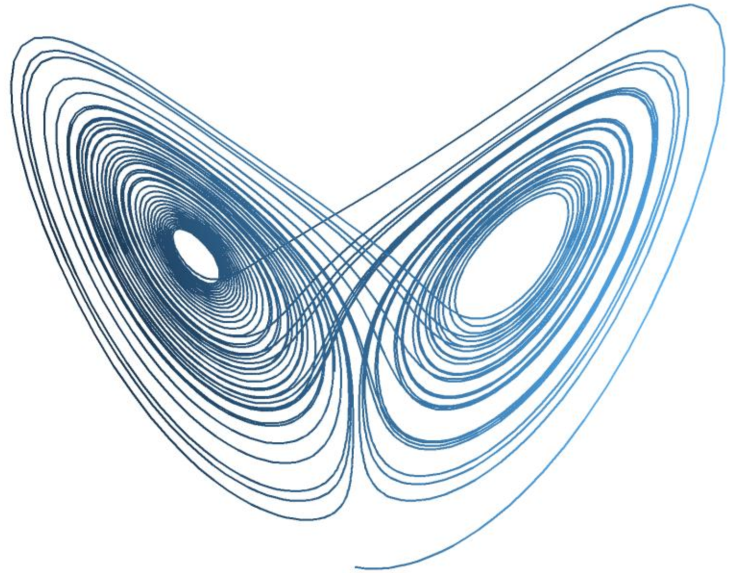
Dalla farfalla ai modelli matematici



- Dimitri Breda, Paolo Giangrandi e Chiara Milan
- ISIS A. Malignani – Udine

- 30 marzo 2023

Polo Scientifico Rizzi

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche

Via delle Scienze 206, 33100, Udine

INTERVENTO – LINEE DI RIFLESSIONE

- La proposta di percorso si contestualizza nel quadro epistemologico del costruttivismo e, in particolare, la teoria cognitiva che viene presa in esame è quella dello sviluppo della conoscenza attraverso la costruzione di modelli.
- Il percorso in particolare affronta la tematica del caos deterministico, mettendo in risalto sia la estrema sensibilità delle condizioni iniziali che caratterizza i sistemi caotici sia le connessioni della tematica del caos deterministico con il concetto di casualità.
- L'approccio pedagogico che si vorrebbe utilizzare per l'intera sequenza didattica si pone l'obiettivo di mettere a confronto semplici fenomeni meccanici deterministici che presentano da una parte una evoluzione prevedibile, mentre dall'altra rivelano, sotto alcune condizioni, una evoluzione imprevedibile.

Alcune domande di ricerca alla base della progettazione del percorso:

- Quali sono i modelli spontanei degli allievi inerenti l'interpretazione di semplici fenomeni fisici che mostrano un comportamento caotico?
- Può l'ambiente didattico predisposto favorire negli allievi la comprensione delle relazioni tra determinismo e caos in fisica/matematica?
- In che modo l'uso delle nuove tecnologie può favorire l'inserimento nel curriculum della scuola secondaria superiore di un percorso sul caos deterministico?

Scopi della progettazione

- Comprendere se la tematica della teoria del caos, cioè la limitata predicibilità dei sistemi pur governati da leggi deterministiche, possa essere compreso da studenti del triennio delle superiori

- Introdurre moduli d’insegnamento che affrontano lo sviluppo nei sistemi non lineari di una struttura complessa in maniera auto-organizzante

La didattica dei modelli matematici (1)

- Con il termine **modellazione** si intende l'insieme dei processi e dei metodi utilizzati dai matematici/fisici per costruire ed utilizzare i modelli al fine di correlare e accordare le affermazioni teoriche con la realtà dei fenomeni.
- Le attività didattiche mirate alla **modellazione** sviluppano percorsi di apprendimento che hanno le caratteristiche tipiche dell'indagine scientifica: esplorazione, sintesi, previsione.

La didattica dei modelli matematici (2)

- L'apprendimento basato sulla modellazione condivide la prospettiva delle teorie costruttiviste dell'apprendimento (von Glasersfeld, 1994; Harel e Papert, 1991): si assume che colui che apprende costruisca modelli mentali di fenomeni in risposta a particolari compiti di apprendimento, generando previsioni e spiegazioni, analogamente a quanto si osserva nella comunità scientifica in cui si sviluppano e testano ipotesi (Clement et al, 1989).
- Sia modelli scientifici che i modelli mentali svolgono la funzione di interpretare e prevedere l'evoluzione dei fenomeni, ma eventuali discrepanze tra andamenti attesi ed andamenti osservati vengono utilizzati (dalla comunità degli scienziati in un caso, dall'individuo nell'altro) per modificare le conoscenze sul mondo.

La didattica dei modelli matematici (3)

- L'avvicinamento tra conoscenze individuali e conoscenza scientifica può essere realizzato operando a livello di modelli, cioè, attraverso un progressivo avvicinamento del modello scientifico e del modello mentale (relativo all'ambito di contenuti d'interesse).
- Per far in modo che possa emergere un'immagine realistica della scienza, a tutti i livelli di formazione, è opportuno privilegiare percorsi didattici in cui il processo di costruzione di modelli sia alternato e integrato con procedure di tipo sperimentale.

Modelli matematici e modelli computazionali

- Ormai da anni si è affermato l'utilizzo di ambienti didattici basati sull'uso di strumenti informatici e computazionali. Tali strumenti sono utilizzati al fine di offrire un supporto per le attività di esplorazione, sperimentazione e modellizzazione con indubitabili vantaggi:
  - permettere la visualizzazione della struttura, dei processi d'interazione e dell'evoluzione dei modelli;
  - evidenziare modelli che rendano la fisica/matematica più accessibile;
  - alleggerire il peso delle difficoltà legate alla matematica; modelli di sistemi complessi possono essere resi maggiormente comprensibili se vengono elaborati senza fare ricorso al formalismo del calcolo;
  - focalizzare il ragionamento qualitativo con i modelli facilitando (e motivando) il passaggio ad interpretazioni quantitative.

Perché parlare di sistemi caotici (1)

- L'immagine dell'universo consegnateci dalla fisica classica, così come proposta da Galilei e Newton, descrive gli eventi della natura come analoghi a quelli di un perfetto orologio che aveva solo bisogno, pensava Newton, di essere ricaricato di tanto in tanto da Dio o che, come riteneva Leibniz, andava avanti da solo in moto perpetuo. In ogni caso una **macchina caratterizzata dalla immutabile precisione e dalla massima prevedibilità**.
- L'ideale conoscitivo che sta alla base della meccanica classica è contrassegnato da alcuni caratteri che si riassumono in alcune parole chiave utilizzate dagli storici della fisica (M. Cini, 1994; F. T. Arecchi, 1986): meccanicismo, riduzionismo e determinismo.

Perché parlare di sistemi caotici (2)

- La maggior parte dei fenomeni naturali tuttavia non mostrano comportamenti regolari e prevedibili, ma sviluppano proprietà caotiche **ed aleatorie** che ne rendono intrinsecamente imprevedibile il comportamento dopo intervalli di tempo relativamente brevi
- Ad esempio, anche se il moto dell'atmosfera segue le leggi della fisica classica al pari del moto dei pianeti, le previsioni del tempo vengono ancora espresse in termini probabilistici e la probabilità che si rivelino errate è tanto maggiore quanto più lontano è il giorno a cui esse si riferiscono). Dunque, le mutazioni meteorologiche, le devastazioni di un terremoto, la caduta di una meteorite, il flusso di un ruscello in montagna, il rotolamento di un dado sono accomunati dall'avere aspetti non prevedibili).

Perché parlare di sistemi caotici (3)

- In questi fenomeni non vi è una chiara relazione tra causa ed effetto, sembra quasi che in essi vi siano elementi casuali. Per questi sistemi non è possibile fare delle previsioni certe sul loro andamento futuro
- Da un punto di vista matematico, una caratteristica comune a molti di questi sistemi è che la loro evoluzione temporale è descritta da equazioni differenziali non lineari
- Per questi sistemi, le variabili dinamiche che descrivono le proprietà del sistema (per esempio, posizione, velocità, accelerazione, pressione, ecc …) compaiono in equazioni in forma non lineare.

Perché parlare di sistemi caotici (4)

- Tali sistemi presentano una **critica dipendenza da variazioni, anche piccole, delle condizioni iniziali**, che rende l'evoluzione temporale del sistema totalmente imprevedibile (fumo sigaretta, flusso dell'acqua nell'alveo di un fiume…).
- Cambio di rotta con Poincaré (moto di tre corpi che interagiscono tra loro attraverso la forza di gravità) Volterra (1931 - studi sulla dinamica delle popolazioni), Van der Pol (1927) e Androv (studi sui circuiti elettronici con componenti non lineari) e con i lavori degli astronomi Hénon e con il meteorologo Lorenz

Risultati attesi da parte degli studenti (1)

- Recepire la definizione di sistema dinamico.
- Seguire il percorso storico che ha portato Lorenz alla descrizione del suo modello.
- Familiarizzare con il concetto di punto di equilibrio di un sistema.
- Cogliere alcuni aspetti caratteristici della teoria della stabilità.

Risultati attesi da parte degli studenti (2)

- Cogliere le caratteristiche di un “attrattore caotico”:
  - esso è un attrattore, cioè una regione finita dello spazio delle fasi che attrae asintoticamente tutte le traiettorie contenute nel bacino di attrazione.
  - La proprietà che rende l’attrattore strano è la sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali; cioè, malgrado la contrazione del volume, le lunghezze non si contraggono in tutte le direzioni, e punti arbitrariamente vicini inizialmente, diventano macroscopicamente separati sull’attrattore dopo tempi sufficientemente lunghi.

Risultati attesi dagli studenti (3)

- Familiarizzare con la simbologia e la terminologia delle equazioni differenziali.
- Familiarizzare con la simbologia e la terminologia del calcolo matriciale.
- Avere una visione più critica sulla possibilità di predire l'evoluzione del sistema.
- Riconoscere analogie con casi di studio già affrontati.
- Acquisire una certa dimestichezza nell'uso dei software di calcolo numerico (Matlab/Octave o altri SW).

Come affrontare il percorso sull'attrattore di Lorenz nella proposta qui presentata?

- Gli allievi devono possedere
  - alcuni prerequisiti di tipo matematico e
  - altri prerequisiti di tipo informatico
- Crediamo che il passo da compiere per raggiungere questi prerequisiti sia comunque alla portata degli allievi delle superiori

Prerequisiti matematici

CAPITOLO 12

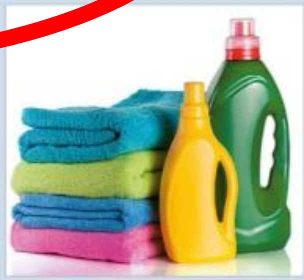
SISTEMI LINEARI

UN'EQUAZIONE NON BASTA

In un supermercato so[illegible] 100 L di ammorbiden[illegible] in flaconi da 1 L e un po' in ricariche da 2 L. Questa informazione è sufficiente per dire quanti sono i flaconi e quante le ricariche? No: l'equazione corrispondente, $x + 2y = 100$, dove x è il numero dei flaconi e y quello delle ricariche, è soddisfatta da diverse coppie: $x = 80$ e $y = 10$, $x = 70$ e $y = 15$, … Affinché il problema abbia una sola soluzione, dobbiamo aggiungere un'informazione che fornisca una seconda equazione.

▸ **Quanti sono i flaconi? E le ricariche?**

→ la risposta a pagina **665**



TEORIA

1. Sistemi di equazioni

EQUAZIONI LINEARI IN DUE INCOGNITE

→ Esercizi a pagina **680**

Un'equazione nelle incognite x e y del tipo $ax + by = c$ è un'equazione di primo grado sia rispetto a x sia rispetto a y. Diciamo anche che è un'**equazione lineare in due incognite**. Le sue **soluzioni** sono tutte le coppie ordinate di valori, il primo da attribuire a x, il secondo a y, che verificano l'equazione.

- Nell'equazione lineare $2x - 3y = 15$, la coppia $(9; 1)$ è soluzione dell'equazione perché: $2 \cdot 9 - 3 \cdot 1 \underbrace{=}_{\text{vero}} 15$.

  Invece, la coppia $(0; 5)$ **non** è soluzione perché: $2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \neq 15$.

L'equazione $ax + by = c$, con $b \neq 0$, è l'espressione analitica di una **funzione lineare** che può essere scritta nella forma $y = mx + q$ esplicitando y.
Abbiamo già visto che l'equazione $y = mx + q$ è rappresentata nel piano cartesiano da una retta, con **coefficiente angolare** m e **ordinata all'origine** q.
Le soluzioni dell'equazione sono associate ai punti di una retta, quindi sono infinite.

ESEMPIO

Data l'equazione $x + 2y = 6$, le sue soluzioni sono rappresentate graficamente dai punti della retta di equazione:

$$x + 2y = 6 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

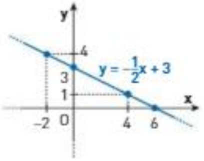
x	−2	0	4	6	…
y	4	3	1	0	…

Le coppie $(-2; 4)$, $(0; 3)$, … sono le infinite soluzioni dell'equazione.

Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali

ESPLORA CON GEOGEBRA

Equazioni lineari in due incognite
Considera l'equazione lineare in due incognite $3x - y = 2$. Determina alcune coppie tra le sue soluzioni e rappresentale nel piano cartesiano. Verifica che il grafico della funzione è una retta.



Bergamini et al. 2023

principio di riduzione, moltiplichiamo entrambi i membri della prima equazione per 2, in modo da avere nelle due equazioni coefficienti opposti per la y.

$$\cdot 2\begin{cases}3x+4y=-1\\4x-8y=7\end{cases} \rightarrow \begin{cases}6x+8y=-2\\4x-8y=\ \ 7\end{cases}$$

sommiamo le equazioni membro a membro

$$10x \quad = 5 \rightarrow x=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Sostituiamo x in una delle equazioni iniziali per trovare y:

$$4\cdot\frac{1}{2}-8y=7 \rightarrow -8y=7-2 \rightarrow -8y=5 \rightarrow y=-\frac{5}{8}.$$

La soluzione del sistema è $\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{8}\right)$.

In alcuni casi è necessario moltiplicare i coefficienti di entrambe le equazioni per due opportuni fattori. Il **video** mostra un esempio.

VIDEO

Metodo di riduzione
Come si risolve con il metodo di riduzione il seguente sistema?
$\begin{cases}4x-9y=11\\5x+6y=8\end{cases}$

Vediamo con un esempio come i sistemi lineari venivano usati dai matematici del Settecento per risolvere i problemi.

IDEE PER LE COMPETENZE

A problem from the past

Colin Maclaurin (1698-1746) fu un matematico scozzese. Nel 1748 fu pubblicato postumo *A Treatise of Algebra*, un'opera suddivisa in tre parti che si occupa anche di sistemi lineari. Nel capitolo 11 della prima parte troviamo alcuni problemi: qui proponiamo il sesto, sia in lingua originale sia tradotto, insieme alla risoluzione.

EXAMPLE VI.

A Gentleman distributing Money among some poor People, found he wanted 10s. to be able to give 5s. to each; therefore he gives each 4s. only, and finds that he has 5s. left. Qu. The Number of Shillings and poor People?
Call the Number of the Poor x, and the Number of Shillings y; then,

by Supp. $\begin{cases}5x=y+10\\4x=y-5\end{cases}$

$y=5x-10$
$y=4x+5$
$5x-10=4x+5$
$5x-4x=15$
$x=15$
$y=4x+5=65$.

Un gentiluomo che distribuisce denaro ad alcune persone povere nota che gli mancano 10 scellini per essere in grado di darne 5 a ciascuno; quindi ne dà solo 4 a testa e scopre che gliene restano 5. Trova il numero delle persone povere e quello degli scellini.

Maclaurin dice di indicare con x il numero delle persone povere e con y quello degli scellini.

Il problema si traduce nel sistema

$$\begin{cases}5x=y+10\\4x=y-5\end{cases}$$

e ha soluzione (15; 65), ovvero le persone povere sono 15 e gli scellini 65.

- Quale metodo ha utilizzato? Avresti fatto la stessa scelta?
- Risolvi il sistema con un altro metodo. Discuti poi con un tuo compagno di classe i vantaggi e gli svantaggi dei metodi che conosci.

5. Metodo di Cramer

→ Esercizi a pagina **694**

Esaminiamo ora un ultimo metodo che dà un'espressione esplicita dell'eventuale soluzione di un sistema ed è quindi molto utile nella risoluzione dei sistemi letterali.

