di presentazione è stata sfruttata nella lezione di *strumenti GeoGebra* con lo scopo di avvicinare i ragazzi a ragionare per passi successivi fino ad arrivare alla definizione dello strumento, facendo proposte, analizzando di volta in volta le criticità residue e offrendone una soluzione. Per ragioni di spazio non alleghiamo il protocollo di costruzione vero e proprio, che comunque è consultabile fra gli allegati a questo libro.

Per costruire uno strumento che disegni l'iper semiretta prevediamo in input due punti, per i quali sarà importante l'ordine: l'iper semiretta dovrà partire dal primo con direzione il secondo. Un'altra considerazione preliminare sulla costruzione dello strumento è che questo dovrà essere sia in grado di disegnare entrambi i tipi di iperrette (tipo 1 e tipo 2), sia dovrà permettere il passaggio "trasparente" tra queste quando i punti dati in input sono mossi "dinamicamente".

Cominciamo con la costruzione dell'iper semiretta di tipo 2. Quello che vogliamo ottenere è un arco che parta dal primo punto, vada verso il secondo e finisca nell'orizzonte (escluso), il tutto su una circonferenza con centro nell'asse x. Il primo vero problema che si incontra è quello di definire la direzione di questo arco. Per risolverlo troviamo l'asse euclideo tra i due punti, che ci permette di identificare il centro $C = (c, 0)$ della *circonferenza di supporto* della semiretta iperbolica come intersezione di tale asse con l'orizzonte. Sappiamo quindi che l'equazione della circonferenza di supporto della semiretta iperbolica è $(x - c)^2 + y^2 = r$, dove r è la distanza di C da uno dei punti di input. Per identificare la giusta direzione della iper semiretta utilizziamo quel punto Q d'intersezione fra la circonferenza di supporto e l'orizzonte che è dalla stessa parte del secondo punto in input rispetto all'asse già trovato. Un modo *sintetico* per individuare Q è il seguente: se è P l'intersezione fra l'orizzonte e la retta (euclidea) parallela all'asse passante per il secondo punto, Q è l'intersezione fra la semiretta (euclidea) $\overrightarrow{CP}$ e la circonferenza di supporto. Possiamo quindi definire la nostra iper semiretta come l'arco di circonferenza passante per i due punti di input e per Q.

Osserviamo che tale definizione porta a trovare un arco che comprende anche il punto all'orizzonte. Questo non crea problemi se adottiamo un test per garantire la stretta positività delle ordinate dei punti in input (che dovrà quindi essere presente in ogni strumento creato per la geometria iperbolica). D'altra parte questa caratteristica ci permette di enfatizzare un concetto: disegnando tale punto con una "x" al posto dell'usuale pallino, rendiamo evidente agli studenti che tale punto non appartiene all'iper semiretta.

Passiamo ora alle semirette iperboliche di tipo 1, ricordandoci che vogliamo essere in grado di passare dinamicamente da semirette di un tipo a semirette di tipo diverso. Poiché GeoGebra (o almeno la versione che abbiamo utilizzato per costruire i nostri strumenti) non è in grado di definire oggetti di natura differente in base a un condizionale, non possiamo utilizzare una costruzione del tipo chiedere "se... allora disegna un arco, se invece... allora disegna un a semiretta"; dobbiamo costruire la nostra iper semiretta sempre come un *arco*, come nel caso di semirette di tipo 2. Questo è possibile perché GeoGebra permette di definire archi degeneri, cioè "segmenti", ma per definire questo arco degenere servono tre punti. Per fare in modo che lo strumento sia in grado di capire se siamo in questo caso impostiamo un test di *verticalità* e, nel caso in cui il secondo punto stia sotto al primo, sarà sufficiente formare l'arco degenere tra il primo punto di input, il secondo e il piede della sua perpendicolare all'orizzonte. Al contrario, quando il secondo punto in input sta sopra al primo, dobbiamo riuscire a identificare il "punto all'infinito". Per risolvere questo problema abbiamo un'ulteriore opportunità di far ragionare gli studenti sull'universo matematico visto dal punto di vista informatico, dove l'infinito non esiste. Sfruttiamo quindi i limiti intrinsechi del software definendo il punto all'infinito come "il punto con ascissa: la stessa dei punti dati, e ordinata: il massimo numero rappresentabile dal sistema". Così facendo otteniamo, nel mondo interno a GeoGebra, un oggetto che (di fatto) è un segmento, ma non è distinguibile agli occhi di GeoGebra (e quindi ai nostri) da una semiretta euclidea. Questo conclude la costruzione.

