L'INFINITO

FABIO BOVE, LAURA CANDOTTI, ALBERTO MARCONE

2.1 Introduzione

In questo capitolo viene descritto il Laboratorio sull'infinito svolto nell'anno scolastico 2013–2014 presso il Liceo Scientifico Magrini di Gemona del Friuli. Laboratori sullo stesso tema erano già stati organizzati presso il Liceo Scientifico "Le Filandiere" di San Vito al Tagliamento nell'anno scolastico 2005–06 e presso il Liceo Scientifico "Niccolò Copernico" di Udine nell'anno scolastico 2010–11.

Il tema dell'infinito è centrale nella matematica e può venire affrontato da molteplici punti di vista, anche interdisciplinari, come nell'edizione svolta al Copernico in cui si sono esplorati alcuni suoi aspetti dal punto di vista della filosofia. Anche volendo restare all'interno della matematica sono molteplici gli approcci possibili, coinvolgendo ad esempio l'analisi infinitesimale o i procedimenti geometrici di esaustione.

In questa edizione del laboratorio ci si è concentrati sull'analisi matematica del concetto di infinito attraverso la nozione di cardinalità. Obiettivo principale era dunque far scoprire agli studenti una parte di matematica che solitamente non viene affrontata nelle scuole superiori. In questo modo si è cercato anche di presentare la matematica come una disciplina viva, che sfida le capacità dei singoli e dei gruppi alla comprensione e alla scoperta di fenomeni sempre nuovi e, a volte, contrari ad alcune intuizioni di partenza.

2.2 Inquadramento storico

Il grande matematico del XX secolo Hermann Weyl ha scritto: "Se si vuol trovare una breve massima che riguardi il centro vivo della matematica si può dire certamente che la matematica è la scienza dell'infinito". Eppure l'infinito è stato un problema per molti secoli. Già Aristotele aveva scritto: "Le considerazioni sopra l'infinito hanno però una difficoltà, perché si presentano molte impossibilità, tanto se si si immagina che esso esista, quanto se si immagina che esso non esista".

Le "difficoltà" cui si riferisce Aristotele sono ad esempio i paradossi di Zenone (489 a.C.–431 a.C.), alcuni dei quali si basano sull'assunzione che non sia possibile compiere infinite azioni in un tempo finito.

Il paradosso più interessante per i nostri scopi è quello che una parte di un insieme infinito può essere altrettanto grande che l'insieme intero, contraddicendo il principio secondo cui la parte è minore del tutto. Galileo Galilei (1564—1642) enuncia magistralmente questo paradosso nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*" del 1638. Egli fa dire ai personaggi del suo dialogo:

Salviati: Io suppongo che voi benissimo sappiate quali sono i numeri quadrati, e quali i non quadrati.

Simplicio: So benissimo che il numero quadrato è quello che nasce dalla moltiplicazione d'un altro numero in se medesimo: e così il quattro, il nove, etc., son numeri quadrati, nascendo quello dal dua, e questo dal tre, in se medesimi moltiplicati.

Salviati: Benissimo: e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadrati, i producenti, cioè quelli che si multiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri poi, che non nascono da numeri multiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?

Simplicio: Non si può dir altrimenti.

Salviati: Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.

Simplicio: Così sta.

Salviati: Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici son tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. *E pur tuttavia si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa; perché sino a cento vi sono dieci quadrati, che è quanto dire la decima parte esser quadrati; in dieci mila solo la centesima parte sono quadrati, in un millione solo la millesima: e pur nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire, tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.*

Sagredo: Che dunque si ha da determinare in questa occasione?

Salviati: Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.

Galileo conclude quindi che **non possiamo misurare l'infinito**.

La risposta *di Aristotele* ai paradossi dell'infinito, *adottata* dalla maggior parte dei matematici fino alla metà del XIX secolo, è quella di ritenere l'infinito un concetto *potenziale* e non *attuale*. Ciò significa che i numeri naturali sono infiniti solo nel senso che per ognuno di essi è possibile trovarne uno più grande, non nel senso che il loro insieme (necessariamente infinito) esiste realmente.

Il grande matematico Carl Friedrich Gauss (1777–1855) riassume questo approccio all'infinito:

> Protesto contro l'uso di grandezze infinite come di qualche cosa di completo, cosa che non è mai permessa in matematica. L'infinito è solo un modo di dire.

La matematica moderna è però di diverso avviso. Il matematico tedesco Georg Cantor (1845–1918) è il fondatore della moderna teoria degli insiemi, ed è grazie a lui che la matematica ha trovato il modo di misurare l'infinito e mostrare che, contrariamente a quanto pensava Galileo, non tutti gli infiniti sono uguali.

Cantor iniziò ad investigare sistematicamente l'esistenza di biiezioni tra insiemi, che peraltro sono alla base del modo in cui apprendiamo a contare nell'infanzia. Al giorno d'oggi usiamo queste definizioni:

- Due insiemi A e B sono **equipotenti** se esiste una biiezione tra di essi, cioè una relazione tale che ad ogni elemento di A corrisponda uno e un solo elemento di B e ad ogni elemento di B corrisponda uno e un solo elemento di A. In questo caso scriviamo $A \equiv B$.