Mediante il principio di riduzione possiamo dimostrare il seguente teorema.

Bergamini et al. 2023

- Nella matrice $\begin{bmatrix}5 & 1\\-3 & 4\end{bmatrix}$, 5 e 4 sono gli elementi della diagonale principale, -3 e 1 sono quelli della diagonale secondaria.

Il **determinante** di una matrice con due righe e due colonne è il numero che si ottiene come differenza fra il prodotto degli elementi della diagonale principale e il prodotto di quelli della diagonale secondaria.

Lo indichiamo con $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$.

DEFINIZIONE

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

ESEMPIO

$$\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 7\end{vmatrix}=2\cdot7-3\cdot5=14-15=-1$$

MATHS IN ENGLISH

The **determinant** of a 2 × 2 matrix is the difference of the product of the numbers on the first diagonal (top left to bottom right) minus the product of the numbers on the second diagonal.

In un sistema $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ chiamiamo **determinante del sistema** il numero

$$D=\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b.$$

Consideriamo inoltre i determinanti D_x e D_y, ottenuti rispettivamente sostituendo la colonna dei termini noti alla colonna dei coefficienti di x e a quella dei coefficienti di y:

$$D_x=\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}=cb'-c'b; \qquad D_y=\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}=ac'-a'c.$$

Utilizzando questi determinanti, riscriviamo il teorema precedente.

ATTIVITÀ INTERATTIVA

Determinante di una matrice di ordine 2
Da usare in classe per mostrare un esempio in cui alcuni elementi della matrice sono espressioni letterali.

TEOREMA

Regola di Cramer

Dato il sistema $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ con a, b, a', b' non tutti nulli e considerati i determinanti D, D_x e D_y:

- se $D\neq0$, il sistema è **determinato** e la soluzione è la coppia $(x; y)$, con $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$;
- se $D=0$ e $D_x\neq0$ oppure $D=0$ e $D_y\neq0$, il sistema è **impossibile**;
- se $D=0$ e $D_x=0$ e $D_y=0$, il sistema è **indeterminato**.

ESEMPIO

- **Risolviamo i sistemi con il metodo di Cramer:**

a. $\begin{cases}5x+3y=1\\2x+y=4\end{cases}$; **b.** $\begin{cases}7x-y=5\\21x-3y=15\end{cases}$; **c.** $\begin{cases}3x+6y=10\\x+2y=3\end{cases}$.

a. $\begin{cases}5x+3y=1\\2x+y=4\end{cases} \rightarrow D=\begin{vmatrix}5 & 3\\2 & 1\end{vmatrix}=5\cdot1-2\cdot3=-1\neq0 \rightarrow$

il sistema è determinato.

VIDEO

Metodo di Cramer
Come si risolvono i seguenti sistemi con il metodo di Cramer?

a. $\begin{cases}x+4y=-1\\-2x+3y=-9\end{cases}$

b. $\begin{cases}2x-y=3\\-6x+3y=1\end{cases}$

c. $\begin{cases}-4x+8y=3\\3x-6y=-\frac{9}{4}\end{cases}$

TEORIA

6. Matrici e determinanti

MATRICI

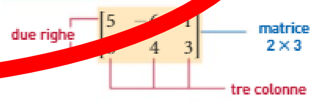
→ Esercizi a pagina 708

Esaminiamo in generale il concetto di matrice.

DEFINIZIONE

Una **matrice** $m \times n$ è un insieme di numeri disposti in m righe e n colonne.

ESEMPIO



Indichiamo una matrice con una lettera maiuscola e racchiudiamo gli **elementi** che la costituiscono fra parentesi quadre.
Una matrice è dunque un quadro di elementi ordinati.
Un generico elemento di una matrice può essere indicato con una lettera minuscola con due indici, per esempio a_{ij}, in cui il primo indice indica la riga e il secondo la colonna a cui appartiene l'elemento.

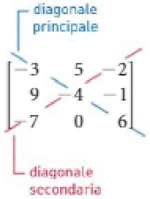
- Nella matrice A a fianco, abbiamo:

$a_{23} = 4$; $a_{12} = 7$; $a_{33} = 6$; $a_{21} = 3$; $a_{13} = 8$; ...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Due matrici sono dello **stesso tipo** se hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne.

Una matrice $m \times n$ è **rettangolare** se $m \neq n$, è **quadrata** se $m = n$, cioè se ha tante righe quante sono le colonne. Una matrice quadrata $n \times n$ è anche detta **matrice di ordine** n.
In una matrice quadrata A di ordine n, la diagonale che va dall'elemento a_{11} all'elemento a_{nn} è la **diagonale principale**, quella che va da a_{n1} ad a_{1n} è la **diagonale secondaria**.



DETERMINANTI

→ Esercizi a pagina 708

Il determinante è un *numero* che si può associare soltanto a una matrice quadrata.
Si può definire il determinante di una matrice quadrata di ordine n qualsiasi, ma in questo libro ci limitiamo ai determinanti di matrici di ordine 2 e 3.
Abbiamo già considerato il modo di associare a una matrice il suo determinante nel caso di **matrici quadrate di ordine 2**.

- $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - 2 \cdot 1 = 34$ $\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Esaminiamo ora i determinanti di matrici di ordine 3.

DEFINIZIONE

Determinante di matrice quadrata di ordine 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Determinante nullo
Se una matrice quadrata di ordine 3 ha:
- una riga o una colonna di elementi tutti uguali a zero,

oppure
- due righe o due colonne uguali,

allora il determinante è nullo.

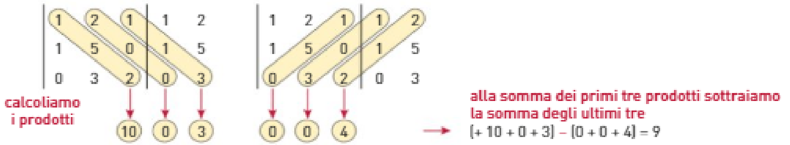
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 9$

Spesso, per il calcolo di questi determinanti si utilizza la **regola di Sarrus** che mostriamo nel seguente esempio.

ESEMPIO

▶ **Calcoliamo il determinante dell'esempio precedente,** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$**, con la regola di Sarrus.**

Ricopiamo a destra le prime due colonne e applichiamo la definizione calcolando i prodotti sulle diagonali, come nella figura seguente.



Il determinante è 9.

7. Sistemi di tre equazioni in tre incognite

→ Esercizi a pagina 710

Molte delle considerazioni svolte per i sistemi di due equazioni in due incognite possono essere estese ai **sistemi di tre equazioni in tre incognite**.
Le **soluzioni** di un sistema di questo tipo possono essere scritte come **terne ordinate** dei numeri che sono soluzioni di tutte le equazioni del sistema.

ATTIVITÀ INTERATTIVA

Sistemi di tre equazioni in tre incognite
Nel **Prova tu**, esercizi sia sul metodo di sostituzione sia sul metodo di Cramer. Per esempio, si chiede di risolvere per sostituzione il seguente sistema.

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Risoluzione per sostituzione, confronto, riduzione

Per la risoluzione, possiamo applicare i metodi di *sostituzione*, *confronto* o *riduzione*, utilizzandoli come nei sistemi di due equazioni in due incognite.

Esaminiamo un esempio.

ESEMPIO

▶ **Risolviamo il seguente sistema.**

$$\begin{cases} 5x + 4y - z = 2 \\ -3x + 3y + 2z = 7 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

Ricaviamo x nella terza equazione:

$x + y - z = -1 \rightarrow x = -y + z - 1.$

Sostituiamo nella prima e nella seconda equazione.

$$\begin{matrix} 5(-y+z-1) + 4y - z = 2 \\ -3(-y+z-1) + 3y + 2z = 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -5y + 5z - 5 + 4y - z = 2 \\ 3y - 3z + 3 + 3y + 2z = 7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} -y + 4z = 7 \\ 6y - z = 4 \end{matrix}$$

Bergamini et al. 2023

Dai sistemi lineari alle matrici


CAPITOLO 17

VETTORI, MATRICI, DETERMINANTI

Navigare su piani inclinati

A Elblag, in Polonia, si organizzano strane crociere. Tutto è nato intorno al 1860, quando, per superare il dislivello di 100 metri fra ...o Druzno e il lago Jeziorak, si decise di adottare un sistema che a ca... ...tificiali e chiuse abbinava cinque piani inclinati sui quali far scorrere, a terra, ... vagoni speciali. Da tempo i piani inclinati di Elblag non vengono più usati per il trasporto delle merci, ma continuano a essere una risorsa come attrazione turistica, in quanto in questa particolare navigazione, oltre ai meccanismi che permettono gli spostamenti delle barche, si può ammirare un paesaggio incontaminato, con cicogne, cormorani e falchi pescatori.

Come possiamo spiegare mediante i vettori i vantaggi dei piani inclinati?

→ La risposta a pag. 1045

T TEORIA

1 Vettori nel piano

Grandezze scalari e grandezze vettoriali

Per descrivere le **grandezze scalari** è sufficiente un *numero* che esprima la loro misura rispetto a un'unità prefissata. Per esempio, sono grandezze scalari la lunghezza, l'area, il volume e il tempo.

Invece, le **grandezze vettoriali** sono rappresentate da un *numero*, una *direzione* e un *verso*, elementi caratteristici dei **vettori**.

Per esempio, sono grandezze vettoriali lo spostamento e la velocità.

Vettori

Come abbiamo visto nel capitolo 16, un vettore $\vec{v}$ è caratterizzato da:

- **modulo** v, che è la misura della lunghezza del segmento orientato che lo rappresenta rispetto a un'unità prefissata (spesso in fisica si indica il modulo anche con $|\vec{v}|$);
- **direzione** della retta a cui appartiene il segmento;
- **verso**, uno dei due con cui è orientabile la retta.

Chiamiamo **versore** del vettore $\vec{v}$ un vettore di modulo unitario con la stessa direzione e verso di $\vec{v}$.

u

$\vec{v}$

v = 3

versore di $\vec{v}$

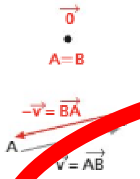
Listen to it

Scalar quantities have only magnitude (size), so they are fully described by a numerical value.
Vector quantities have both magnitude and direction.

Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali del capitolo

Bergamini et al. 2020

TEORIA



Ricordiamo che:

- un **vettore nullo** è un vettore con estremi coincidenti, quindi è rappresentato da un [illegible] con 0;
- dato un vettore $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, il suo **vettore opposto** $-\vec{v}$ è il [illegible] avente lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{v}$, ma verso opposto rispetto a $\vec{v}$.

Indichiamo con V l'insieme dei vettori del piano.

Operazioni con i vettori

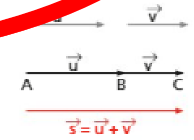
→ Esercizi a p. 1[illegible]3

Addizione

Dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, per ottenere il loro **vettore somma** $\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}$, rap[illegible]esentiamo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ con i segmenti consecutivi $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$.

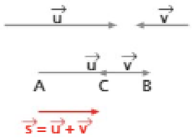
- Se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno **la stessa direzione e lo [illegible] verso**, il vettore somma $\vec{s}$ ha stess[illegible]zione e stesso verso di [illegible] e modulo uguale alla somma dei moduli:

  $s=u+v.$



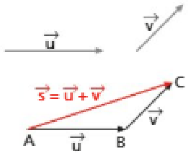
- Se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno **la stessa direzione ma verso opposto**, il vettore somma $\vec{s}$ ha stessa direzione di $\vec{u}$ e $\vec{v}$, verso uguale a quello del vettore con modulo maggiore e modulo uguale alla differenza tra il modulo maggiore e il modulo minore:

  $s=u-v \quad \text{se} \quad u>v.$

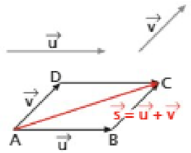


- Se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno **direzioni diverse**, il vettore somma $\vec{s}$ è rappresentato dal segmento $\overrightarrow{AC}$ che ha lunghezza e direzione del terzo lato del triangolo individuato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, quindi:

  $s<u+v.$



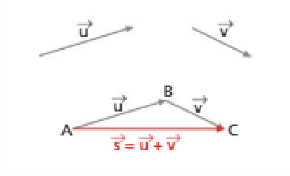
È equivalente considerare il vettore somma $\vec{s}$ come la diagonale $\overrightarrow{AC}$ del parallelogramma determinato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$, considerati entrambi con primo estremo in A (**regola del parallelogramma**).



Riassumendo, possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Il **vettore somma** $\vec{s}$ di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è il vettore che si ottiene rappresentando consecutivamente i vettori dati e che ha come primo estremo il primo estremo di $\vec{u}$ e come secondo estremo il secondo estremo di $\vec{v}$.



> Disegna due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, entrambi di modulo 1, tali che la loro somma abbia a sua volta modulo 1.

Il vettore somma $\vec{s}$ si chiama anche **risultante**.

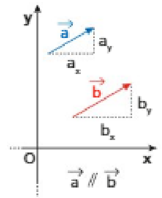
Bergamini et al. 2020

TEORIA

Vettori paralleli e vettori perpendicolari

Consideriamo i vettori $\vec{a}(a_x; a_y)$ e $\vec{b}(b_x; b_y)$.

Poiché due vettori sono **paralleli** se giacciono su rette parallele, e il coefficiente angolare della retta su cui giace un vettore è dato dal rapporto tra la componente y e la componente x del vettore, allora la **condizione di parallelismo** per $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è:



$$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \leftrightarrow \frac{a_y}{a_x}=\frac{b_y}{b_x} \leftrightarrow \boxed{\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}},$$

ovvero due vettori sono paralleli se e solo se sono uguali i rapporti tra le loro componenti cartesiane.

Se poniamo uguale a k ognuno dei due rapporti, otteniamo:

$$a_x=kb_x \text{ e } a_y=kb_y;$$

$$\vec{a}(kb_x; kb_y) \rightarrow \boxed{\vec{a}=k\vec{b}}.$$

ESEMPIO

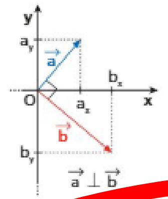
$\vec{a}(-3;4)$ e $\vec{b}\left(1;-\frac{4}{3}\right)$ sono paralleli, perché:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{-3}{1}=-3; \qquad \frac{a_y}{b_y}=\frac{4}{-\frac{4}{3}}=-3.$$

$a_x=-3b_x$ e $a_y=-3b_y$, quindi: $\vec{a}=-3\vec{b}$.

> $\vec{a}(6;-3)$ e $\vec{b}(-2;1)$ sono vettori paralleli?

Come abbiamo visto, due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono **perpendicolari** se e solo se il loro prodotto scalare è nullo, quindi:



$$\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \leftrightarrow \boxed{a_xb_x+a_yb_y=0}.$$

ESEMPIO

$\vec{a}(2;-6)$ e $\vec{b}(3;1)$ sono perpendicolari, perché:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3+(-6)\cdot1=0.$$

> Scrivi le componenti di un vettore perpendicolare a $\vec{v}(-2;4)$.

3 Matrici

→ Esercizi a p. 1072

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Per rappresentare un qualunque insieme di numeri, ordinato co[illegible]e in una tabella, si utilizza un quadro composto da righe e da colonne, delimi[illegible]o a destra e a sinistra da due parentesi quadre.

Lis[illegible]

An $m\times n$ **matrix** is a rectangular array of numbers with m rows and n columns. Each number is called an **entry** of the matrix.

DEFINIZIONE

[illegible] **matrice** $m\times n$ la tabella che li ordina in m righe e n colonne.

Gli $m\times n$ numeri presenti nella matrice sono gli **elementi** della matrice.

Se il numero delle righe è diverso da quello delle colonne, la matrice è **rettangolare**, altrimenti è **quadrata**.

diagonale principale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonale secondaria

DEFINIZIONE
L'**ordine di una matrice quadrata** è il numero delle sue righe (o delle sue colonne).

La **diagonale principale** è formata da tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale di estremi a_{11} e a_{nn}, nella figura è evidenziata in rosso. Di conseguenza, tali elementi hanno i due indici uguali fra loro (a_{11}, a_{22}, a_{33}, ...).
La **diagonale secondaria** è formata da tutti gli elementi che si trovano sulla diagonale di estremi a_{n1} e a_{1n}, nella figura è evidenziata in giallo.

ESEMPIO
Nella matrice a fianco, di ordine 3:
gli elementi della diagonale principale sono 5, 0, 3;
gli elementi della diagonale secondaria sono 2, 0, 8.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

▸ Scrivi gli elementi della diagonale principale e quelli della diagonale secondaria di $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

DEFINIZIONE
Una **matrice** quadrata è una **matrice diagonale** quando tutti i suoi elementi sono nulli tranne quelli della diagonale principale.