Altri strumenti, altre domande...

Utilizzando ancora Geogebra possiamo continuare la costruzione del modello di Poincaré, definendo angoli, triangoli, misure... e ponendoci nuove domande: il Teorema di Pitagora vale nel nuovo mondo? E i criteri di congruenza fra i triangoli? E...

7.4 La voce della scuola

In questo paragrafo la descrizione del laboratorio viene affidata ai docenti della scuola superiore che hanno partecipato in prima persona alla sua realizzazione.

Liceo Scientifico Tecnologico "Arturo Malignani" - Udine

Il tema del laboratorio "Le rivoluzioni matematiche: le geometrie non euclidee" non solo è stimolante di per sé, ma rientra anche fra i contenuti curricolari previsti per il quinto anno di studi liceali. La scelta di partecipare con gli allievi è stata una conseguenza naturale e finalizzata ad un doppio canale di indagine (teoria astratta unita al metodo laboratoriale), in modo che l'esperienza non risultasse per gli allievi appesantita dalla necessità di procedere a calcoli che, in qualche misura, possono sottrarre tempi ed energie nell'affrontare i concetti inerenti la ricerca.

Ovviamente, rientrando la materia fra gli argomenti curricolari, era implicita la partecipazione delle tre classi quinte nella loro interezza.

L'attività laboratoriale è stata preceduta da un seminario tenuto dal Prof. S. Sonego (Ordinario di Fisica Matematica presso l'Università degli Studi di Udine) che ha saputo suscitare l'interesse e la curiosità degli studenti e degli insegnanti presenti, delineando le origini e gli sviluppi storici delle geometrie non euclidee. Lo stesso Prof. Sonego ha concluso il ciclo delle attività con un secondo seminario, incentrato sulle relazioni tra le geometrie non euclidee e l'ambito della Fisica, cosa che ha certamente contribuito ad arricchire le conoscenze degli studenti in una materia potenzialmente presente nelle prove dell'Esame di Stato.

Gli studenti hanno potuto agevolmente prender parte all'attività laboratoriale in quanto, negli anni scolastici precedenti, avevano già avuto modo di utilizzare il software GeoGebra per realizzare semplici costruzioni geometriche all'interno della geometria euclidea.

Al laboratorio hanno partecipato tre classi quinte del Liceo, seguite da tre diverse docenti. Per necessità organizzative, dipendenti dal monte ore settimanale degli allievi, le attività di laboratorio si sono svolte in orario curricolare; le docenti hanno seguito autonomamente gli allievi, supportate dalla docente dell'Università.

La collaborazione con l'Università si è esplicitata nel modo seguente:

- lezione-formazione iniziale ai docenti sull'utilizzo di strumenti informatici specifici per realizzare costruzioni sul semipiano di Poincaré;

- contatti settimanali via email per chiarimenti, *focus group* e scambio di materiali;

- intervento diretto nella seduta finale del laboratorio in compresenza con le docenti e le tre classi coinvolte.

Prima di iniziare il lavoro in classe, agli allievi sono stati forniti gli strumenti informatici e ci si è assicurati che tutti potessero utilizzare il software a casa. L'utilizzo di software libero e multi-piattaforma è perciò stato molto importante, proprio per permettere agli allievi di utilizzarlo nello svolgimento del lavoro domestico assegnato loro.

In altre parole, il PLS ha comportato una interazione tra Università e docenti dell'istituto, i quali hanno avuto l'opportunità di approfondire alcune tematiche e di utilizzare metodiche nuove; inoltre:

- gli studenti sono stati coinvolti direttamente dal personale universitario ed indirettamente dai loro docenti;

- i docenti si sono trasformati in "mediatori" sulle tematiche e sulle metodiche citate;

- gli studenti infine si sono appropriati essi stessi di strumenti informatici, dei quali hanno fatto uso in aula e nelle esercitazioni domestiche.