- Scriviamo $A \preceq B$ se esiste un'iniezione di A in B, cioè una relazione tale che ad ogni elemento di A corrisponda uno e un solo elemento di B .

- A ha potenza minore di B se $A \preceq B$ e $A \not\equiv B$: scriviamo $A \prec B$.

Si vede facilmente che $\equiv$ è una relazione d'equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva), che $\preceq$ è riflessivo e transitivo e che $\prec$ è transitivo.

Nel *Dialogo* Galileo mostra che l'insieme di tutti i numeri naturali e l'insieme dei quadrati sono equipotenti. Ciò a cui dobbiamo rinunciare (rispetto alla matematica del finito) è il principio che "la parte è minore del tutto". Anzi, un modo per caratterizzare gli insiemi infiniti è proprio:

> un insieme A è infinito se esiste $B \subset A$ tale che $A \equiv B$.

La cosiddetta Rivoluzione cantoriana incontrò non poche resistenze: alcuni dei più illustri matematici dell'epoca la rifiutarono. Leopold Kronecker (1823–1891) apostrofò Cantor come "ciarlatano" e "corruttore di giovani" e scrisse:

> Non sono sicuro di cosa sia predominante nella Teoria di Cantor, se filosofia o teologia, ma sono sicuro che non ci sia della matematica.

D'altro canto Henri Poincaré (1854–1912) definì la teoria di Cantor una "grave malattia". Il risultato fu che Cantor rimase confinato per l'intera carriera all'Università di Halle, un centro relativamente minore nel panorama della matematica tedesca dell'epoca. La teoria cantoriana degli insiemi però dimostrò progressivamente la propria fecondità, tanto che nel 1926 David Hilbert scrisse la famosa frase:

> Nessuno potrà a cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi.

Concludiamo questa breve carrellata storica con un'altra citazione di Hilbert:

> Nessun'altra questione ha scosso da tempi immemorabili la mente degli uomini quanto quella dell'infinito. L'infinito ha agito in modo così eccitante e ricco di frutti sull'intelligenza come poche altre idee. Però l'infinito ha bisogno di spiegazioni più di qualsiasi altro concetto.

2.3 Descrizione

Il laboratorio si è svolto nell'arco di sei incontri, alcuni tenuti presso la sede universitaria dei Rizzi ed altri presso il Liceo di Gemona.

Nel primo incontro i docenti universitari hanno tenuto un seminario introduttivo presso la sede del DIMI, in cui è stata presentata la storia pre-cantoriana dell'infinito in matematica, soffermandosi in particolare sui paradossi dell'infinito e proponendo vari esempi di biiezioni tra insiemi che a prima vista potrebbero apparire di dimensioni diverse.

I successivi quattro incontri sono stati caratterizzati da uno stile più laboratoriale: agli studenti venivano poste alcune domande che li stimolassero a scoprire varie peculiarità dei diversi tipi di infinito. Inizialmente si è sviluppata la nozione di biiezione esplorando in particolare gli insiemi infiniti numerabili, ovvero quelli che sono in biiezione con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Alcuni esempi sono l'insieme delle coppie di elementi di $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Successivamente si è scoperta l'esistenza di insiemi infiniti più che numerabili come l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali: riprendendo le notazioni introdotte nella sezione precedente, si ha $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$. Una volta introdotto il teorema di Cantor-Bernstein (che afferma che se $A \preceq B$ e $B \preceq A$ allora $A \equiv B$) si è potuto ottenere che $\mathbb{R} \equiv \mathcal{P}(\mathbb{N})$, dove in generale $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi dell'insieme A. In particolare si ha che $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Nell'ultimo incontro i docenti universitari hanno presentato alcuni argomenti più avanzati. Partendo dal teorema di Cantor (che afferma che per ogni insieme A si ha $A \prec \mathcal{P}(A)$) si è introdotta la successione infinita e crescente delle cardinalità infinite $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$, che può essere estesa ai casi limite ottenendo cardinali quali $\aleph_\omega$. Si è poi parlato dell'aritmetica dei cardinali infiniti: essa è banale per quanto riguarda somma e prodotto ma più interessante per quanto riguarda la funzione esponenziale, che nel caso in cui la base sia 2 corrisponde all'operazione insiemistica $\mathcal{P}$ introdotta in precedenza. Si è giunti così ad enunciare l'ipotesi del continuo, formulata da Cantor nel 1878 e prima nella lista *dei* 23 problemi matematici per il XX secolo, formulata nel 1900 da Hilbert in occasione della sua conferenza al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi. Nel corso del XX secolo si è dimostrato che l'ipotesi del continuo è indipendente dagli assiomi per la teoria degli insiemi codificati nella teoria di Zermelo-Fraenkel (ZFC). Nel 1940 il matematico austriaco Kurt Gödel (1906–1978) mostrò che ZFC non dimostra che l'ipotesi del continuo è falsa, mentre nel 1963 il matematico statunitense Paul J. Cohen (1934–2007) mostrò che ZFC non dimostra l'ipotesi del continuo.