ESEMPIO
$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ è una matrice diagonale di ordine 3.

DEFINIZIONE
Una **matrice** diagonale è una **matrice identica** (o matrice unità) quando gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 1.

La matrice identica di ordine n si indica con I_n.

ESEMPIO
$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ è una matrice identica di ordine 3.

MATEMATICA E INTERNET
▸ **Il ranking di Google**
Ideato nel 1998 da Sergey Brin e Larry Page, Google è il motore di ricerca più utilizzato al mondo. Soddisfa milioni di richieste al giorno e cerca informazioni in un database di oltre otto miliardi di pagine web.

• Quale criterio utilizza Google per ordinare le pagine?

Risposta

4 Operazioni con le matrici

Addizione e sottrazione di due matrici

→ Esercizi a p. 1073

DEFINIZIONE
La **somma di due matrici dello stesso tipo** è una matrice i cui elementi sono la somma degli elementi corrispondenti delle due matrici.

ESEMPIO
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 4+3 \\ -2+4 & 3+2 \\ 6-5 & -5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

▸ Calcola: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Non è possibile, invece, sommare due matrici che non siano dello stesso tipo. Per esempio **non** si può eseguire la seguente addizione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Poiché il risultato di un'addizione fra matrici dello stesso tipo è ancora una matrice dello stesso tipo, l'addizione è un'**operazione interna** nell'insieme delle matrici dello stesso tipo.
L'addizione fra matrici gode delle *proprietà commutativa* e *associativa* e ammette come *elemento neutro* la matrice nulla dello stesso tipo.

Animazione nell'eBook
Nell'animazione ci sono le risoluzioni dei tre esercizi relativi alla somma e alla differenza di due matrici e al prodotto di una matrice per un numero.

DEFINIZIONE
La **differenza di due matrici dello stesso tipo** è la somma della prima matrice con l'opposta della seconda.

ESEMPIO
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 1 \\ 11 & -6 \end{bmatrix}$$

▸ Calcola: $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Prodotto di una matrice per un numero reale

→ Esercizi a p. 1073

DEFINIZIONE
Il **prodotto di una matrice per un numero reale** k è una matrice i cui elementi sono quelli corrispondenti della matrice iniziale moltiplicati per k.

ESEMPIO
$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -15 & 12 & -9 \end{bmatrix}$$

▸ Calcola: $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Prodotto di matrici

→ Esercizi a p. 1074

DEFINIZIONE
Il **prodotto scalare di una matrice riga** $1 \times n$ **per una matrice colonna** $n \times 1$ è il numero ottenuto sommando fra loro i prodotti degli elementi corrispondenti.

$$[a \quad b \quad c] \cdot \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

ESEMPIO
Calcoliamo il prodotto scalare:

$$[2 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) = 4.$$

▸ Calcola il prodotto scalare: $[3 \quad 2 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Animazione nell'eBook

Se la matrice riga e la matrice colonna hanno un numero diverso di elementi, **non** è possibile calcolare il prodotto scalare.

Bergamini et al. 2020

ESEMPIO

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ sono divisori dello zero.

Infatti $A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Non vale la legge di cancellazione, ossia può essere $A \cdot B = A \cdot C$, ma allo stesso tempo $B \neq C$.

ESEMPIO

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$. $A \cdot B = A \cdot C = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$, ma $B \neq C$.

Vettori e matrici

Se esprimiamo i vettori mediante le loro componenti cartesiane, possiamo associarli a matrici riga o a matrici colonna. Le operazioni fra i vettori trovano corrispondenza con quelle fra le matrici associate.

ESEMPIO

$\vec{a}(7; 2)$ e $\vec{b}(-1; 1)$ sono associati alle matrici riga $[7 \quad 2]$ e $[-1 \quad 1]$.

Abbiamo le seguenti corrispondenze fra operazioni.

Operazioni fra i vettori	Operazioni fra le matrici corrispondenti
$\vec{a} + \vec{b} = (7-1; 2+1) = (6; 3)$	$[7 \quad 2] + [-1 \quad 1] = [7-1 \quad 2+1] = [6 \quad 3]$
$\vec{a} - \vec{b} = (7+1; 2-1) = (8; 1)$	$[7 \quad 2] - [-1 \quad 1] = [7+1 \quad 2-1] = [8 \quad 1]$
$3 \cdot \vec{a} = (3 \cdot 7; 3 \cdot 2) = (21; 6)$	$3 \cdot [7 \quad 2] = [3 \cdot 7 \quad 3 \cdot 2] = [21 \quad 6]$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -5$	Considerata la trasposta di $[-1 \quad 1]$: $[7 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 7 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -5$.

Per sottolineare la corrispondenza che abbiamo esaminato, le matrici riga e le matrici colonna sono anche dette rispettivamente **vettori riga** e **vettori colonna**.

5 Determinanti

→ Esercizi a p. 1078

A ogni matrice quadrata viene associato un numero reale, detto **determinante** della matrice. Per indicare il determinante scriviamo «det» davanti alla matrice, oppure gli elementi della matrice fra due linee verticali.

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Prendiamo in esame i determinanti delle matrici del primo, secondo e terzo ordine.

DEFINIZIONE

Il **determinante di una matrice del primo ordine** è uguale al numero stesso che compare nella matrice.

$$\det[a] = a$$

ESEMPIO

$\det[-14] = -14$.

DEFINIZIONE

Il **determinante di una matrice del secondo ordine** è uguale alla differenza fra il prodotto dei due elementi della diagonale principale e il prodotto dei due elementi della diagonale secondaria.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Listen to it

The **determinant** of a 2×2 matrix is the difference between the products of the two diagonals of the matrix.

ESEMPIO

$\det \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -5 \cdot 7 - 3 \cdot (-1) = -32$

▸ Calcola $\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

Determinante di una matrice di ordine 3

Per calcolare il determinante di una matrice di ordine 3 illustriamo un procedimento che riconduce il calcolo ai determinanti di ordine 2.
Si può utilizzare lo stesso procedimento anche per il calcolo dei determinanti di matrici di ordine maggiore di 3.

Consideriamo una matrice A di ordine 3 e analizziamo gli elementi della prima riga. I termini a_{11} e a_{13} sono detti di **classe pari** perché la somma dei loro indici è un numero pari, mentre a_{12} è detto di **classe dispari** perché la somma dei suoi indici è un numero dispari.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

DEFINIZIONE

Data una matrice A, un elemento a_{ij} è di **classe pari** (**dispari**) se $i + j$ è un numero pari (dispari).

Complemento algebrico

Nella matrice A scegliamo un elemento di classe pari, per esempio a_{11}, e sopprimiamo la riga e la colonna cui appartiene l'elemento scelto.
Otteniamo in questo modo una nuova matrice di ordine 2, di cui calcoliamo il determinante, che facciamo precedere dal segno +:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \quad A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

A_{11} è detto complemento algebrico di a_{11}.

Ripetiamo il procedimento per un elemento di classe dispari, per esempio a_{12}. In corrispondenza dell'elemento, sopprimiamo la prima riga e la seconda colonna.

Bergamini et al. 2020

Le matrici nelle trasformazioni geometriche

10 Trasformazioni geometriche e matrici

→ Esercizi a p. 1166

Le affinità possono essere studiate mediante le matrici.
Sappiamo che le affinità hanno equazioni:

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}, \quad \text{con } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Queste equazioni possono anche essere scritte usando le matrici:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$X' = A \cdot X + B, \quad \text{con } \det A \neq 0.$$

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ è detta **matrice associata** all'affinità.

ESEMPIO

Le equazioni: $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = x + y + 3 \end{cases}$

si possono scrivere così: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Poiché $\det A \neq 0$, allora esiste sempre la matrice inversa A^{-1}.

Moltiplicando a sinistra per A^{-1} entrambi i membri dell'equazione, otteniamo:

$$A^{-1}X' = A^{-1}(AX + B).$$

Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione di matrici rispetto all'addizione:

$$A^{-1}X' = A^{-1}AX + A^{-1}B.$$

Essendo $A^{-1} \cdot A = I$ (la matrice identità) e $IX = X$ scriviamo:

$$A^{-1}X' = X + A^{-1}B \quad \rightarrow \quad \mathbf{X = A^{-1}X' - A^{-1}B}.$$

Abbiamo così determinato l'equazione della trasformazione inversa.

ESEMPIO

Data l'affinità di equazioni $\begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = -x + y \end{cases}$, troviamo la trasformazione inversa in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Essendo $\det A = 2 \neq 0$, esiste la matrice inversa di $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

› Scrivi in forma matriciale le equazioni:
a. di una traslazione di vettore $\vec{v}(a; b)$;
b. di una rotazione di centro O, origine degli assi;
c. di una simmetria centrale con centro $M(a; b)$.

TEORIA

MATEMATICA E ARTE

› **Tassellazioni del piano** La foto mostra un dettaglio di una decorazione dell'Alhambra (complesso di palazzi di Granada). Il disegno è ottenuto applicando a un elemento (quello evidenziato) una serie di isometrie. Questo procedimento si chiama *tassellazione del piano*.

- Quanti tipi diversi di tassellazioni è possibile creare?

Risposta

Bergamini et al. 2020

Dalle affinità agli autovalori

4. Le direzioni invarianti di una affinità

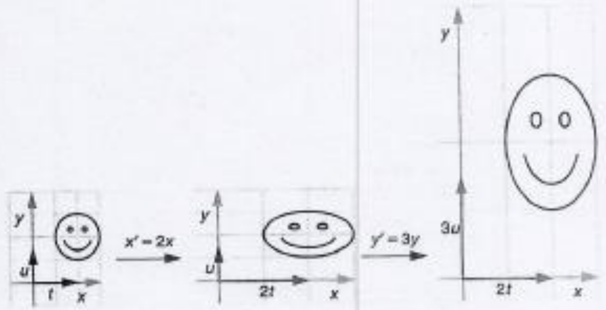
autovalori e autovettori

Consideriamo una trasformazione affine che lasci fissa l'origine e la cui matrice sia "diagonalizzata", abbia cioè uguali a 0 tutti gli elementi che non appartengono alla diagonale principale:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La trasformazione risulta come composta da due "stiramenti" del piano lungo i due assi cartesiani: si raddoppiano le ascisse ("stiramento orizzontale") e quindi si triplicano le ordinate ("stiramento verticale").

Una matrice quadrata si dice *diagonalizzata* se gli elementi che non appartengono alla diagonale principale sono tutti nulli.



In tale trasformazione l'unico punto fisso è l'origine, ma gli assi x e y rimangono uniti, nel senso che corrispondono a se stessi. Così, ai vettori che hanno le direzioni dei due assi corrispondono vettori proporzionali.
Ad esempio, al vettore $(t; 0)$ (parallelo all'asse x) corrisponde il vettore $(2t; 0)$ (ancora parallelo all'asse x); al vettore $(0; u)$ (parallelo all'asse y) corrisponde il vettore $(0; 3u)$ ancora parallelo all'asse y. Le due direzioni degli assi (l'una di coefficiente angolare $m = 0$, l'altra di coefficiente angolare indeterminato, che possiamo indicare con $m = \infty$) sono degli invarianti per tale affinità.

In questo paragrafo analizzeremo se esistono e come si trovano, in una qualunque trasformazione affine, le direzioni che rimangono invariate.
Consideriamo a questo scopo, come ulteriore esempio, la trasformazione affine definita dalla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

I corrispondenti dei vettori unitari sono $\mathbf{i}'(2; 0)$ e $\mathbf{j}'(1; 3)$. Se vi sono delle direzioni che rimangono invariate nella trasformazione, ciò significa che qualche vettore rimane parallelo a se stesso. Indicando con $\mathbf{v}(x; y)$ tale vettore e con $\mathbf{v}'(x'; y')$ il suo corrispondente, deve cioè essere

$$\mathbf{v}' = k \cdot \mathbf{v} \qquad (\text{per qualche } k \in \mathbf{R}_0)$$

Ogni direzione è identificata da un numero reale (il suo coefficiente angolare m), eccettuata la direzione dell'asse y, per la quale il rapporto tra componente verticale e componente orizzontale è indefinito.
Tuttavia, se si aumenta l'inclinazione di una retta in modo che essa si avvicini sempre più all'asse y, il numero m diventa sempre più grande (in valore assoluto): è comodo allora scrivere che la direzione dell'asse y ha coefficiente angolare infinito: $m = \infty$.
Con questa scrittura si vuole intendere che il limite di m, avvicinandosi la retta all'asse y, è infinito.

Maraschini e Palma 2000

in cui:

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad k \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

Deve quindi essere:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

Cioè, sotto forma di sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y = kx \\ 3y = ky \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (2-k)x + y = 0 \\ (3-k)y = 0 \end{cases}$$

e, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 2-k & 1 \\ 0 & 3-k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questa equazione matriciale può essere interpretata come una trasformazione lineare che fa corrispondere al vettore $(x; y)$ il vettore nullo $(0; 0)$. Sappiamo che tale trasformazione è invertibile, e quindi biunivoca, se e solo se il determinante della matrice è diverso da 0. Perciò se oltre al vettore nullo vi sono altri vettori che verificano tale relazione, il determinante della matrice deve essere uguale a 0. Impostiamo allora l'equazione:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 0 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-k)(3-k) = 0$$

L'equazione, di secondo grado, ha due soluzioni reali: $k_1 = 2$; $k_2 = 3$. Questi due valori rappresentano due coefficienti di proporzionalità, e cioè i due "rapporti di stiramento" lungo due direzioni privilegiate. Occorre ora trovare tali direzioni invarianti. Per far ciò, riscriviamo e risolviamo il sistema precedente, sostituendo a k prima k_1 e poi k_2:

con $k = k_1 = 2$:

$$\begin{cases} 2x = 2x + y \\ 2y = 3y \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ per qualunque valore di } x \text{ (direzione } m_1 = 0)$$

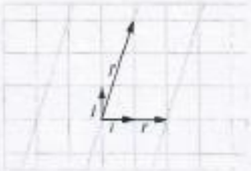
con $k = k_2 = 3$:

$$\begin{cases} 3x = 2x + y \\ 3y = 3y \end{cases} \Rightarrow y = x \text{ per qualunque valore di } x \text{ (direzione } m_2 = 1)$$

In conclusione, nella trasformazione vi sono due distinte direzioni che rimangono invariate:

$m_1 = 0$, lungo la quale avviene uno "stiramento" di rapporto $k_1 = 2$
$m_2 = 1$, lungo la quale avviene uno "stiramento" di rapporto $k_2 = 3$

Nella figura sono evidenziate in colore le direzioni invarianti, lungo le quali avvengono i due "stiramenti": al punto $A(1; 0)$ corrisponde il punto $A'(2; 0)$; al punto $B(1; 1)$ corrisponde il punto $B'(3; 3)$.