L'attività si è svolta in tre lezioni, durante le quali sono state affrontate, una alla volta, le schede di lavoro fornite dalla docente universitaria: un primo momento della lezione è sempre stato dedicato all'introduzione teorica degli argomenti, il resto del tempo all'attività laboratoriale svolta in piccoli gruppi. A casa poi gli allievi avevano il compito di compilare le schede individualmente e di fornire all'insegnante le costruzioni effettuate, anche utilizzando la piattaforma *moodle* dell'Istituto. Dato che l'orario di due classi lo consentiva, un paio di incontri sono stati svolti lavorando insieme, il terzo invece si è tenuto separatamente. Quando necessario, durante le lezioni sono stati anche forniti chiarimenti sul lavoro svolto a casa. L'incontro finale con la docente universitaria ha poi contribuito a rinforzare gli apprendimenti e a chiarire i dubbi rimasti.

In conclusione, l'attività svolta ha avuto una ricaduta senz'altro positiva sia per gli studenti che per i docenti che li hanno seguiti.

Gli elementi positivi per gli allievi sono stati i seguenti:

- hanno avuto modo di affrontare un argomento curricolare mediante attività laboratoriale, utilizzando la sperimentazione per comprendere concetti astratti;

- hanno lavorato in gruppo, confrontandosi fra pari e utilizzando competenze comunicative che *sono raramente sfruttate in matematica*;

- sono stati messi nelle condizioni di utilizzare strumenti tecnologici per l'apprendimento;

- hanno avuto modo di confrontarsi con studenti di altre classi nelle attività *di* laboratorio, durante l'incontro a conclusione dell'attività e durante i seminari;

- hanno vissuto un'esperienza spendibile in termini di orientamento in uscita.

Gli aspetti positivi per i docenti sono stati i seguenti:

- hanno avuto modo di affrontare un argomento curricolare mediante attività laboratoriale, cosa che, richiedendo tempi più dilatati, si riesce a fare raramente;

- hanno lavorato insieme, confrontando i diversi metodi di lavoro e contribuendo ad arricchire la didattica all'interno dell'Istituto;

- hanno utilizzato strumenti tecnologici per l'insegnamento, incrementando le proprie competenze.

La consapevolezza dei buoni risultati conseguiti ha portato all'esigenza di ripetere l'esperienza, allargandola ad altre classi e ad altri docenti della scuola.

Liceo Scientifico " Magrini"- Gemona

Nel primo ciclo di istruzione gli studenti imparano a riconoscere le figure geometriche e a studiarne le prime proprietà: l'approccio è intuitivo e basato prevalentemente sull'esperienza, con frequenti modellizzazioni di situazioni e oggetti della vita reale. All'inizio del liceo i ragazzi si scontrano con le prime formalizzazioni di questioni che ritengono acquisite, ma delle quali sfugge ancora il senso profondo. Ad esempio, alla domanda "che cos'è un angolo giro?" solitamente la risposta è "un angolo di 360 gradi" e, quando si chiede cosa intendano per grado, rispondono: "la trecentosessantesima parte dell'angolo giro!". Ed è faticoso per loro darsi ragione della necessità di un processo deduttivo rigoroso nel quale, partendo da enti primitivi ed assiomi, riorganizzare le conoscenze di geometria. L'allenamento all'organizzazione rigorosa delle conoscenze permea tutto il percorso liceale. Quando, in quinta, ogni tassello sembra andare al suo posto, ecco che da più parti (in filosofia, in matematica, in fisica) viene prospettata l'esistenza di nuove geometrie coerenti, che nascono dalla discussione degli stessi fondamenti della Geometria Euclidea accettati con fatica.