2.4 La voce della scuola

Due docenti del liceo "Luigi Magrini" di Gemona del Friuli hanno subito colto con entusiasmo l'occasione di partecipare al PLS sull'Infinito matematico, in quanto l'attività poteva avere due valenze: un piacevole ripasso e un utile approfondimento per loro medesimi un arricchimento per la loro professionalità e una interessante attività didattica extrascolastica per gli studenti del liceo, che sentivano la necessità e il desiderio di ampliare le proprie conoscenze e, cosa più importante, la propria mente.

Al hanno partecipato 21 studenti del liceo scientifico, così ripartiti: 1 frequentante la classe seconda, 1 la classe terza e 19 la classe quarta.

L'adesione è stata immediata e non spinta dall'insegnante: durante i cinque anni del liceo le occasioni per fare un cenno, un link al tremendo, magico, imprevedibile "infinito" sono numerose, a partire già dalla classe prima: pensiamo ai numeri naturali, interi e razionali posti sulla retta numerica, per aggiungere in seconda quelli irrazionali; pensiamo ai numeri primi; pensiamo agli insiemi infiniti proposti in insiemistica; pensiamo alla direzione (vista come classe di equivalenza nella relazione di parallelismo fra le rette del piano); pensiamo al comportamento del coefficiente angolare di una retta che tende a $+\infty$ per trasformarsi in un attimo a $-\infty$... (basta fare un balzo oltre la retta verticale); pensiamo agli asintoti dell'iperbole in terza, agli asintoti delle funzioni tangente, esponenziale e logaritmiche in quarta, per intensificare poi tali incontri sconvolgenti proseguendo verso la classe quinta, dove l'infinito sembra un "argomento di accumulazione"... ma i nostri studenti non sono ancora arrivati in quinta; tanti studenti hanno già incontrato l'hotel Hilbert per vie non strettamente scolastiche e in classe chiedono chiarimenti perché si rendono conto di non aver capito in realtà bene come funzioni... qualcosa sfugge; qualcuno ha sentito parlare dell'ipotesi del continuo perché ormai, più che una volta, i libri matematici divulgativi e gli articoli matematici su qualche quotidiano o rivista sono sempre più frequenti. Tutto questo per dire che la curiosità sull'argomento c'era già.

Ad essere sinceri, alla curiosità sull'argomento, dobbiamo aggiungere il desiderio di venire a contatto con l'ambiente universitario, di entrare all'Università, di conoscere professori universitari.

I docenti Giovanna D'Agostino e Alberto Marcone hanno trattato l'argomento in modo molto didattico e professionale partendo sempre da "semplici" esercizi-quesiti-provocazioni per aumentarne via via la difficoltà, concludendo ogni conquista con il giusto rigore e la giusta dose di teoria.

Partendo dal concetto di funzione biettiva, con molti esercizi i professori hanno gradualmente portato gli studenti all'assimilazione di concetti quali:

- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Z}$;
- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Q}$;
- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}^2 \equiv \mathbb{N}^3 \equiv \mathbb{N}^4 \equiv \dots \mathbb{N}^k$;
- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}^*$ dove $\mathbb{N}^*$ è l'insieme di tutte le successioni finite di numeri naturali;
- $\mathbb{N} \equiv \{x | x$ è un numero reale algebrico$\}$.

Gli studenti sono quindi entrati con intuito, sorpresa e meraviglia nel celebre Hotel Hilbert, l'hotel con un infinità numerabile di camere, tutte occupate e con stupore hanno dovuto ammettere, dopo semplici ma profondi e acuti ragionamenti, che:

- un segmento qualsiasi ha tanti punti quanti l'intera retta,
- una figura piana ha tanti punti quanti l'intera retta,
- il piano ha tanti punti quanti l'intera retta,
- un cubo ha tanti punti quanti l'intera retta,
- un cubo n-dimensionale ha tanti punti quanti l'intera retta, quanti un qualsiasi segmento non nullo.

La sorpresa finale è stata scoprire che

- ci sono infiniti numeri infiniti, rappresentanti insiemi di cardinalità diverse,
- con facilità si può ottenere un infinito di ordine superiore costruendo l'insieme delle parti di un insieme infinito.

Gli studenti hanno svolto numerosi esercizi proposti dai docenti, i loro ragionamenti hanno percorso tante strade interessanti e stimolanti e con aggiustamenti, raddrizzamenti e ripensamenti hanno scalato le vette che li hanno portati ad apprendere il concetto matematico di infinito.

Concludendo in modo sincero, gli studenti sono stati entusiasti dell'attività loro proposta, non tutti sono arrivati in cima alle vette e a più di qualcuno qualche dubbio è rimasto... ma va bene così.

2.5 Ringraziamenti

L'organizzazione e lo svolgimento del laboratorio sono il lavoro congiunto di Giovanna D'Agostino e Alberto Marcone: senza il contributo della prima il laboratorio stesso non si sarebbe svolto.

Riferimenti bibliografici

[42] André Deledicq e Francis Casiro. *Addomesticare l'infinito*. Edizioni Kangourou Italia, 2005.

[72] Lucio Lombardo Radice. *L'infinito*. Editori Riuniti, 1981.