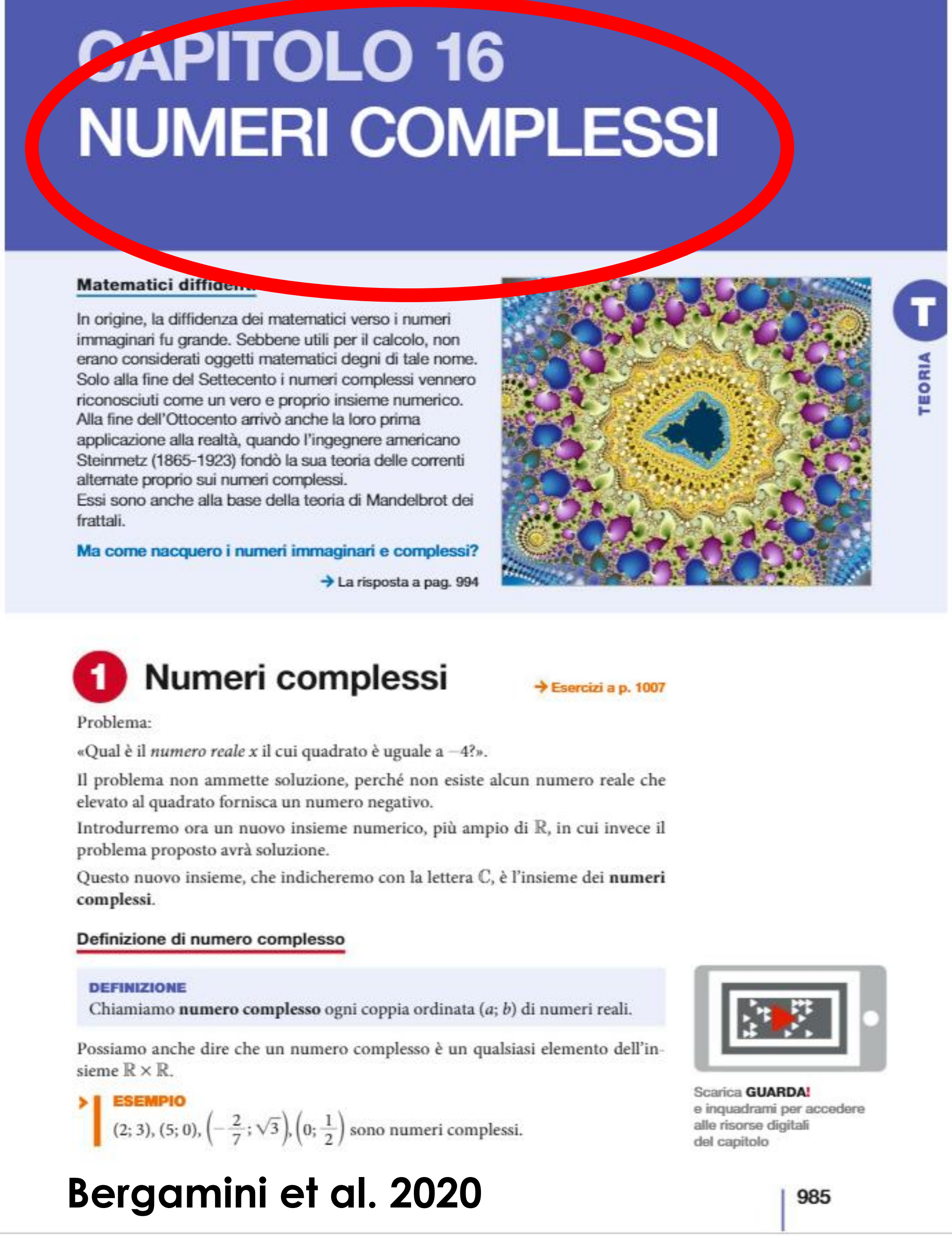


Se K è la matrice di una trasformazione lineare che lascia fissa l'origine, ad un vettore non nullo $(x; y)$ può corrispondere il vettore nullo $(0; 0)$ solo se la trasformazione non è biunivoca; questo può accadere solo se $\det(K) = 0$.

I due sistemi a fianco sono in-determinati: ognuno di essi ha infinite soluzioni che, rappresentate sul piano cartesiano, sono tutti e soli i punti di una retta.
Il primo dei due sistemi ha come soluzioni tutte le coppie del tipo $(x; 0)$ e, quindi, i punti della retta $y = 0$.
Il secondo dei sistemi ha come soluzioni tutte le coppie del tipo $(x; x)$ e, quindi, tutti i punti della retta $y = x$.

Maraschini e Palma 2000

Numeri complessi



CAPITOLO 16
NUMERI COMPLESSI

Matematici diffidenti

In origine, la diffidenza dei matematici verso i numeri immaginari fu grande. Sebbene utili per il calcolo, non erano considerati oggetti matematici degni di tale nome. Solo alla fine del Settecento i numeri complessi vennero riconosciuti come un vero e proprio insieme numerico. Alla fine dell'Ottocento arrivò anche la loro prima applicazione alla realtà, quando l'ingegnere americano Steinmetz (1865-1923) fondò la sua teoria delle correnti alternate proprio sui numeri complessi.
Essi sono anche alla base della teoria di Mandelbrot dei frattali.

Ma come nacquero i numeri immaginari e complessi?

→ La risposta a pag. 994

T TEORIA

1 Numeri complessi

→ Esercizi a p. 1007

Problema:
«Qual è il *numero reale x* il cui quadrato è uguale a -4?».

Il problema non ammette soluzione, perché non esiste alcun numero reale che elevato al quadrato fornisca un numero negativo.

Introdurremo ora un nuovo insieme numerico, più ampio di $\mathbb{R}$, in cui invece il problema proposto avrà soluzione.

Questo nuovo insieme, che indicheremo con la lettera $\mathbb{C}$, è l'insieme dei **numeri complessi**.

Definizione di numero complesso

DEFINIZIONE
Chiamiamo **numero complesso** ogni coppia ordinata $(a; b)$ di numeri reali.

Possiamo anche dire che un numero complesso è un qualsiasi elemento dell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

ESEMPIO
$(2; 3)$, $(5; 0)$, $\left(-\frac{2}{7}; \sqrt{3}\right)$, $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ sono numeri complessi.

Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali del capitolo

Bergamini et al. 2020

TEORIA

Numeri immaginari

DEFINIZIONE
Chiamiamo **numero immaginario** ogni numero complesso del tipo $(0; b)$.

L'insieme di questi numeri si chiama **insieme dei numeri immaginari** e si indica con $\mathbb{I}$.

Il numero $(0; 1)$ si chiama **unità immaginaria**, che indichiamo con il simbolo i.

- Il quadrato dell'unità immaginaria vale -1:

  $$(0; 1)^2 = -1.$$

  Infatti:

  $$(0; 1)^2 = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0).$$

  Possiamo anche scrivere $i^2 = -1$.
- Moltiplicando un numero del tipo $(b; 0)$ per l'unità immaginaria si ottiene il numero $(0; b)$:

  $$(b; 0) \cdot (0; 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1; b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0; b).$$

  Per esempio: $(3; 0) \cdot (0; 1) = (0; 3)$.

2 Forma algebrica dei numeri complessi

Ogni numero complesso $(a; b)$ può essere scritto come somma dei due numeri complessi $(a; 0)$ e $(0; b)$:

$$(a; b) = (a; 0) + (0; b).$$

Poiché un numero del tipo $(a; 0)$ è reale e un numero del tipo $(0; b)$ è immaginario, ogni numero complesso si può vedere come somma di un numero reale e di un numero immaginario.

Abbiamo visto inoltre che ogni numero immaginario $(0; b)$ può essere scritto come prodotto del numero reale $(b; 0)$ per l'unità immaginaria, cioè:

$$(0; b) = (b; 0) \cdot (0; 1).$$

Un generico numero complesso $(a; b)$ può allora essere scritto in questo modo:

$$(a; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1).$$

Indichiamo il reale $(a; 0)$ con a, il reale $(b; 0)$ con b, e poiché $(0; 1) = i$, sostituendo nella relazione precedente, scriviamo in altro modo il numero $(a; b)$:

$$(a; b) = a + bi.$$

La forma $a + bi$ è detta **forma algebrica** del numero complesso $(a; b)$.

▸ Scrivi in forma algebrica i numeri complessi $(2; 2)$, $(0; -3)$, $(4; -5)$.

ESEMPIO
La forma algebrica del numero complesso $(2; 3)$ è $2 + 3i$.

TEORIA

Dato il numero complesso $z = a + bi$, a è la **parte reale** di z, e la indichiamo con $Re(z)$, mentre b è la **parte immaginaria**, e la indichiamo con $Im(z)$.

ESEMPIO
Nel numero complesso $z = 1 + 5i$, 1 è la parte reale, 5 è la parte immaginaria:

$$Re(z) = 1, \quad Im(z) = 5.$$

Casi particolari

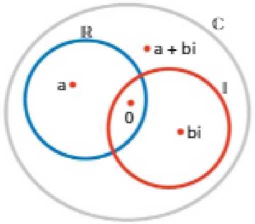
- Se $b = 0$, il numero complesso $a + bi$ coincide con il numero reale a, quindi ogni numero reale a può essere visto come il numero complesso $a + 0i$.
- Se $a = 0$, il numero complesso $a + bi$ coincide con il numero immaginario bi, quindi ogni numero immaginario bi può essere visto come il numero complesso $0 + bi$.

ESEMPIO
Il numero reale 5 può essere visto come il numero complesso $5 + 0i$.
Il numero immaginario $2i$ può essere visto come il numero complesso $0 + 2i$.

L'insieme dei numeri complessi contiene dunque due sottoinsiemi propri:

- il sottoinsieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali;
- il sottoinsieme $\mathbb{I}$ dei numeri immaginari.

Sono sottoinsiemi propri, in quanto numeri complessi del tipo $a + ib$ (con $a \neq 0$ e $b \neq 0$) non appartengono né a $\mathbb{R}$ né a $\mathbb{I}$.
Il numero 0 è considerato sia un numero reale sia un numero immaginario.



Il confronto fra numeri complessi

Due numeri complessi sono uguali quando hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria.

Non viene definita una relazione d'ordine che permetta di dire se un numero complesso è maggiore o minore di un altro.

Modulo di un numero complesso

→ Esercizi a p. 1009

DEFINIZIONE
Il **modulo del numero complesso** $a + bi$ è la radice quadrata della somma del quadrato di a e del quadrato di b. Lo indichiamo con $|a + bi|$.

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il modulo di un numero complesso è un numero reale positivo (o nullo).

Listen to it
The **magnitude** $|a + ib|$ of the complex number $a + ib$ is the square root of the sum of the squares of the **real part** a and the **imaginary part** b.

ESEMPIO

$$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

▸ Calcola il modulo di $-9i$ e di $-6 + 8i$.

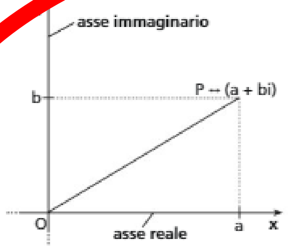
Bergamini et al. 2020

5 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Piano di Gauss

→ Esercizi a p. 1017

Poiché un numero complesso, per definizione, è una coppia ordinata $(a; b)$ di numeri reali, fissato su un piano un sistema di assi cartesiani Oxy, è possibile associare a ogni numero complesso un punto $P(a; b)$ del piano e viceversa.



Abbiamo così creato una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi e i punti del piano che permette di rappresentare geometricamente i numeri complessi.

Il piano in cui si rappresenta $\mathbb{C}$ si chiama **piano complesso** o **piano di Gauss**.

In tale piano i punti dell'asse x corrispondono a numeri reali, i punti dell'asse y corrispondono a numeri immaginari, gli altri punti del piano corrispondono a numeri complessi. L'asse x è detto **asse reale**, l'asse y **asse immaginario**.

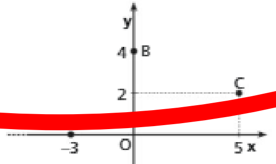
Listen to it

The **Gauss plane** or **complex plane** allows a geometric representation of complex numbers established by two orthogonal axes, the **real axis** x and the **imaginary axis** y.
The points on the real axis correspond to real numbers, which are complex numbers with zero imaginary part.
The points on the imaginary axis correspond to imaginary numbers, which are complex numbers with zero real part. On the rest of the plane we find all the complex numbers.

TEORIA

ESEMPIO

Nella figura sono rappresentati nel piano di Gauss il numero reale -3 (punto A), il numero immaginario $4i$ (punto B) e il numero complesso $5 + 2i$ (punto C).



› Rappresenta nel piano di Gauss: 7, $4i$, $3 + i$, $2 + 2i$.

Se P rappresenta $z = a + bi$, abbiamo che: $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

10 Forma esponenziale di un numero complesso

→ Esercizi a p. 1030

Un numero complesso può essere espresso in una terza forma, diversa da quella algebrica $(a + bi)$ e da quella trigonometrica $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Questa terza forma, detta **esponenziale**, viene utilizzata soprattutto per semplificare i calcoli nelle scienze applicate.

I numeri complessi scritti in forma esponenziale sono utili perché con essi si possono eseguire tutte le operazioni applicando le proprietà delle potenze.

Consideriamo un numero complesso con $r = 1$. In forma trigonometrica è scritto $\cos\alpha + i\sin\alpha$. Vale la seguente relazione che non dimostriamo:

$$\boldsymbol{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha},\quad \text{dove } e \text{ indica il numero di Nepero.}$$

Osserviamo che due numeri complessi $e^{i\alpha}$ ed $e^{i\beta}$ sono uguali solo se α e β differiscono di multipli interi di 2π, ossia se $\beta = \alpha + 2k\pi$.
Applicando le proprietà delle potenze, troviamo una corrispondenza formale con le operazioni di moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza fra numeri complessi scritti in forma trigonometrica.

Moltiplicazione
$$\underbrace{(\cos\alpha + i\sin\alpha)}_{e^{i\alpha}} \cdot \underbrace{(\cos\beta + i\sin\beta)}_{e^{i\beta}} = \underbrace{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)}_{e^{i(\alpha+\beta)}}.$$

Divisione
$$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$$
$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta).$$

Potenza
$$(e^{i\alpha})^n = e^{i(\alpha n)}$$
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

In generale, passando a un numero complesso $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, con modulo r qualsiasi, possiamo scrivere $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{i\alpha}$.
La scrittura $re^{i\alpha}$ si chiama **forma esponenziale del numero complesso** z.

Listen to it

We can express the same complex number z in three different ways: the **rectangular form** $z = a + ib$, the **polar form** by giving the angle α and the radius r such that $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, and the **exponential form** $z = re^{i\alpha}$, where $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

TEORIA

Formule di Eulero

Consideriamo le uguaglianze $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ed $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$.

- Sommiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rl} & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ + & e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha \;\to \end{array}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

- Sottraiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rl} & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ - & e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha \;\to \end{array}$$

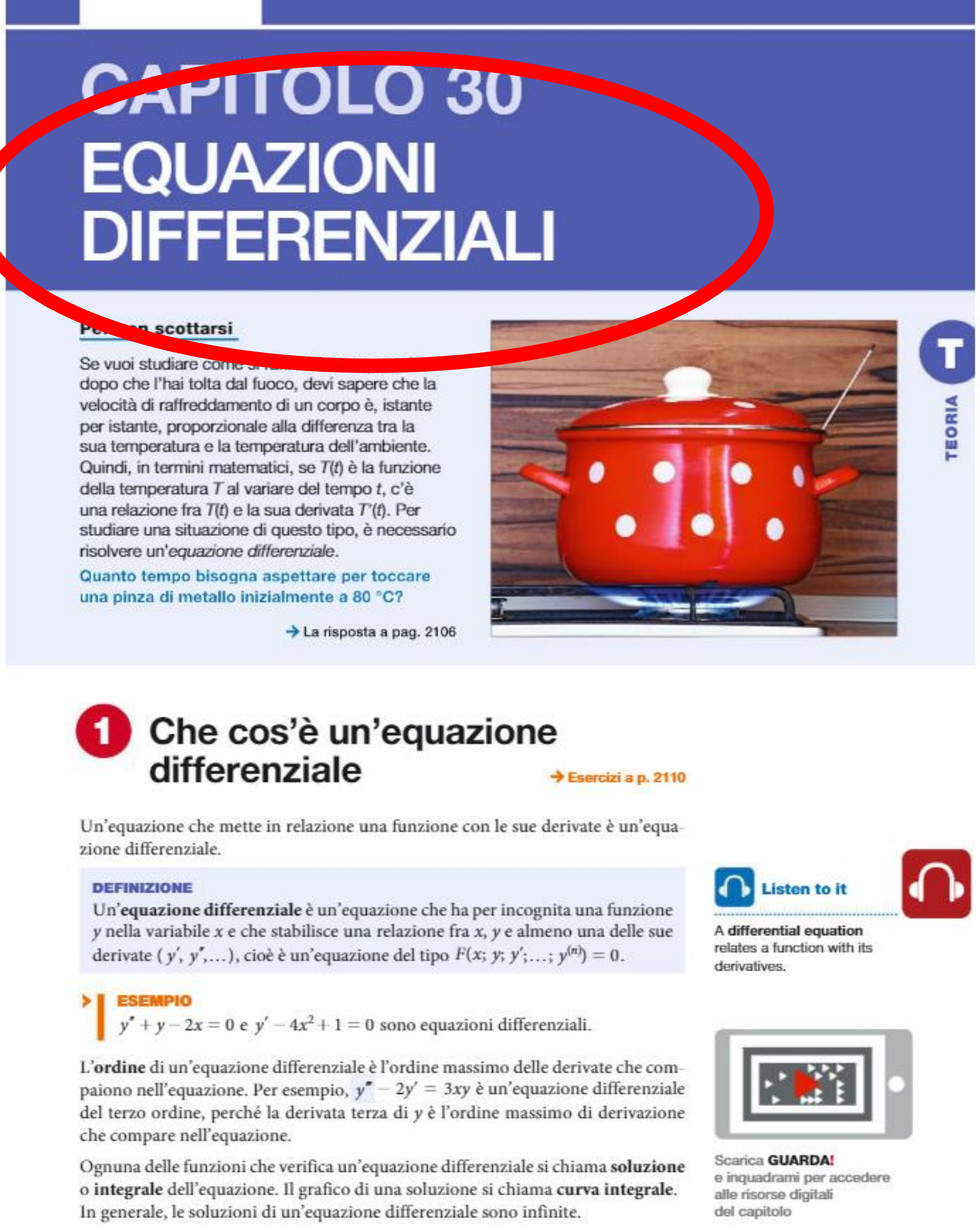
$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Le quattro formule evidenziate sono dette **formule di Eulero**.