Quando, ad inizio anno, l'Università di Udine ha proposto alle scuole della provincia una serie di laboratori inseriti nella cornice del PLS, abbiamo pensato che era il momento giusto per anticipare nella nostra classe terza un laboratorio sulle geometrie non euclidee e far sperimentare forme di astrazione non necessariamente legate all'esperienza quotidiana. E' stata scelta una classe molto curiosa e storicamente aperta alle proposte extracurricolari offerte dalla scuola: l'adesione degli studenti è stata libera e in tredici si sono impegnati a frequentare le attività (non necessariamente quelli con i migliori risultati in matematica).

Diverse le motivazioni che hanno portato i ragazzi ad accettare l'invito: avere dei contatti con il mondo dell'Università, iniziare un percorso di orientamento post-diploma (le famiglie sono molto sensibili e presenti nel sollecitare iniziative con questa finalità) e, non ultima, la possibilità di uscire fuori dal proprio territorio ed "andare in città".

L'impostazione del lavoro, che ha privilegiato il coinvolgimento diretto dei ragazzi nella scoperta delle figure e delle proprietà nelle nuove geometrie, è stata molto apprezzata ed ha portato ad invogliare al confronto dei nuovi risultati con i corrispondenti nella geometria euclidea e ad individuare quelli indipendenti dall'adozione del quinto postulato. Volgendo lo sguardo indietro e sfogliando il libro della classe prima, è stato possibile riconoscere come l'autore abbia presentato dapprima tutti i risultati validi per la geometria assoluta, del tutto indipendenti da assunzioni sulle parallele, ed abbia posticipato quelli conseguenza dell'introduzione del quinto postulato.

L'utilizzo del software Geogebra, opportunamente adattato per la costruzione degli oggetti della geometria iperbolica, ha permesso agli studenti di visualizzare i risultati e di interpretarli: questa modalità accattivante, stimolante e coinvolgente ha fatto sì che gli studenti si fermassero con entusiasmo più volte per altre due ore a scuola nel pomeriggio dopo una breve pausa pranzo.

Il seminario "Geometrie non euclidee tra matematica e fisica" tenuto dal prof. Sebastiano Sonego, seppur impegnativo e non sempre, per contenuti, accessibile agli studenti di una classe terza, li ha fatti riflettere su come, con la scoperta di una pluralità di geometrie e l'accettazione dell'ipotesi di Einstein dell'esistenza di un'interazione tra materia e spazio, rimanga superata l'implicita corrispondenza tra spazio geometrico euclideo e spazio fisico concreto. La questione sarà successivamente ripresa nella classe quinta.

L'intero percorso ha tanto incontrato il gradimento degli studenti che gli stessi non hanno esitato a partecipare ad un incontro aggiuntivo opzionale con il dott. Corrado Lanera, sviluppatore degli strumenti iperbolici ad-hoc utilizzati in Geogebra nel corso, per avere una panoramica generale su come realizzare la creazione di strumenti per particolari esigenze.

In conclusione, la proposta del laboratorio ha permesso a noi docenti di proporre contenuti e riflessioni che altrimenti non avrebbero trovato spazio nel curricolo ordinario e, nello stesso tempo, di fare esperienza diretta di "scoperta condivisa" con gli studenti e dei vantaggi di un approccio in cui il docente si cala nel ruolo di mediatore, per guidare il processo di apprendimento attraverso la scoperta.

7.5 Ringraziamenti

Un sentito ringraziamento agli insegnanti e agli studenti delle scuole Liceo Scientifico Le Filandiere di San Vito al Tagliamento, Liceo Scientifico Magrini di Gemona, Iti e Liceo delle Scienze Applicate Malignani di Udine, che hanno partecipato al laboratorio nei vari anni in cui è stato realizzato. Un ringraziamento particolare al Prof. Sebastiano Sonego che ha curato la parte interdisciplinare del laboratorio, ed in particolare i legami fra spazio geometrico e fisico.

Riferimenti bibliografici

[30] J.N. Cederberg. *A course in Modern Geometry*. Springer, 2001.

[40] Donald M. Davis. *The Nature and Power of Mathematics*. Princeton University Press, 1993.

[77] R.S. Millman e G.D. Parkerm. *Geometry: a Metric approach with models*. Springer-Verlag, 2014.