Per $\alpha = \pi$ la prima formula è $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$: $\boldsymbol{e^{\pi i} + 1 = 0}$, dove compaiono insieme cinque numeri importanti: $1, 0, e, \pi, i$.

Bergamini et al. 2020

Equazioni differenziali



CAPITOLO 30

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Pe... scottarsi

Se vuoi studiare come si ... dopo che l'hai tolta dal fuoco, devi sapere che la velocità di raffreddamento di un corpo è, istante per istante, proporzionale alla differenza tra la sua temperatura e la temperatura dell'ambiente. Quindi, in termini matematici, se $T(t)$ è la funzione della temperatura T al variare del tempo t, c'è una relazione fra $T(t)$ e la sua derivata $T'(t)$. Per studiare una situazione di questo tipo, è necessario risolvere un'*equazione differenziale*.

Quanto tempo bisogna aspettare per toccare una pinza di metallo inizialmente a 80 °C?

→ La risposta a pag. 2106

T TEORIA

1 Che cos'è un'equazione differenziale

→ Esercizi a p. 2110

Un'equazione che mette in relazione una funzione con le sue derivate è un'equazione differenziale.

DEFINIZIONE

Un'**equazione differenziale** è un'equazione che ha per incognita una funzione y nella variabile x e che stabilisce una relazione fra x, y e almeno una delle sue derivate $(y', y'', \ldots)$, cioè è un'equazione del tipo $F(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}) = 0$.

Listen to it

A differential equation relates a function with its derivatives.

ESEMPIO

$y'' + y - 2x = 0$ e $y' - 4x^2 + 1 = 0$ sono equazioni differenziali.

L'**ordine** di un'equazione differenziale è l'ordine massimo delle derivate che compaiono nell'equazione. Per esempio, $y''' - 2y' = 3xy$ è un'equazione differenziale del terzo ordine, perché la derivata terza di y è l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione.

Ognuna delle funzioni che verifica un'equazione differenziale si chiama **soluzione** o **integrale** dell'equazione. Il grafico di una soluzione si chiama **curva integrale**. In generale, le soluzioni di un'equazione differenziale sono infinite.

Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali del capitolo

2101

Bergamini et al. 2020

RISOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

7

Metodo di Eulero
Metodo di Heun
Metodo di Runge-Kutta (del 4° ordine)
Tipi di errore, stabilità, valutazione
Laboratorio di Matematica-Informatica

1. In questo capitolo ci occuperemo della risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine soggette a date condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y' = f(x;\ y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

È noto che il problema espresso dalle (1) prende il nome di *problema di Cauchy*. Come si ricorderà, il *teorema di Cauchy* afferma che, se in una regione aperta D del piano cartesiano, contenente il punto $(x_0;\ y_0)$, la funzione $f(x;\ y)$ e la sua derivata parziale $f'_y(x;\ y)$ sono continue, allora in un opportuno intorno di x_0 esiste un'«unica» *curva integrale* di equazione $y = y(x)$, soddifacente le (1).
La risoluzione di tale problema con i metodi analitici esposti nel capitolo 4 talvolta non è agevole, se non impossibile: in tali casi il ricorso ai metodi numerici risulta utile, se non necessario.
Si supponga di voler conoscere il valore $y(\bar{x})$ che la soluzione del problema di Cauchy (1) assume in corrispondenza di un determinato valore $\bar{x}$.
I metodi che vogliamo esporre procedono in questo modo: l'intervallo $(x_0;\ \bar{x})$ viene suddiviso in n intervalli, ciascuno di ampiezza (*)

$$h = \frac{\bar{x} - x_0}{n}.$$

La quantità h verrà anche detta *passo d'integrazione*. Gli estremi di tali intervalli sono gli $n+1$ punti

$$x_0;\ x_1 = x_0 + h;\quad x_2 = x_0 + 2h;\quad \dots;\ x_n = x_0 + nh = \bar{x}.$$

(*) Nel caso risulti $\bar{x} < x_0$ si dovrebbe parlare, più correttamente, dell'intervallo $(\bar{x};\ x_0)$. Tuttavia, per non complicare eccessivamente l'esposizione, non faremo tale distinzione se non dove risulterà necessaria. Si noti comunque che se è $\bar{x} < x_0$, si ha $h < 0$ (passo d'integrazione negativo).

A partire dal valore noto $y(x_0) = y_0$, si calcola un'approssimazione y_1 di $y(x_1)$. Quindi, a partire dal valore y_1 così determinato, si calcola un'approssimazione y_2 di $y(x_2)$, e così via, fino ad ottenere un'approssimazione y_n di $y(x_n) = y(\bar{x})$. Come vedremo, il modo in cui ciascuna delle approssimazioni $y_1, y_2, \dots y_n$ viene calcolata, a partire dalla precedente, caratterizza ognuno dei metodi che esporremo. In generale, se si trascura l'effetto degli errori di arrotondamento dei calcoli, tali approssimazioni migliorano al diminuire di h; se, per $h \to 0$, si ha che $y_n \to y(\bar{x})$, cioè se al tendere a 0 del passo h l'approssimazione y_n tende al valore esatto $y(\bar{x})$, si dice che il metodo è

Metodo di Eulero

2. Il più semplice dei metodi numerici per la risoluzione delle equazioni differenziali è il metodo di Eulero. Tale metodo è poco usato nella pratica poiché non consente di solito di ottenere approssimazioni soddisfacenti. Tuttavia esso è molto importante perché la sua comprensione intuitiva, relativamente facile, consente di chiarire concetti che stanno alla base dei metodi più complessi, che possono essere considerati come successivi perfezionamenti del metodo di Eulero.
Illustreremo il metodo a partire da un esempio.
Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -2xy$$

con la condizione iniziale

$$y(0) = 1.$$

Si chiede di determinare un'approssimazione di $y(1)$, essendo $y(x)$ la funzione soluzione della (1) soddisfacente alla condizione (2) (*)
Suddividiamo l'intervallo $[0;\ 1]$ in quattro parti, ciascuna di ampiezza

$$h = \frac{1-0}{4} = 0{,}25.$$

Avremo $x_0 = 0;\quad x_1 = 0{,}25;\quad x_2 = 0{,}5;\quad x_3 = 0{,}75;\quad x_4 = 1.$

Cominciamo ad osservare che la condizione (2) equivale a richiedere che la curva integrale incognita passi per il punto del piano cartesiano di coordinate $(0;\ 1)$.
Sostituendo nella (1) i valori $x = 0$ e $y = 1$ delle coordinate di questo punto, si ottiene $y' = 0$. Ciò significa che la curva integrale da determinare deve avere, in tale punto, tangente orizzontale (fig. 1).

(*) La soluzione esatta della (1) soddisfacente la condizione (2) è la funzione

$$y = e^{-x^2}.$$

Tale soluzione si potrebbe facilmente ottenere applicando il metodo esposto nel cap. 5 a proposito delle equazioni differenziali a variabili separabili.
È ovvio che nella pratica, in casi come questo, il ricorso a metodi approssimati non ha senso. Nell'esposizione tuttavia utilizzeremo esempi di questo tipo per rendere possibile il confronto tra i risultati esatti e quelli approssimati ottenuti con i metodi numerici.

Dodero et al. 1990

Dalle successioni ai sistemi dinamici discreti

Bergamini et al. 2020


CAPITOLO 3
SUCCESSIONI E PROGRESSIONI

...hie, muli, sacchi...

Muli e somarelli sono ... soprattutto in zone di montagna.

Leonardo Fibonacci nel suo *Liber Abaci* ipotizza che un mulo possa trasportare sette sacchi e scrive:

«Sette vecchie vanno a Roma; ognuna ha sette muli, ogni mulo ha sette sacchi, in ogni sacco ci sono sette pani, ogni pane ha sette coltelli, ogni coltello sette guaine. Si chiede la somma di tutti».

Un problema analogo si può costruire con mogli, gatti, gattini...

In quanti andavano a Camogli?

→ La risposta a pag. 160

TEORIA

1 Successioni numeriche

DEFINIZIONE

Una **successione numerica** è una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa a ogni numero naturale n un numero reale a_n:

$$a_n = f(n).$$

Listen to it

A **numerical sequence** is a function $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ that associates with each natural number n a real value a_n: $a_n = f(n)$.

Una successione è costituita da un insieme ordinato e infinito di numeri, detti **termini**:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

L'**indice** 0, 1, ... indica che il termine $a_0, a_1, \ldots$ è il corrispondente del numero 0, 1, ...

L'n-esimo termine a_n della successione è detto **termine generale**.

ESEMPIO

La successione costituita da tutti i quadrati dei numeri naturali è una funzione f che associa a ogni numero naturale il suo quadrato:

$$f(n) = n^2;$$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 9 \quad \ldots$$

Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali del capitolo

147

L'insieme immagine di questa successione è l'insieme dei quadrati dei numeri naturali.

Rappresentazioni delle successioni

→ Esercizi a p. 162

Rappresentazione per elencazione

I numeri naturali sono infiniti; sarebbe dunque impossibile descrivere la successione tramite tutte le assegnazioni. In alcuni casi è possibile rappresentare una successione come una lista ordinata indicando i primi cinque o sei termini seguiti dai puntini di sospensione.

> Completa la successione fino al decimo termine:
> $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_$

TEORIA

ESEMPIO

0, 10, 20, 30, … è la successione dei multipli di 10.

Questa rappresentazione è consigliabile soltanto se, leggendo i primi termini, si possono dedurre gli altri senza ambiguità.

Rappresentazione mediante espressione analitica

È il modo più comune di rappresentare una successione numerica e consiste nello scrivere esplicitamente la relazione che lega l'indice n e il termine a_n.

ESEMPIO

1. $a_n = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}$.
   Scriviamo i primi termini della successione sostituendo alla lettera n, nell'espressione $2n + 1$, i valori 0, 1, 2, 3, …
   Si ha $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, \ldots$
   Si vede facilmente che si tratta della successione dei numeri naturali dispari.
2. Consideriamo la seguente successione definita tramite espressione analitica:
   $$a_n = \frac{2n+1}{3+n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
   Sostituendo a n i valori 0, 1, 2, 3, 4, …, si ottengono i seguenti termini:
   $$\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{12}, \frac{9}{19}, \ldots$$
   In questo caso non è facile capire quali sono i termini successivi, dunque la rappresentazione per enumerazione può essere inefficace.

> Scrivi l'espressione analitica della successione:
> −1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, …

In alcuni casi è preferibile, comunque, rappresentare la successione per elencazione. Per esempio, la successione

0, 0,6, 0,66, 0,666, 0,6666, …

non ha una rappresentazione mediante espressione analitica facile da ricavare.

Rappresentazione ricorsiva o per ricorsione

Tale rappresentazione consiste nel fornire il primo termine della successione e una relazione che lega il termine generale a_n a quello precedente a_{n-1}:

$$\begin{cases} a_0 \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad \text{se } n > 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \quad \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Ogni termine si ottiene dal precedente sommando 2. A partire dal primo termine, si determinano quelli successivi:

$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2 = 3$,

$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$,

$a_3 = a_2 + 2 = 5 + 2 = 7$,

…

Osserviamo che abbiamo riottenuto la successione dei numeri dispari.

> Scrivi i primi … termini della seguente successione:
> $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1} - 2 \text{ se } n > 0 \end{cases}$

TEORIA

A volte la rappresentazione ricorsiva è data fornendo i primi k termini della successione e una relazione che lega il termine generale a_n ai k termini precedenti.

Per esempio:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1, \quad a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2,$
$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3, \quad a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5, \ldots$

Questa successione è detta **successione di Fibonacci**.

MATEMATICA E STORIA

I conigli di Fibonacci
Nel *Liber Abaci*, pubblicato nel 1202, Leonardo Fibonacci riporta questo problema.
«Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da pareti, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura ogni mese le coppie di conigli generano un'altra coppia e cominciano a procreare nel secondo mese dalla nascita.»

- Quale successione si ottiene se si considera il numero di conigli mese dopo mese?

Risposta

Successioni monotòne

→ Esercizi a p. 165

Una successione è:

- **crescente** se ogni termine è maggiore del suo precedente, ossia:
  $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- **decrescente** se ogni termine è minore del suo precedente, ossia:
  $a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- **non decrescente** (o **crescente in senso lato**) se: $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$;
- **non crescente** (o **decrescente in senso lato**) se: $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$;
- **costante** se ogni termine è uguale al suo precedente, ossia:
  $a_n = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

In generale, una successione per cui vale una di queste proprietà si dice **monotòna**.

ESEMPIO

1. La successione 0, 3, 6, 9, 12, … è monotòna crescente.
2. La successione 20, 12, 4, −4, −12, −20, −28, … è monotòna decrescente.
3. La successione 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, … è monotòna non decrescente.
4. La successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ è monotòna non crescente.
5. La successione 5, 5, 5, 5, 5, 5, … è costante.

Bergamini et al. 2020

PROBLEMI DI MATEMATICA E REALTÀ

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

Alcool e salute

Il tasso alcolemico si misura in grammi di alcool per litro di sangue; un tasso alcolemico di 1 g/L indica che in ogni litro di sangue di un soggetto è presente 1 grammo di alcool puro. Supponiamo che una persona abbia assunto una quantità di alcool tale che il tasso alcolemico raggiunga il valore massimo di 1,6 g/L. In media il fegato di una persona riesce a smaltire ogni ora una quantità di alcool ingerito in modo tale che il tasso alcolemico si riduca del 30% ogni ora.

- Scriviamo la successione che descrive il tasso alcolemico del sangue ogni ora.
- Calcoliamo il valore del tasso alcolemico dopo 5 ore dal valore massimo.
- Determiniamo graficamente dopo quanto tempo il tasso alcolemico si è ridotto a una quantità trascurabile (non più di 0,1 g/L).

Troviamo il termine generale della successione.

Chiamiamo a_n il termine generale che descrive il tasso alcolemico nel sangue al trascorrere delle ore $n = 1, 2, 3, \ldots$; il testo del problema ci dice che $a_0 = 1{,}6$ g/L e che ogni termine della successione è il 30% in meno del precedente, ovvero:

$$a_n = \frac{70}{100}a_{n-1} = 0{,}7a_{n-1}.$$

i termini della successione sono in progressione geometrica di ragione $q = 0{,}7$. Possiamo rivere, considerando che la successione parte da $n = 0$:

$a_0(0{,}7)^n \rightarrow a_n = 1{,}6 \cdot (0{,}7)^n$.

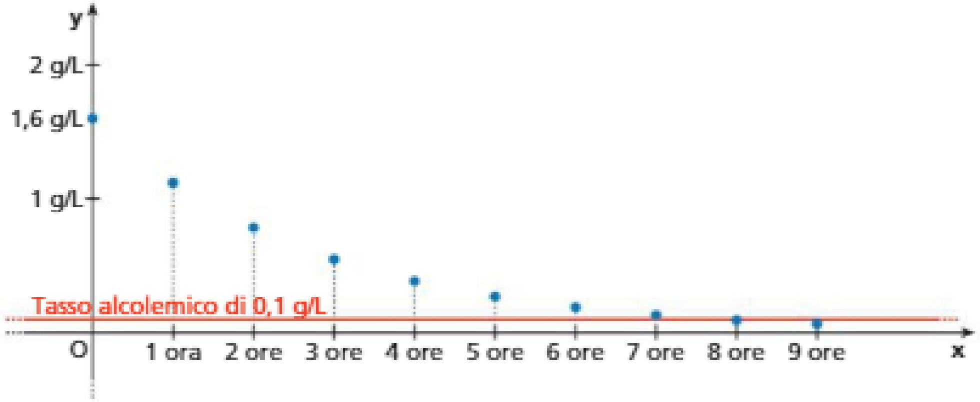
no il tasso alcolemico dopo 5 ore.

olare il tasso alcolemico dopo 5 ore dobbiamo sostituire nell'espressione che abbiamo rica- 5:

$1{,}6 \cdot (0{,}7)^5 \simeq 0{,}27$ g/L.

iamo una rappresentazione grafica.

entiamo in uno stesso grafico la successione, come una funzione che ha come dominio i naturali, e la retta $y = 0{,}1$.



Dal grafico vediamo che i termini della successione sono inferiori al valore 0,1 g/L per $n = 8$, cioè il tasso alcolemico nel sangue è trascurabile dopo 8 ore.

Bergamini et al. 2020

Grafico dei termini iniziali di una successione

PDF Problem solving con calcolatrice Casio

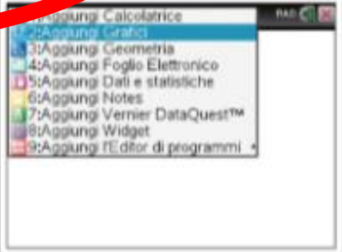
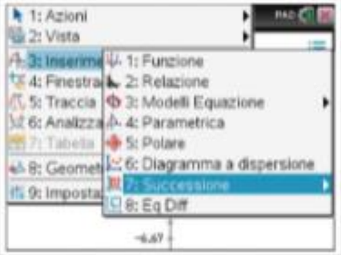
Attività (con Texas Instruments)

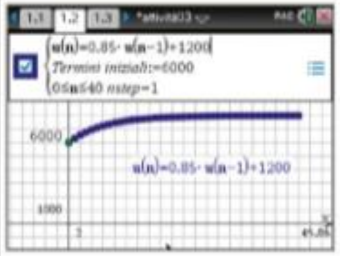
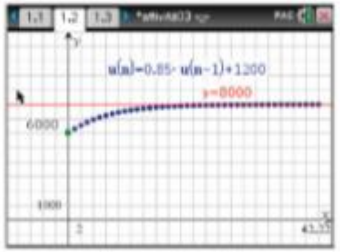
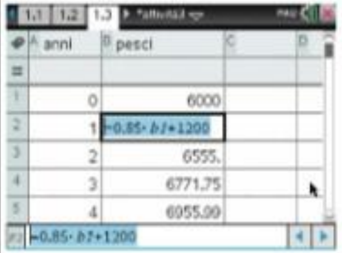
In un lago la popolazione di una certa specie di pesci diminuisce ogni anno del 15% per ragioni legate alla pesca o alla morte naturale. Alla fine di ogni anno vengono introdotti nel lago 1200 nuovi esemplari di pesci di quella specie.

Se alla fine del 2013 ($n = 0$) la popolazione era costituita da 6000 esemplari, rappresenta ricorsivamente la successione u_n che fornisce il numero di esemplari della popolazione al termine dell'n-esimo anno dopo il 2013 (per esempio, u_1 rappresenta la popolazione alla fine del 2014).
La popolazione cresce o decresce? E come evolve a lungo andare?
Rappresenta graficamente i primi 40 termini della successione.

Risolviamo il problema con la calcolatrice gra[illegible] Nspire CX.
Il modello che descrive l'andamento della popolazione è la [illegible]essione definita ricorsivamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} u_0 = 6000 \\ u_n = 0{,}85u_{n-1} + 1200 \end{cases}$$

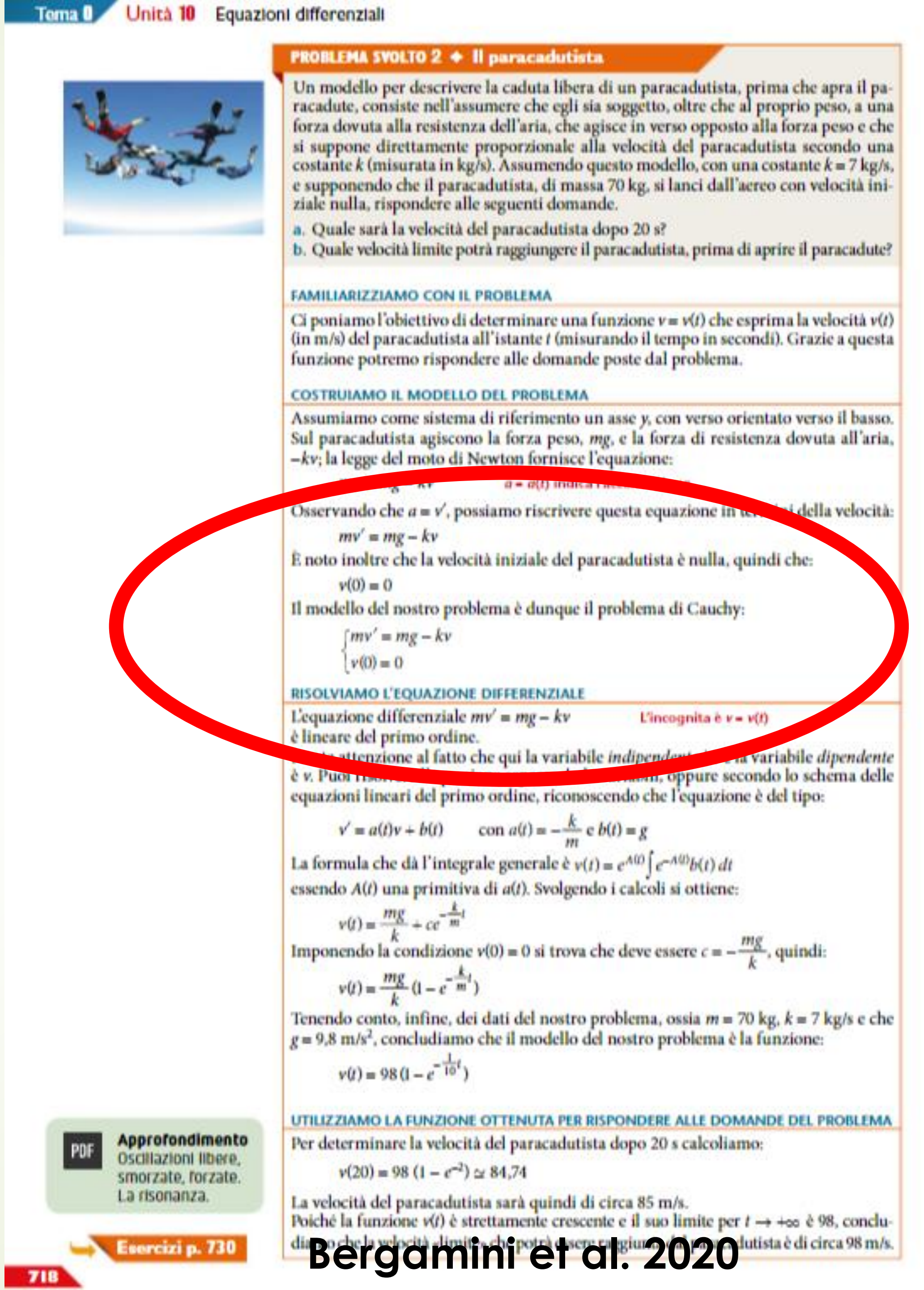
Dati e istruzioni da inserire	Risultato
Occorre creare un documento e inserire una pagina per i grafici. Premi in [illegible]: ctrl > doc▾ e seleziona **Aggiungi Grafici**.	
Premi quindi menu e seleziona **Inserimento/modifica grafico** > **Successione**	

Nella riga di inserimento, dove compare `u1(n)=` scrivi: `u1(n)=0.85·u1(n-1)+1200` La successione può anche essere chiamata u, come in figura; basta cancellare l'indice. Come termine iniziale scrivi 6000 e come intervallo $0 \le n \le 40$. Premi enter: otterrai il grafico dei primi termini della successione. Nota che il punto iniziale (0, 6000) può essere trascinato, osservando immediatamente l'andamento della popolazione al variare della popolazione iniziale.	
Eventualmente usa il comando menu > **Finestra/Zoom** > **Adatta zoom**, oppure ingrandisci la finestra del grafico. Dal grafico si vede che la popolazione cresce, ma che nel giro di 20 anni circa tende a stabilizzarsi attorno agli 8000 individui. Se n è molto grande si può supporre quindi che $u_n \approx u_{n-1} = u$. Si ottiene pertanto l'equazione: $u = 0{,}85u + 1200$ che risolta fornisce il numero di individui cui tende la popolazione, $u = 8000$.	
La situazione può essere esplorata anche tramite una tabella. Premi i tasti ctrl > doc▾ e seleziona **Aggiungi Foglio elettronico**. Nella prima colonna inserisci gli anni da 0 a 40. Nella casella `B1` inserisci la popolazione iniziale (6000). Nella casella `B2` inserisci la formula: `=0.85*b1+1200` Copia verso il basso la formula fino a $n = 40$.	

Esplora il modello cambiando il numero iniziale di pesci, per esempio fissando una popolazione iniziale di 10000 pesci. Che cosa succede, a lungo andare, alla popolazione?

Sasso e Zanone 2020

Modelli differenziali



PROBLEMA SVOLTO 2 ◆ Il paracadutista

Un modello per descrivere la caduta libera di un paracadutista, prima che apra il paracadute, consiste nell'assumere che egli sia soggetto, oltre che al proprio peso, a una forza dovuta alla resistenza dell'aria, che agisce in verso opposto alla forza peso e che si suppone direttamente proporzionale alla velocità del paracadutista secondo una costante k (misurata in kg/s). Assumendo questo modello, con una costante $k = 7$ kg/s, e supponendo che il paracadutista, di massa 70 kg, si lanci dall'aereo con velocità iniziale nulla, rispondere alle seguenti domande.

a. Quale sarà la velocità del paracadutista dopo 20 s?
b. Quale velocità limite potrà raggiungere il paracadutista, prima di aprire il paracadute?

FAMILIARIZZIAMO CON IL PROBLEMA

Ci poniamo l'obiettivo di determinare una funzione $v = v(t)$ che esprima la velocità $v(t)$ (in m/s) del paracadutista all'istante t (misurando il tempo in secondi). Grazie a questa funzione potremo rispondere alle domande poste dal problema.

COSTRUIAMO IL MODELLO DEL PROBLEMA

Assumiamo come sistema di riferimento un asse y, con verso orientato verso il basso. Sul paracadutista agiscono la forza peso, mg, e la forza di resistenza dovuta all'aria, $-kv$; la legge del moto di Newton fornisce l'equazione:

[illegible] $a = a(t)$ [illegible]

Osservando che $a = v'$, possiamo riscrivere questa equazione in [illegible] della velocità:

$$mv' = mg - kv$$

È noto inoltre che la velocità iniziale del paracadutista è nulla, quindi che:

$$v(0) = 0$$

Il modello del nostro problema è dunque il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} mv' = mg - kv \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

RISOLVIAMO L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

L'equazione differenziale $mv' = mg - kv$ è lineare del primo ordine. L'incognita è $v = v(t)$

[illegible] attenzione al fatto che qui la variabile *indipendent*[illegible] variabile *dipendente* è v. Puoi [illegible], oppure secondo lo schema delle equazioni lineari del primo ordine, riconoscendo che l'equazione è del tipo:

$$v' = a(t)v + b(t) \qquad \text{con } a(t) = -\frac{k}{m} \text{ e } b(t) = g$$

La formula che dà l'integrale generale è $v(t) = e^{A(t)}\int e^{-A(t)}b(t)\,dt$

essendo $A(t)$ una primitiva di $a(t)$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + ce^{-\frac{k}{m}t}$$

Imponendo la condizione $v(0) = 0$ si trova che deve essere $c = -\frac{mg}{k}$, quindi:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Tenendo conto, infine, dei dati del nostro problema, ossia $m = 70$ kg, $k = 7$ kg/s e che $g = 9{,}8$ m/s^2, concludiamo che il modello del nostro problema è la funzione:

$$v(t) = 98\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right)$$

UTILIZZIAMO LA FUNZIONE OTTENUTA PER RISPONDERE ALLE DOMANDE DEL PROBLEMA

Per determinare la velocità del paracadutista dopo 20 s calcoliamo:

$$v(20) = 98\,(1 - e^{-2}) \simeq 84{,}74$$

La velocità del paracadutista sarà quindi di circa 85 m/s.
Poiché la funzione $v(t)$ è strettamente crescente e il suo limite per $t \to +\infty$ è 98, concludia[illegible]o che la velocità limite che potrà essere raggiun[illegible]dutista è di circa 98 m/s.

PDF **Approfondimento** Oscillazioni libere, smorzate, forzate. La risonanza.

Esercizi p. 730

Bergamini et al. 2020

MATEMATICA E NATURA

Prede e predatori

In natura prede e predatori coesistono sempre in uno stesso ambiente.
Esiste un modello matematico che descrive questa situazione?

LA RISPOSTA

Il modello preda-predatore è anche noto come modello Volterra-Lotka, perché i due matematici Vito Volterra e Alfred J. Lotka lo elaborarono contemporaneamente, ma senza sapere nulla l'uno del lavoro dell'altro.
Il modello semplificato che consideriamo è un sistema di due equazioni differenziali che descrive la coesistenza fra una specie di prede e una di predatori. Con la lettera n si indica l'istante considerato rispetto all'inizio dell'indagine, espresso, per esempio, in mesi; x_n indica il numero delle prede all'istante n (per esempio, all'inizio del mese n) e y_n quello dei predatori. Le variazioni del numero di prede e di predatori nel mese n dipendono sia da caratteristiche proprie della specie presa in considerazione, sia dai rapporti con l'altra specie, cioè dalla catena alimentare:

$$\underbrace{x_{n+1}-x_n}_{\text{variazione delle prede}} = \underbrace{a_1 x_n}_{\text{prede neonate}} - \underbrace{b x_n y_n}_{\text{prede mangiate}} - \underbrace{a_2 x_n}_{\text{prede morte per cause naturali}}$$

$$\underbrace{y_{n+1}-y_n}_{\text{variazione dei predatori}} = \underbrace{d x_n y_n}_{\text{predatori neonati}} - \underbrace{c y_n}_{\text{predatori morti per cause naturali}}$$

dove a_1, a_2, b, c, d sono costanti di proporzionalità.
Se vogliamo esprimere la variazione di x e y in funzione del tempo, dobbiamo considerare le derivate delle due funzioni, quindi otteniamo le seguenti equazioni differenziali:

$$x'(t) = A\,x(t) + B\,x(t)\,y(t),$$

con $A = a_1 - a_2 + 1 > 0$ e $B = -b < 0$;

$$y'(t) = C\,y(t) + D\,x(t)\,y(t),$$

con $C = 1 - c < 0$ e $D = d > 0$.

La contemporanea presenza di prede e predatori introduce termini non lineari rappresentati dal prodotto dei numeri delle due specie. Il termine con il prodotto $x(t)y(t)$ rappresenta la possibilità di incontro tra preda e predatore: per le prede si risolve in una diminuzione del numero ($B < 0$), mentre per la popolazione dei predatori in un aumento ($D > 0$).

Bergamini et al. 2020

Prerequisiti Informatici

Quando il modello numerico genera un algoritmo, quest'ultimo deve essere implementato in un programma attraverso un linguaggio di programmazione. Tra i tanti linguaggi utilizzati noi ci concentreremo su Octave, perché da un lato è un linguaggio [illegible] efficace per il calcolo scientifico.

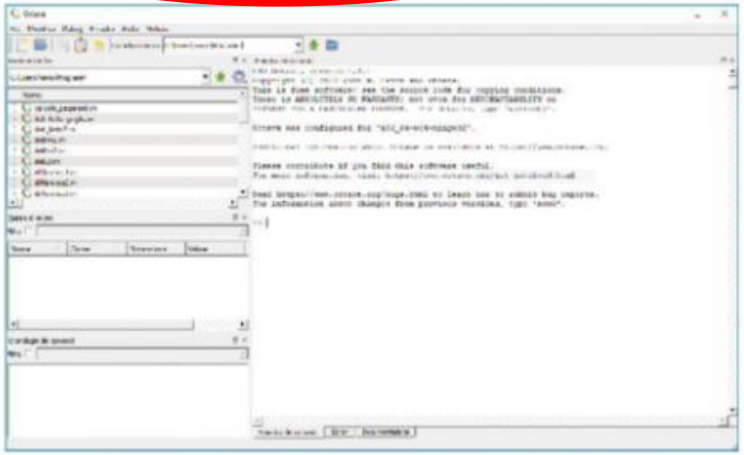
A margine del testo riporteremo via via i comandi che introdurremo.

1 Programmare con Octave

*John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg, Rik Wehbring (2018). GNU Octave version 4.4.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations. URL https://www.gnu.org/software/octave/doc/v4.4.1/

Octave, anche noto come GNU Octave*, è un software distribuito gratuitamente che si può scaricare dal sito www.octave.org.

Dopo aver installato Octave sul proprio computer, ogni qualvolta si lanci il programma si apre sul desktop un ambiente di lavoro come quello riportato in **figura 1**.



▲ **Figura 1** L'ambiente di lavoro di Octave.

Il desktop di lavoro è suddiviso in sottofinestre in cui è possibile eseguire comandi e vedere l'output, gestire i file, visualizzare il contenuto delle variabili e della memoria di lavoro.

`>>`

La finestra principale è la *finestra dei comandi* (*command window* nella versione in inglese), essa è caratterizzata dalla presenza del *prompt*:

```
>>
```

ed è la finestra in cui si digitano i comandi e le istruzioni.

Vediamo come si lavora con Octave prendendo spunto da semplici problemi.

Operazioni aritmetiche e variabili

PROBLEMA 1

Calcolo di un'espressione numerica

Calcolare il numero reale

$$a = \frac{3 + 5^3 - \frac{2}{3}}{4.25(5 + 2^4)}$$

Svolgimento. Digitando nella finestra dei comandi dopo il prompt >> la seguente istruzione

```
a=(3+5^3-2/3)/(4.25*(5+2^4))
```

*Come abbiamo detto nel capitolo 2, una *variabile* in un algoritmo o in un programma è di fatto una scatola che può contenere quello che noi di volta in volta vi andiamo a riporre.

e premendo il tasto enter, otteniamo il risultato

```
a =
  1.4267
```

Octave ha calcolato il risultato dell'espressione e l'ha memorizzato nella variabile* di nome a.

Nello scrivere l'espressione numerica abbiamo osservato le seguenti *regole*:

`^ * / + -`

1. la virgola dei numeri decimali è sostituita dal punto;
2. le operazioni aritmetiche sono realizzate con i seguenti caratteri (o operatori):
   - `^` potenza
   - `*` prodotto
   - `/` divisione
   - `+` somma
   - `-` differenza
3. sono osservate le precedenze classiche dell'aritmetica: prima vengono svolte le potenze, poi i prodotti e le divisioni nell'ordine in cui si trovano (da sinistra a destra), infine le somme e le sottrazioni (sempre nell'ordine da sinistra a destra);
4. per alterare le precedenze delle operazioni si utilizzano esclusivamente le parentesi tonde.

`format`

Octave mostra il risultato calcolato con sole 4 cifre decimali (a destra del punto) anche se in realtà ha lavorato con un totale di 15 cifre. Per poter visualizzare tutte e 15 le cifre del numero, digitiamo il comando

```
format long
```

Quarteroni e Gervasio 2019

seguito dal tasto enter. Non otteniamo alcun output, ma in questo modo forziamo d'ora in poi Octave a visualizzare tutti i risultati nel *formato* a 15 cifre, cosicché digitando

```
a
```

sempre seguito da enter, otteniamo la risposta

```
a = 1.42670401493931
```

cioè Octave ci restituisce il valore che abbiamo calcolato durante lo svolgimento del problema 1 e che avevamo memorizzato nella variabile a.
Per tornare a visualizzare i numeri nel formato con 4 cifre decimali basta digitare

```
format short
```

OSSERVA

D'ora in poi sottointendiamo che alla fine di ogni comando venga sempre premuto il tasto enter.

I *nomi delle variabili* in Octave sono stringhe alfanumeriche lunghe al più 63 caratteri, il primo dei quali non può essere un numero.
All'interno di un nome di variabile sono ammessi alcuni caratteri speciali, come per esempio l'*underscore* _, ma non sono ammessi gli spazi, i segni operazionali e le *parole chiave* del linguaggio, come `for`, `end`, `if`, `while`...
Octave è *case sensitive*, ovvero maiuscole e minuscole sono considerate diversamente, quindi, per esempio, `a` e `A` sono due variabili diverse e possono contenere numeri diversi.

Se nel calcolare il risultato di un'operazione o nell'assegnare un valore a una variabile non fossimo interessati a visualizzare immediatamente il risultato o il valore,
; possiamo concludere l'istruzione con un ; (punto e virgola). Per esempio, l'istruzione

```
b=3.42/72;
```

non produce alcuna risposta, ma comunque Octave ha eseguito l'operazione e ha salvato il risultato nella variabile b.
Per visualizzare in seguito il contenuto di b (cioè il numero che abbiamo salvato nella variabile b) basterà digitare

```
b  % senza punto e virgola
```

e Octave risponderà:

```
b = 0.047500
```

% Tutto ciò che segue il comando % (entro il termine della riga) è considerato da Octave come commento e quindi non è interpretato come comando.

Osserviamo che, se svolgiamo un'operazione senza assegnarla a una variabile, Octave
ans memorizza il risultato dell'operazione in una variabile di default di nome ans, per esempio l'istruzione

```
3.42/72
```

produce

```
ans = 0.047500
```

Il contenuto della variabile ans viene modificato non appena svolgiamo un'altra operazione senza memorizzarne il risultato in una variabile specificata, quindi se ora digitiamo

```
2/3.56
```

Octave produce

```
ans = 0.56180
```

cioè Octave ha ripulito la variabile ans dal valore 0.047500 e vi ha memorizzato il valore 0.56180 (dicevamo che una variabile è come una scatola, con quest'ultima istruzione abbiamo tolto dalla scatola di nome ans ciò che vi era dentro e vi abbiamo riversato qualcos'altro).

Le funzioni matematiche e la loro rappresentazione grafica

PROBLEMA 2

Disegnare funzioni matematiche

Disegnare i grafici delle funzioni

$f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ e $g(x) = \sqrt{2x+5} - 2$ sull'intervallo $I = [-2, 6]$.

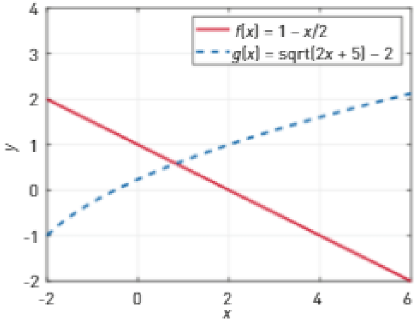
Svolgimento. Digitiamo le seguenti istruzioni Octave nella finestra dei comandi (voi potete evitare di scrivere i commenti):

```
f=@(x)1-x/2; % definiamo la funzione f
g=@(x)sqrt(2*x+5)-2; % definiamo la funzione g
figure(1);  % scegliamo la finestra grafica numero 1
            % per disegnare
clf           % puliamo la finestra grafica (se l'abbiamo
            % utilizzata prima d'ora)
fplot(f,[-2,6],'r-') % disegniamo la funzione f sull'intervallo
            % [-2,6] nel colore red e in linea continua
hold on     % manteniamo il grafico appena
            % disegnato e disegniamo insieme il successivo
fplot(g,[-2,6],'b--') % disegniamo la funzione g sull'intervallo
            % [-2, 6] nel colore blu e in linea tratteggiata
xlabel('x')  % assegniamo l'etichetta 'x' all'asse
            % delle ascisse
ylabel('y')  % assegniamo l'etichetta 'y' all'asse
            % delle ordinate
```

Quarteroni e Gervasio 2019

```
legend('f(x)=1-x/2','g(x)=sqrt(2x+5)-2') % riportiamo la legenda
        % con la descrizione delle funzioni disegnate
axis equal  % chiediamo di visualizzare il grafico con la
        % stessa unità di misura in x e y
grid on     % disegniamo una griglia sul grafico
```

Il risultato grafico che otteniamo è rappresentato in **figura 2**.



▲ **Figura 2** L'output grafico del problema 2.

Ora vi spieghiamo la sintassi dei comandi utilizzati, affinché li possiate utilizzare in altri contesti.

`f=@(x)...` La sintassi per definire una funzione matematica `f` è

```
f=@(x)espressione
```

dove `x` è la variabile indipendente su cui agisce la funzione, mentre `espressione` è l'espressione matematica della funzione, come per esempio `1-x/2` o `sqrt(2*x+5)-2`. `f` è nuovo tipo di variabile di Octave, detto *function handle*.

`sqrt` Nel definire il function handle `g` abbiamo utilizzato la funzione matematica `sqrt` che realizza la radice quadrata (da *square root* in inglese).

`exp` Se invece volessimo definire la funzione $h(x) = e^x$, dovremmo digitare il comando

```
h=@(x)exp(x)
```

Nella **tabella 1** riportiamo una lista delle più comuni funzioni matematiche e dei relativi nomi in Octave.

funzioni matematiche	comandi Octave
$\sqrt{x}$	`sqrt(x)`
$\lvert x\rvert$	`abs(x)`
$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$	`sin(x)`, `cos(x)`, `tan(x)`
e^x, $\log_e(x)$, $\log_{10}(x)$	`exp(x)`, `log(x)`, `log10(x)`
$\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$	`asin(x)`, `acos(x)`, `atan(x)`
arrotondamento di x	`round(x)`, es: `round(3.6)=4`
parte intera di x	`fix(x)`, es: `fix(3.6)=3`

▲ **Tabella 1** Le principali funzioni matematiche e i corrispondenti nomi in Octave.

`fplot` Il comando `fplot` permette di disegnare una funzione matematica. Con l'istruzione

```
fplot(fun,[a,b])
```

disegniamo la funzione `fun` sull'intervallo $[a, b]$. Nella parentesi tonda possiamo aggiungere ulteriori parametri, tutti rigorosamente separati da virgole, per specificare il colore o il tipo di linea da utilizzare nel disegno.
Per esempio con l'istruzione

```
fplot(fun,[-2,6],'r-')
```

disegniamo la funzione con una linea continua rossa, mentre con l'istruzione

```
fplot(fun,[-2,6],'b--');
```

disegniamo la funzione con una linea tratteggiata blu.

`help` Per conoscere nel dettaglio tutte le opzioni di chiamata di un comando di Octave, basta invocare il comando `help`. Per esempio, digitando

```
help fplot
```

possiamo apprendere tutte le specifiche del comando `fplot`.

`xlabel` `ylabel` Con i comandi `xlabel('xxx')` e `ylabel('yyy')` aggiungiamo la descrizione degli assi, precisamente attribuiamo la stringa* `'xxx'` all'asse delle ascisse e `'yyy'` all'asse delle ordinate.

*Una *stringa* è una sequenza di caratteri alfanumerici racchiusa tra due apici.

`legend` Infine il comando `legend('testo1', 'testo2', ...'teston')` permette di specificare una legenda nel grafico, con una stringa per ogni funzione disegnata. Le stringhe elencate all'interno del comando legend devono essere inserite secondo lo stesso ordine che si è seguito per rappresentare le corrispondenti funzioni.

I vettori e le matrici

Se indichiamo con n e m due numeri interi positivi, una matrice A con n righe e m colonne è una tabella di $n \times m$ numeri reali a_{ij} con $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, cioè

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

(rimandiamo al paragrafo 2 del capitolo 2 per la definizione di matrici e vettori).
In maniera compatta scriviamo anche $A = (a_{ij})$. Se $n \neq m$ la matrice si dice *rettangolare*, mentre se $n = m$ la matrice si dice *quadrata* di dimensione n.
Una matrice con una sola colonna è detta *vettore colonna*, mentre una matrice con una sola riga viene detta *vettore riga* (rimandiamo ancora al capitolo 2).
In Octave, matrici e vettori vengono chiamati più genericamente *array*.

Quarteroni e Gervasio 2019

`A(2,:)` Per leggere e stampare a video la seconda riga di A (cioè gli elementi che appartengono alla riga 2 e a ciascuna colonna), il comando da digitare è:

```
A(2,:)
```

Octave risponde:

```
ans =
  1   1   1
```

`A(:,3)` Infine per stampare a video la terza colonna di A (cioè gli elementi che appartengono alla colonna 3 e a ciascuna riga), il comando da digitare è:

```
A(:,3)
```

La risposta è:

```
ans =
  2.5000
  1.0000
  1.0000
```

Per leggere gli elementi di un array abbiamo osservato le seguenti regole:

1. per leggere il contenuto di una componente dell'array e stamparla a video si utilizzano le parentesi tonde;
2. per leggere il contenuto di una riga di una matrice e stamparla a video si utilizzano le parentesi tonde, l'indice di riga specificato e il carattere `:` (due punti) al posto dell'indice di colonna;
3. per leggere il contenuto di una colonna di una matrice e stamparla a video si utilizzano le parentesi tonde, il carattere `:` (due punti) al posto dell'indice di riga e l'indice di colonna specificato.

Operazioni con le matrici

Sulle matrici possiamo definire alcune operazioni elementari.

1. Se $A = (a_{ij})$ è una matrice $n \times m$, allora $A^T = (a_{ji})$ è la matrice trasposta di A, essa è ottenuta scambiando fra loro gli elementi a_{ij} e a_{ji} ed è una matrice $m \times n$. Per esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{allora } A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Le istruzioni Octave per memorizzare la matrice A nella variabile `A` e costruire la sua trasposta e memorizzarla nella variabile `At` sono:

```
A=[2, 4; -1, 0; 2, -3];
At=A'
```

ovvero l'apice `'` realizza l'operazione di trasposizione.

2. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono due matrici $n \times m$, allora la *somma* di A con B è la matrice C i cui elementi sono $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (sommo gli elementi delle due matrici che si trovano nella medesima posizione); per esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

allora

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le istruzioni Octave per realizzare questa somma sono:

```
A=[2, 4; -1, 0; 2, -3];
B=[1, -2; 5, 3; -1, 4];
C=A+B
```

3. Il *prodotto* di una matrice A per un numero reale λ è la matrice $B = \lambda A$ i cui elementi sono $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ (ogni elemento di A è moltiplicato per λ); per esempio, se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda = 2,$$

allora

$$B = \lambda A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Le istruzioni Octave per realizzare questo prodotto sono:

```
A=[3, 1; -2, 4];
lambda=2;
B=lambda*A
```

4. Il *prodotto fra una matrice quadrata A (di n righe e n colonne) e un vettore colonna* $\mathbf{x}$ *(di n elementi)* è un vettore colonna $\mathbf{c}$ di n elementi così definiti (si veda il paragrafo 2 del capitolo 2):

$$c_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, n.$$

Quarteroni e Gervasio 2019

disegna semplicemente una curva verde (g=green) in linea continua. Per una descrizione dettagliata di tutte le opzioni possibili, rimandiamo all'`help` del comando `plot`.
Osserviamo che quando i punti utilizzati sono molti (101 nel nostro caso), la spezzata disegnata dal comando `plot` appare molto regolare e fornisce una buona approssimazione del grafico della funzione.
Provate per esempio a rieseguire il problema 6 con 9 punti anziché 101, vedrete che il grafico che si ottiene è una spezzata che non è il grafico della funzione $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x + 1$. Per disegnare il grafico di una funzione in maniera accurata è sempre bene utilizzare un numero elevato di punti.
Il comando `plot` è alternativo al comando `fplot` visto in precedenza. La differenza sostanziale tra i due comandi consiste nel fatto che con il comando `plot` scegliamo noi i punti in cui valutare f (cioè i vertici della spezzata), mentre con il comando `fplot` la scelta è fatta in maniera automatica da Octave.

Le istruzioni di stampa

Per stampare a video delle scritte (cioè delle stringhe di caratteri alfanumerici) e i risultati delle operazioni, possiamo usare i comandi `disp` e `fprintf`.

`disp`

Il comando `disp` ci permette di stampare a video solo stringhe di caratteri. Per esempio, l'istruzione

```
disp('Hey there, I''m using Octave')
```

produce a video

```
Hey there, I'm using Octave
```

Tutto ciò che vogliamo che sia stampato a video deve essere racchiuso tra due apici, che a loro volta devono essere compresi tra due parentesi tonde.
Facciamo notare la presenza del doppio apice in `I''m`: ogni volta che vogliamo che sia stampato un apice, dobbiamo digitarlo due volte, altrimenti Octave interpreta l'unico apice che scriviamo come fine della stringa da stampare a video.

`fprintf`

Il comando `fprintf` permette di stampare a video strighe di caratteri e variabili su una stessa riga, utilizzando dei formati particolari. Per esempio, le istruzioni

```
n=3; A=[2, sqrt(2), pi];
fprintf('La componente %d di A contiene il valore %f \n', n, A(n))
```

producono la stampa

```
La componente 3 di A contiene il valore 3.141593
```

Il comando `fprintf` esegue la stampa a video della stringa contenuta tra gli apici, in cui: il formato `%d` è sostituito dal contenuto della variabile `n` che abbiamo scritto dopo la stringa, mentre il formato `%f` è sostituito dal contenuto della variabile `A(n)` che abbiamo scritto di seguito a `n`.
Durante la fase di stampa, ogni carattere di formato (cioè `%d` e `%f` nel nostro esempio) viene sostituito dal contenuto di una variabile. Alla stringa quindi dovremo fare seguire tante variabili quanti sono i caratteri di formato che abbiamo inserito nella stringa stessa (nel nostro esempio sono due). Le variabili verranno associate ai formati seguendo l'ordine con cui vengono scritte.

I formati utilizzati da Octave per le stampe a video sono riportati nella tabella 2.
Gli ultimi due caratteri `\n` in fondo alla stringa contenuta nel comando `fprintf` indicano a Octave che la linea di stampa è terminata e quindi impongono a Octave d'andare a capo per la stampa successiva.
Nello specificare un formato si può anche stabilire il numero di caratteri da utilizzare per stampare una certa variabile. Per esempio, riferendoci all'istruzione di stampa precedente, se vogliamo dedicare alla stampa di `A(n)` 16 caratteri in tutto, di cui 14 per la parte decimale, possiamo utilizzare il formato `%16.14f` invece di `%f`. Le istruzioni

tipo di variabile	formato
intero	`% d`
reale (formato fisso)	`% f`
reale (formato esponenziale)	`% e`
stringa di caratteri	`% s`

▲ Tabella 2 I formati di Octave per le stampe a video.

```
n=3; A=[2, sqrt(2), pi];
fprintf('La componente %d di A contiene il valore %16.14f \n', ...
     n, A(n))
```

producono la stampa

```
La componente 3 di A contiene il valore 3.14159265358979
```

OSSERVA

Osserviamo che possiamo scrivere più istruzioni Octave sulla stessa riga.

Unità di programma: script e user-defined function

Lo script: come la lista della spesa

Uno *script* è un file che ha estensione `.m` e contiene una o più istruzioni Octave.
Uno script è un po' come la lista della spesa su cui scriviamo tutto ciò che dobbiamo acquistare. Invece di scrivere le istruzioni una alla volta nella finestra dei comandi (cioè invece di [illegible] spesa alla volta) le [illegible] tutte all'interno di un file (lo script) e poi mandiamo in esecuzione lo script con un solo comando (cioè facciamo un'unica spesa).
Vediamo quali sono i passi da seguire per scrivere ed eseguire uno script.

1. Selezioniamo la voce "File" sul pannello di Octave e quindi "Nuovo script", veniamo spostati sulla finestra di Editor in cui non compare il prompt >>).
2. All'interno di questa finestra di editor scriviamo le istruzioni Octave, per esempio per disegnare le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ sull'intervallo $[-1.5, 1.5]$ digitiamo:

```
f=@(x)x.^2; g=@(x)x.^3;
x=linspace(-1.5, 1.5, 200); yf=f(x); yg=g(x);
figure(1); clf
plot(x, yf); hold on; plot(x, yg);
xlabel('x'); ylabel('y');
```

Quarteroni e Gervasio 2019

```
function [ypm]=disegna_f(f, a, b)
% disegna_f: disegna una funzione sull'intervallo [a, b]
% e calcola il valore di f nel punto medio di [a, b]
% Istruzione di chiamata: [ypm]=disegna_f(f, a, b)
% Input: f = function handle della funzione da disegnare
%     a = estremo sinistro dell'intervallo
%     b = estremo destro dell'intervallo
% Output: ypm = valore di f nel punto medio dell'intervallo
x=linspace(a, b, 500); % generiamo un vettore di 500 ascisse
y=f(x);  % valutiamo le ordinate
figure(1); clf % selezioniamo la finestra grafica e la puliamo
plot(x, y)  % disegniamo la funzione
xlabel('x'); ylabel('y=f(x)') % definiamo le label per gli assi
xpm=(a+b)/2; % calcoliamo il punto medio dell'intervallo
ypm=f(xpm); % valutiamo f nel punto medio
```

Quindi salviamo la function con nome `disegna_f` (esattamente quello che abbiamo scritto nella prima riga della function) e torniamo alla finestra dei comandi di Octave.
Prima di eseguire la function `disegna_f` dobbiamo definire le variabili di input: `f`, `a` e `b`. Per esempio fissiamo

```
f=@(x)x.^3-2*x+1; % definiamo un function handle a nostro piacere
a=-1; b=1.5; % definiamo gli estremi dell'intervallo
```

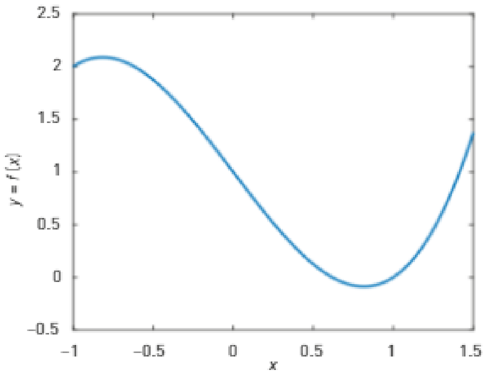
A questo punto eseguiamo la function digitando il comando

```
[ypm]=disegna_f(f, a, b)
```

Dopo l'esecuzione della function, verrà stampato a video il valore

```
ypm = 0.51562
```

e verrà generata una finestra grafica con il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 2x + 1$, come quello riportato in **figura 4**.



▲ **Figura 4** Il grafico prodotto dalla function `disegna_f`.

Se ora digitiamo:

```
help disegna_f
```

Octave risponde:

```
% disegna_f: disegna una funzione sull'intervallo [a, b]
% e calcola il valore di f nel punto medio di [a, b]
% Istruzione di chiamata: [ypm] = disegna_f(f, a, b)
% Input: f = function handle della funzione da disegnare
%     a = estremo sinistro dell'intervallo
%     b = estremo destro dell'intervallo
% Output: ypm = valore di f nel punto medio dell'intervallo
```

ovvero stampa a video tutto ciò che abbiamo scritto nelle righe commentate all'inizio della function; questo viene visualizzato nella finestra dei comandi e funziona come `help` del comando stesso. La nostra function è diventata un comando di Octave.
Se ora volessimo utilizzare la function per disegnare un'altra funzione, non serve modificare la function, ma basta ridefinire il function handle `f` prima di richiamare la function `disegna_f`. Per esempio, per disegnare la funzione $f(x) = x^3 - 5x$ nell'intervallo $[-0.5, 1.75]$ e calcolare il valore di f nel punto medio dell'intervallo basta digitare i comandi

```
f=@(x)x.^3-5*x; a=-0.5; b=1.75; [ypm]=disegna_f(f, a, b)
```

Le variabili utilizzate all'interno della function che non sono passate come variabili di output (come `x` e `y`) vengono perse non appena la function ha terminato la sua esecuzione.
Variabili [illegible] all'esecuzione della function possono essere referenziate (cioè utilizzate) all'interno della function solo se esse vengono passate nella lista delle variabili di input.

Costrutti fondamentali

Il ciclo for

Abbiamo introdotto i cicli `for` nel paragrafo 2 del capitolo 2, ora vediamo come realizzarli in Octave. Consideriamo un vettore riga `v` di valori reali (per esempio `v=[1, 2, 3]`). La struttura di un ciclo `for` è:

```
for k=v
  [illegible]
end
```

Le parole `for` e `end` sono *parole chiave* (dette anche *keyword*) del linguaggio Octave* e servono per aprire e chiudere il *ciclo for*. Il ciclo for ripete le istruzioni scritte al suo interno per tutti i valori dell'indice `k` contenuti nel vettore riga `v`.

*Le parole chiave del linguaggio non possono essere utilizzate come nomi di variabili. Per sapere se una parola è una parola chiave, si può digitare il comando `iskeyword(name)`. Esso restituisce il valore 1 (=vero) se la parola `name` è una parola chiave di Octave.

Quarteroni e Gervasio 2019

v=[ ]

Ora che abbiamo introdotto i cicli `for`, vediamo come generare un vettore vuoto e accodare iterativamente a esso nuovi elementi. Con le istruzioni:

```
v=[ ]; % inizializzo il vettore v vuoto
w=[ ]; % inizializzo il vettore w vuoto
for k=1:5
 v=[v, 1/k];
 w=[w; -k];
end
```

generiamo un vettore v riga (abbiamo utilizzato la virgola per accodare i nuovi elementi) che contiene i reciproci dei primi cinque numeri interi positivi e un vettore w colonna (abbiamo utilizzato il punto e virgola per accodare i nuovi elementi, quindi gli elementi sono disposti in maniera logica su righe diverse, cioè in colonna) che contiene gli opposti dei primi cinque numeri interi positivi. Alla fine del ciclo i vettori sono:

```
v =
  1.00000   0.50000   0.33333   0.25000   0.20000
```

e

```
w =
 -1
 -2
 -3
 -4
 -5
```

I blocchi di selezione

I costrutti Octave più semplici per operare delle scelte sono i seguenti.

1. *Condizione senza alternativa*

```
if <condizione>
 <istruzioni>
end
```

se la condizione espressa in `<condizione>` è soddisfatta, allora vengono svolte le istruzioni contenute nel blocco `<istruzioni>`. Per esempio, le istruzioni per realizzare il controllo: *"se la variabile* n *esiste (cioè è già stata inizializzata), allora ne raddoppiamo il contenuto"*, sono

```
if exist('n')
 n=n*2
end
```

exist

dove il comando `exist('n')` restituisce valore logico vero se la variabile n esiste (cioè è stata già inizializzata a un valore numerico) e valore logico falso altrimenti. Se digitiamo

```
n=3;
if exist('n'), n=n*2, end
```


Octave risponderà n=6, mentre se digitiamo

```
clear n
if exist('n'), n=n*2, end
```

Octave riproporrà il prompt senza scrivere alcunché (ricordiamo che Octave ci permette di scrivere più istruzioni sulla stessa riga di comando);

2. *Condizione con una alternativa*

```
if <condizione>
 <istruzioni 1>
else
 <istruzioni 2>
end
```

se la condizione espressa in `<condizione>` è soddisfatta, allora vengono svolte le istruzioni contenute nel blocco `<istruzioni 1>`; altrimenti vengono svolte le istruzioni contenute nel blocco `<istruzioni 2>`. Per esempio, le istruzioni per realizzare il controllo: *"se la variabile* n *esiste, allora ne raddoppiamo il contenuto; altrimenti le assegniamo il valore 1"*, sono

```
if exist('n')
 n=n*2;
else
 n=1;
end
```

3. *Condizione con più alternative*

```
if <condizione 1>
 <istruzioni 1>
elseif <condizione 2>
 <istruzioni 2>
elseif <condizione 3>
 <istruzioni 3>
...
else
 <istruzioni n>
end
```

se la condizione espressa in `<condizione 1>` è soddisfatta, allora vengono svolte le istruzioni contenute nel blocco `<istruzioni 1>`; altrimenti, se la condizione espressa in `<condizione 2>` è soddisfatta, allora vengono svolte le istruzioni contenute nel blocco `<istruzioni 2>`, e via via fino ad arrivare all'ultima alternativa espressa da `else`. Faremo un esempio per questo tipo di condizione dopo aver introdotto gli operatori relazionali.

Anche `if`, `else` e `elseif` sono parole chiave di Octave.

Gli operatori relazionali

Una condizione deve sempre restituire un valore logico *vero* o *falso*. In Octave i valori logici vero e falso sono rappresentati, rispettivamente, dai valori numerici 1 e 0.

Quarteroni e Gervasio 2019

Valutare l'efficacia didattica del modulo (1)

- Per accertare le idee pre-istruzione degli studenti riguardo le differenze sostanziali tra fenomeni naturali deterministici, fenomeni naturali casuali e fenomeni naturali caotici potrebbe essere utile somministrare un test in ingresso in cui indagare:
  - le idee degli studenti in relazione ad espressioni quali "evoluzione temporale di un fenomeno" e sulla differenza tra un evento prevedibile e uno imprevedibile:
    - *Cosa vuol dire studiare e/o conoscere l'evoluzione temporale di un fenomeno? Spiega riportando anche degli esempi concreti. Cosa è necessario conoscere per poter prevedere l'evoluzione temporale di un fenomeno? Spiega…*
  - come gli studenti intendano espressioni quali "un fenomeno è regolato da leggi deterministiche o da leggi casuali":
    - *Cosa vuol dire che un evento fisico è regolato da leggi deterministiche e cosa che è regolato da leggi casuali? Fai esempi concreti.*

Valutare l’efficacia didattica del modulo (2)

- Sulla rappresentazione che hanno gli studenti di sollecitazione lineare e no alla luce dei sistemi dinamici studiati nei loro percorsi di studio:
  - *Quando diciamo che un corpo è soggetto ad una sollecitazione lineare e quando no? Spiegalo riportando anche esempi studiati.*
- Sulle idee pre-istruzione degli studenti riguardo le differenze tra evento casuale e caotico richiedendo loro di riportare esempi tratti dalla vita quotidiana:
  - *Pensi che i termini casuale e caotico abbiano un significato simile o no? Sapresti trovare analogie e differenze tra i due termini magari attraverso esempi concreti?*

- Favorire un monitoraggio intermedio della sequenza di apprendimento
- Proporre anche un <u>test d’uscita</u> per delineare le abilità acquisite nell’interpretazione dei fenomeni caotici.

Conclusioni

- Si vuole porre l'attenzione sul significato dell'attributo "caotico" nelle scienze.
- Se da un lato sembra che il caos deterministico imponga delle limitazioni al valore predittivo della scienza, dall'altro rappresenta un'area di frontiera verso nuove possibilità di conoscenza e verso una sempre più chiara concezione di scienza stessa, intesa come continuo e diretto confronto con la realtà che ci circonda.
- Si vuole inoltre sottolineare il ruolo centrale ricoperto dall'utilizzo delle simulazioni/modellizzazioni nelle diverse fasi del percorso come strumento per favorire l'apprendimento dei sistemi dinamici non lineari.
- L'uso delle simulazioni/implementazioni permette agli studenti di comprendere come la finalità della fisica/matematica sia (anche) quella di costruire modelli che, pur distinti dalla realtà, hanno la funzione di rappresentarla e spiegarla.

Sviluppi futuri

- Nella futura progettazione e realizzazione del percorso sarebbe opportuno predisporre situazioni nelle quali l'apprendimento dei contenuti possa avvenire attraverso due tipi di interazione: con artefatti che diventano strumenti d'indagine scientifica e con il gruppo sociale di riferimento, formato dalla classe e dal docente.
- Al fine di favorire negli studenti l'interpretazione dei fenomeni caotici, si potrebbe scegliere di presentare, all'inizio del percorso, fenomeni fisici deterministici che opportunamente modificati possono manifestare un comportamento caotico.
- Riteniamo che un simile approccio permetta di volta in volta di porre in evidenza un parallelismo tra fenomeno non caotico e fenomeno caotico, effettuando confronti e ricavando analogie e differenze.
- A integrazione del percorso si potrebbe inoltre trattare aspetti relativi alla connessione tra "caso" e "caos" per evidenziare come nel caos deterministico il caso intervenga solo nella determinazione delle condizioni iniziali

Alcuni riferimenti bibliografici

- Brown, A. L. (1992) *Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings*. The Journal of the Learning Sciences, 2(2): 141-178
- Casati, G. (1991) *Il caos. Le leggi del disordine* Le scienze Editore. Strumenti e proposte per la didattica, Le Monnier, Firenze.
- Hammer, D. (2000) *Student resources for learning physics*. American Journal of Physics, 68(S1), 552-559.
- Komorek, M., Duit, R. (2004) *The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems*. International Journal of Science Education, 26(5), 619-634

Alcuni riferimenti bibliografici: testi scolastici

- Bergamini M., Barozzi G. e Trifone A. (2020) *Manuale di matematica – blu PLUS* voll. A, B e C. Zanichelli.
- Bergamini M., Barozzi G. e Trifone A. (2023) *Matematica.blu*, voll. 1 e 2. Zanichelli.
- Dodero N., Baroncini P. e Manfredi R. (1990) *Elementi di Matematica*, voll. 3, 4 e 5. Ghisetti e Corvi editori.
- Maraschini W. e Palma M. (2000) *Format, SPE, la formazione matematica del triennio*, voll. 1, 2 e 3. Paravia.
- Quarteroni A. e Gervasio P. (2019) *I delfini delle Eolie, i battiti del cuore, i motori di ricerca*. Zanichelli.
- Sasso L. e Zanone C. (2020) *Colori della Matematica BLU*, voll. 3, 4 e 5. Petrini – DeA Scuola.

Università di Udine &
ISIS A. Malignani di Udine

Grazie

Chiara, Dimitri e Paolo

chiara.milan@malignani.ud.it
dimitri.breda@uniud.it
paolo.giangrandi@malignani.ud.it